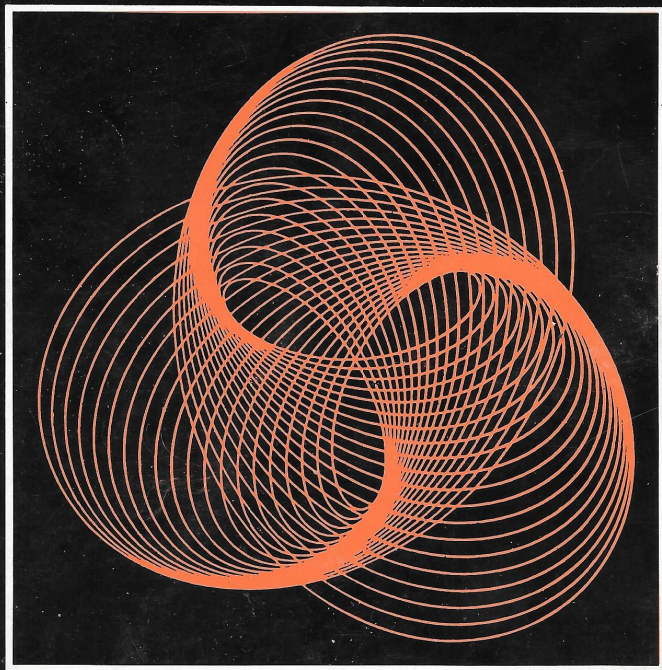


مهم ترین

مسائله‌ها و قضیه‌های ریاضی

ترجمه پرویز شهریاری

ابراهیم عادل



مهم ترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی

شکلیارسکی، چنتسوف، یاگلوم

ترجمه پرویز شهریاری
ابراهیم عادل



فهرست

مسئله‌ها	حل مسئله‌ها
۱. مسئله‌های آغازین	۷
۲. جابجایی رقم‌ها در عدد	۱۷
۳. بخش‌پذیری عددها	۱۹
۴. مسئله‌های گوناگون در حساب	۲۷
۵. جواب‌های درست معادله	۳۹
۶. ماتریس‌ها، دنباله‌ها و تابع‌ها	۴۴
۷. برآورد مجموع‌ها و حاصل ضرب‌ها	۵۸
۸. مسئله‌های گوناگونی از جبر	۶۷
۹. جبر چندجمله‌ای‌ها	۸۲
۱۰. عددهای مختلط	۸۸
۱۱. چند مسئله از نظریه عددها	۹۴

این کتاب، شامل ۳۵۰ مساله، و به طور عمده در زمینه نظریه عددها و جبر است و از مساله‌هایی که در المپیادهای ریاضی و یا ضمن بحث در گروه‌های ریاضی مسکو طرح شده، انتخاب شده‌اند. در میان این مساله‌ها، ۱۵ مساله را از نوشته‌های D. Shklyarsky (مربوط به سال‌های ۱۹۱۸ تا ۱۹۲۴) ریاضی‌دان و یکی از بنیان‌گزاران سرگرمی‌های ریاضی (در دانشگاه دولتی مسکو)، انتخاب کرده‌ایم.

در این کتاب، ابتدا صورت مساله‌ها و سپس راه‌حل آن‌ها آمده است. ضمن راه‌حل‌ها، در بسیاری موارد، مساله را تعمیم داده و در حالتی کلی‌تر حل کرده‌ایم. بخش‌های مختلف کتاب به هم مربوط نیستند (به جز دو بخش آخر، که در آن‌جا، ارتباط نزدیکی بین مساله‌ها وجود دارد).

توصیه ما به خواننده کتاب این است که، فصلی را برای خود انتخاب کند (و ضرورتی ندارد، فصل‌هایی که انتخاب می‌کند، به ردیف باشند) و، سپس، بدون مراجعه به بخش حل، برای رسیدن به نتیجه تلاش کند و تنها زمانی به بخش حل مراجعه کند که یا از حل مساله‌ها درمانده است و یا نیاز به کنترل کار خود دارد. ولی وقتی فصلی را آغاز کردید، بعد از آن که دست کم بخش عمده آن را مورد بررسی قرار دادید، به بخش دیگر بپردازید. مساله‌های دشوارتر، با علامت (*) مشخص شده‌اند و، بنابراین، در هر فصل می‌توان آن‌ها را برای پایان کار گذاشت. خواننده می‌تواند، برای طرح مساله‌هایی، شبیه مساله‌های کتاب و یا تعمیم آن‌ها، در جهت‌های مختلف تلاش کند. نتیجه این تلاش، به هیچ وجه کمتر از حل خود مساله‌ها نیست.

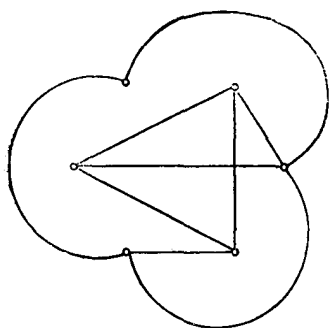
مسأله‌ها

۱. مسأله‌های آغازین

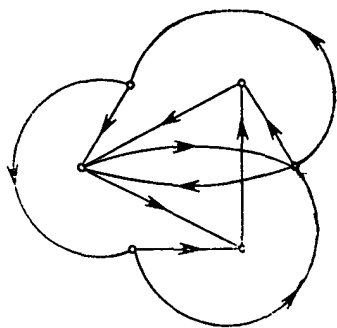
بیشتر مسأله‌های این بخش، برای تقویت اندیشه ریاضی و استدلال منطقی انتخاب شده‌اند و به شاخه معینی از ریاضیات بستگی ندارند. برخی از این مسأله‌ها، به حساب خالص مربوط می‌شوند (مثل مسأله‌های ۲۵ تا ۲۹) و برخی دیگر به نظریه گراف‌ها. گراف به معنای دستگاهی از نقطه‌هاست (شکل ۱، a را ببینید) که، بعضی از آن‌ها (و یا همه آن‌ها)، به وسیله پاره خط‌های راستی به هم وصل شده‌اند. گاهی جهت حرکت روی خط‌ها، با پیکان‌هایی که روی بعضی (یا همه آن‌ها) قرار دارد، مشخص شده است (شکل ۱، b را ببینید). مسأله‌هایی که به حمل و نقل مربوط می‌شوند، در نظریه گراف‌ها؛ و مسأله‌هایی که مربوط به جاده‌های یک طرفه‌اند در نظریه گراف‌های جهت‌دار مطرح می‌شوند. به همین ترتیب، اگر با گروهی از مردم سروکار داشته باشیم که، بعضی از افراد آن، با بعضی دیگر آشنا هستند، می‌توان آن‌ها را به کمک دستگاهی از نقطه‌ها نشان داد که، برخی از آن‌ها، با پاره خط‌هایی جهت‌دار، به برخی دیگر متصل‌اند.*

اغلب مسأله‌های این بخش، نیاز چندانی به دانش ریاضی ندارند و،

(*) در مسأله‌های این بخش، رابطه‌آشنایی را به صورت رابطه‌ای متقارن در نظر گرفته‌ایم، یعنی وقتی می‌گوییم A با B آشناست، به معنای آن است که B هم با A آشناست. در حالت آشنایی نامتقارن، نقطه‌ها به صورت پاره خط‌هایی جهت‌دار به هم وصل می‌شوند.



(a)



(b)

شکل ۱

بنابراین حل آن‌ها، برای نوجوانان دانش‌آموز هم، قابل فهم است. البته مسأله‌هایی هم در این بخش وجود دارند که، برای حل آن‌ها، از دوش استقرای ریاضی استفاده شده است و، روشن است که تنها دانش‌آموزان سال‌های آخر دبیرستان باین روش آشنا هستند. در بعضی از مسأله‌ها، از اصل دیریکله* استفاده شده است که، به تقریب، می‌توان آن را به این صورت شرح داد:

اگر بخواهیم هفت خرگوش را در پنج قفس جا دهیم (و یا به طور کلی، m خرگوش را در n قفس $n < m$)، آن وقت دست کم در یک قفس، دو خرگوش (یا بیشتر) قرار می‌گیرد.

۱. دو یست سرباز در یک آرایش مستطیلی ایستاده‌اند: در هر ردیف ده و در هر ستون بیست سرباز. از هر ردیف، کوتاه‌ترین سرباز و، سپس، از بین بیست سربازی که به این ترتیب انتخاب شده‌اند، بلندترین آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. بار دوم، در همان آرایش دو یست نفری، در هر ستون بلندترین سرباز و، سپس، از بین ده سربازی که به این ترتیب انتخاب شده‌اند، کوتاه‌ترین

(*) دیریکله (Peter Gustav Lejeune Dirichlet؛ ۱۸۰۵-۱۸۵۹) ریاضیدان نامدار آلمانی.

آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. کدام یک از این دو سرباز (کوتاه‌ترین از بین بلندترین‌ها، یا بلندترین از بین کوتاه‌ترین‌ها) کوتاه‌تر است؟ (فرض بسراین است که، این دو سرباز، قدی برابر ندارند.)

۳. همه مردم روی زمین را در نظر می‌گیریم که تاکنون زندگی کرده‌اند. هر یک از آن‌ها، در طول زندگی خود، با کسان دیگری دست داده است. ثابت کنید، تعداد کسانی که، به تعداد فرد دست داده‌اند، عددی زوج است.

۳. ثابت کنید، از بین ۶ نفر، یا ۳ نفر وجود دارد که دو به دو باهم آشنا هستند و یا ۳ نفر وجود دارد که دو به دو، یکدیگر را نمی‌شناسند.

۴. چند نفر در یک جلسه شرکت کرده‌اند (روشن است که، تعداد این افراد از یک نفر بیشتر است. در غیر این صورت، صحبت از «جلسه» نمی‌توان کرد).

(a) آیا ممکن است، بین شرکت کنندگان در جلسه، نتوان دو نفر را پیدا کرد، به نحوی که تعداد آشنای آن‌ها در جلسه، یکی باشد؟

(b) ثابت کنید، حالتی وجود دارد که، برای هر تعداد شرکت کننده در جلسه، نتوان سه نفر را پیدا کرد، به نحوی که، تعداد آشنای آن‌ها در جلسه، یکی باشد.

۵. $2n$ نفر در جلسه‌ای شرکت کرده‌اند و می‌دانیم، هر یک از آن‌ها، حداقل با n شرکت کننده آشناست. ثابت کنید، از بین شرکت کنندگان در جلسه، می‌توان چهار نفر را طوری انتخاب کرد که بتوانند به نحوی دور یک میز گرد بنشینند که، هر کدام، با دو نفر مجاور خود (در سمت چپ و سمت راست) آشنا باشد.

۶. چند دانشمند در کنگره‌ای شرکت کرده‌اند، بعضی از این دانشمندان از قبل باهم آشنا هستند و بعضی دیگر، هم‌را نمی‌شناسند. در بین دانشمندان، نمی‌توان دو نفر را پیدا کرد که، تعداد آشنای برابر داشته باشند (آشنایی‌ها را دوطرفه فرض می‌کنیم). ثابت کنید، دانشمندی وجود دارد که تنها با یکی از شرکت کنندگان در کنگره، از قبل، آشنا بوده است.

۷. در کنگره‌ای ۱۰۰۰ نماینده از کشورهای مختلف شرکت دارند. می‌دانیم، هر سه نماینده، می‌توانند بدون نیاز به نفر چهارم با هم صحبت کنند (ممکن است این حالت پیش‌آید که یکی از سه نفر، به عنوان مترجم، به دو نفر دیگر کمک کند). ثابت کنید، همه شرکت کنندگان را می‌توان در اطاق‌های دو نفری طوری جا داد که، ساکنان هر اطاق، بتوانند به راحتی با هم صحبت کنند.

۸. ۱۷ دانشمند در یک گروه می‌دانند. در گروه می‌دانیم از سه زبان استفاده می‌شود و، می‌دانیم هر دانشمند، دست کم با یکی از این سه زبان آشناست. همچنین می‌دانیم، هر دو دانشمند شرکت کننده، می‌توانند، دست کم با یکی از این سه زبان، با هم صحبت کنند. ثابت کنید، در این گروه می‌دانیم، سه دانشمند وجود دارند که می‌توانند با هم با یک زبان مشترک صحبت کنند.

۹. در جلسه‌ای، n نفر شرکت دارند. می‌دانیم، هر دو نفری که با نفر دیگری آشنا هستند، با هم آشنایی متقابل ندارند و، برعکس، هر دو نفری که با هم آشنا نیستند، درست دو آشنای مشترک دارند. (a) ثابت کنید، تعداد آشنای هر نفر با تعداد آشنای هر نفر دیگر، یکی است.

(b) به ازای چه مقداری از n ، شرط‌های مساله برقرارند؟

۱۰. در شهری ۱۰۰۰۰ نفر زندگی می‌کنند، هر دو نفر از اهالی این شهر، یا با هم دوست‌اند و یا با هم دشمن. در هر روز، یکی از اهالی (و نه بیشتر) با تمام دوستانش دعوا می‌کند و با تمام دشمنانش آشتی. در ضمن، هر سه نفر از اهالی، می‌توانند با یکدیگر دوست شوند. ثابت کنید، بعد از چند روز، همه ساکنان شهر با هم دوست می‌شوند. دست کم، چند روز برای این منظور کافی است؟

۱۱*. در ایالتی، چند قلعه وجود دارد. از هر کدام از آن‌ها، سه جاده آغاز می‌شود. شوالیه‌ای، به قصد سفر، قلعه آبا و اجدادی خود را ترک می‌کند. شوالیه، عاشق تنوع است و، در این سفر، هر جا به قلعه‌ای می‌رسد،

اگر قبلاً به راست پیچیده بود، به چپ می‌رود و اگر قبلاً به سمت چپ پیچیده بود، به جاده سمت راست می‌رود (وقتی از اولین قلعه می‌گذرد، راه خود را به دلخواه، به سمت چپ یا به سمت راست، انتخاب می‌کند). ثابت کنید، شوالیه، بعد از چندی، به قلعه خودش می‌رسد.

۱۴.۲n شوالیه وارد قصر آرتور شاه شدند. هر يك از شوالیه‌ها، بیش از $n-1$ دشمن در این جمع $2n$ نفری ندارد. ثابت کنید، مرلین (مشاور آرتور شاه) می‌تواند شوالیه‌ها را دور يك میز طوری بنشانند که، هیچ کدام از آنها، بعد از دشمن خود قرار نگرفته باشد.

۱۳. a) در بین ۸۰ سکه مفروض، می‌دانیم یکی از سکه‌ها تقلبی است؛ همچنین می‌دانیم، سکه تقلبی از يك سکه سالم، سبک‌تر است و همه سکه‌های سالم، وزن‌های برابر دارند. می‌خواهیم، با استفاده از ترازو و بدون استفاده از وزنه، با چهار بار وزن کردن، سکه تقلبی را، از سکه‌های سالم جدا کنیم. **b)** می‌دانیم، يك سکه تقلبی در بین n سکه سالم وجود دارد که، نسبت به سکه سالم، وزنی کمتر دارد. سکه‌های سالم، هم‌وزن‌اند، حداقل مقدار k را طوری پیدا کنید که، با k مرتبه استفاده از ترازو، بتوان سکه تقلبی را از سکه‌های سالم جدا کرد.

۱۴. ۲۵ مکعب فلزی در اختیار داریم که اندازه‌هایی برابر دارند؛ بعضی از آنها از آلومی‌نیوم و برخی دیگر از دورالویم (آلیاژ سختی از آلومی‌نیوم) ساخته شده‌اند؛ و طبیعی است که مکعب‌های اخیر، سنگین‌ترند. چگونه می‌توان تعداد هر يك از این دو مکعب را، به کمک ترازو و بدون استفاده از وزنه، با حداکثر ۲۱ بار مقایسه پیدا کرد؟

یادداشت: فرض را بر این می‌گیریم که، اگر همه مکعب‌ها از يك جنس باشند، همه با فلز آلومی‌نیوم ساخته شده‌اند، زیرا اگر از این فرض اطلاع نداشته باشیم و، در ضمن، همه مکعب‌ها هم‌جنس باشند، نخواهیم توانست نوع جنس آنها را معین کنیم.

۱۵. ۱۲ سکه، يك سکه تقلبی وجود دارد. می‌دانیم، وزن سکه تقلبی با وزن سکه سالم فرق دارد، ولی نمی‌دانیم از آن سبک‌تر است

یا سنگین‌تر. همهٔ سکه‌های سالم وزنی برابر دارند. می‌خواهیم، با سه بار استفاده از ترازو (و بدون استفاده از وزنه)، سکهٔ تقلبی را پیدا کنیم و، در ضمن، روشن کنیم که، این سکه سبک‌تر از سکهٔ سالم است یا سنگین‌تر از آن.

یادداشت: با توجه به شرط‌های مسئلهٔ ۱۵، می‌توان با سه بار استفاده از ترازو، سکهٔ تقلبی را، در بین ۱۳ سکه هم پیدا کرد، ولی در این حالت، نمی‌توان معلوم کرد که از سکهٔ سالم سبک‌تر است یا سنگین‌تر. برای ۱۴ سکه، احتیاج به ۴ بار استفاده از ترازو داریم.

همچنین می‌توان ثابت کرد (گرچه این اثبات، تا حدی پیچیده است) که، برای جدا کردن يك سکهٔ تقلبی از بین N سکه و، در ضمن، روشن کردن سبک‌تر یا سنگین‌تر بودن آن، نسبت به سکهٔ سالم، به k بار استفاده از ترازو نیاز داریم و $k = \log_3(2N+3)$ ، وقتی که $2N+3$ ، توان درستی از عدد ۳ باشد؛ و $k = [\log_3(2N+3)] + 1$ ، وقتی که $2N+3$ ، توان درستی از عدد ۳ نباشد (که در این صورت، $\log_3(2N+3)$ عددی درست نخواهد بود).

در این جا $[x]$ ، به معنای بخش درست عدد x است (صفحه‌های ۴۵ و ۴۶ را ببینید).

وقتی داشته باشیم: $N = ۱۲$ ، با توجه به دستور بالا به دست می‌آید: $k = ۳$. اگر به سبک‌تر یا سنگین‌تر بودن وزن سکهٔ تقلبی توجهی نداشته باشیم و تنها بخواهیم آن را از بین سکه‌های سالم جدا کنیم، در حالت $N = ۱۲$ و $N = ۱۳$ به $k_1 = ۳$ بار و در حالت $N = ۱۴$ به $k_1 = ۴$ بار استفاده از ترازو نیاز داریم. تا آن جا که ما می‌دانیم، دستوری کلی برای $k_1 = k_1(N)$ تاکنون پیدا نشده است.

۱۶. a) مردی وارد مسافرخانه شد. او پول نداشت، ولی با صاحب مسافرخانه قرار گذاشت، برای هر روز اقامت خود، يك حلقه از زنجیر نقره‌ای خود را، که شامل ۷ حلقه بود، به او بدهد. مسافر ۷ روز در مسافرخانه اقامت کرد و، برای هر روز، يك حلقه از زنجیر خود را به صاحب مسافرخانه

داد. حداقل چند بار باید زنجیر خود را پاره کند؟ (مسافر می‌تواند حلقه‌هایی را که قبلاً داده است، پس بگیرد و زنجیره‌ای با یک حلقه بیشتر به صاحب مسافرخانه بدهد).

(b) همین مسأله را برای ۲۰۰۰ روز اقامت در مسافرخانه و زنجیری شامل ۲۰۰۰ حلقه، حل کنید.

۱۷. در شهر «لیس»، می‌توان از طریق مترو، از هر ایستگاه به هر ایستگاه دیگری رفت (اگر لازم باشد، می‌توان قطار را عوض کرد. ثابت کنید، با این شرط، ایستگاهی وجود دارد که اگر بسته شود (وقتی ایستگاهی بسته است، قطار نمی‌تواند از آن عبور کند)، باز هم می‌توان از هر ایستگاهی به هر ایستگاه دیگر رفت.

۱۸*. در همه خیابان‌های شهر «زورباگان»، رفت و آمد، دوطرفه است. وقتی احتیاج به مرمت خیابان‌ها باشد، شهرداری به طور موقت، بعضی از خیابان‌ها را یک طرفه اعلام می‌کند، ولی خیابان‌های دیگر، همچنان، دوطرفه باقی می‌مانند، به محض این که کار مرمت در این خیابان‌ها تمام شود، آن‌ها را دوطرفه و، بقیه خیابان‌ها را، یک طرفه اعلام می‌کنند تا به مرمت آن‌ها بپردازند. در مدت مرمت خیابان‌ها، می‌توان در شهر «زورباگان»، از هر جایی به هر جای دیگر رفت و آمد کرد. ثابت کنید، اگر همه خیابان‌های شهر یک طرفه اعلام شوند، باز هم می‌توان از هر نقطه شهر به هر نقطه دیگر رفت.

۱۹*. در ایالت «دولفینا» n شهر وجود دارد و، هر دو شهر، با یک جاده به هم مربوط اند. رفت و آمد در جاده‌ها یک طرفه است. ثابت کنید، برای $n \neq ۲$ و $n \neq ۴$ ، می‌توان جهت حرکت در جاده‌ها را طوری انتخاب کرد که بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت بی‌آن که بیش از یک شهر دیگر، در سر راه باشد. همچنین ثابت کنید، برای $n = ۲$ و $n = ۴$ ، نمی‌توان چنین سازمانی داد.

۲۰*. در ایالتی ۱۰۰ شهر وجود دارد. می‌دانیم، اگر دو شهر A و B با تلفن مستقیم به هم مربوط نباشند، آن وقت یک خط هوایی بین A و B و برعکس، وجود دارد، ولی اگر A و B با تلفن مستقیم به هم مربوط باشند،

آن وقت، خط هوایی بین آن‌ها وجود ندارد. همچنین می‌دانیم، هر دو شهر می‌توانند، به‌طور مستقیم و یا با واسطه، ارتباط تلفنی برقرار کنند و از هر شهری می‌توان به‌طور مستقیم و یا با واسطه فرودگاه‌های دیگر، به‌هر شهر دیگر با هواپیما سفر کرد. ثابت کنید، در این ایالت، چهار شهر وجود دارد که، در آن، هر دو شهر می‌توانند با هم ارتباط تلفنی داشته باشند و از هر شهر می‌توان به‌هر شهر دیگر پرواز کرد، به‌نحوی که در هر دو مورد (ارتباط تلفنی و پرواز هوایی) تنها از خط‌های ارتباطی بین همین چهار شهر استفاده شود، ولو این که، در صورت لزوم، از دو شهر بینابینی (در محدوده همین چهار شهر) استفاده شود (یعنی در واقع، این چهار شهر، از نظر ارتباط با یکدیگر، چه از نظر تلفن و چه از نظر ارتباط هوایی، خود کفاست).

۲۱. آیا اسب می‌تواند، از گوشه پایین و سمت چپ صفحه معمولی شطرنج، خود را به گوشه بالا و سمت راست صفحه برساند، به‌نحوی که از هر خانه صفحه شطرنج، تنها یکبار عبور کند؟

۲۲. خودکشی شاه. در یک صفحه شطرنجی 1000×1000 ، به تعداد ۴۹۹ رخ سیاه و یک شاه سفید وجود دارد. ثابت کنید، با هر موقعیت اولیه مهره‌ها و هر برنامه‌ریزی شاه، سرانجام، شاه به‌دام می‌افتد، یعنی بعد از چند حرکت، در خانه‌ای قرار می‌گیرد که در خطر یکی از رخ‌هاست. (حرکت رخ و حرکت شاه، روی صفحه شطرنجی، با همان قانون معمولی انجام می‌شود.)

۲۳. ۱۲ مربع به‌ترتیب دایره‌ای چیده شده‌اند. چهار مهره بارنگ‌های مختلف قرمز، زرد، سبز و آبی، در چهار مربع مجاور قرار داده‌ایم. هر مهره می‌تواند از مربعی که در آن است، در هر یک از دو جهت ممکن، در طول چهار مربع حرکت کند و در خانه پنجم (به‌شرطی که به وسیله مهره دیگری اشغال نشده باشد) بنشیند. بعد از چند حرکت، مهره‌ها دوباره در همان چهارخانه نخستین جا گرفتند. در این حالت، با چه تبدیلهایی از مهره‌ها، روبه‌رو می‌شویم؟

۲۴. از دانشجویان یک دانشکده، ۵۰ نفر با زبان انگلیسی، ۵۰ نفر

با زبان فرانسوی و ۵۰ نفر با زبان آلمانی آشنا هستند. البته، برخی از دانشجویان می‌توانند به دو یا سه زبان صحبت کنند. بنابراین، در حالت کلی، تعداد همه دانشجویان (که هر کدام، دست کم به یک زبان صحبت می‌کنند)، از 3×50 ، یعنی ۱۵۰ کمتر است. ثابت کنید، همه دانشجویان را می‌توان به ۵ گروه (که در حالت کلی، تعداد آن‌ها با هم متفاوت است) تقسیم کرد که، در هر گروه، درست ۱۰ نفر با زبان انگلیسی، ۱۰ نفر با زبان فرانسوی و ۱۰ نفر با زبان آلمانی آشنا باشند.

۲۵. a) ۲۰ ورزشکار با نظارت ۹ داور، در مسابقه‌ای شرکت کردند. هر داور، بنابه تشخیص خود، مقام‌های از اول تا بیستم‌را، برای ورزشکاران، معین کرد. در ارزیابی‌های داوران، تفاوت قابل ملاحظه‌ای وجود نداشت: تفاوت مقام‌های ورزشکاران، برای هر دو داور، بیش از ۳ نبود. برای اعلام نتیجه نهایی، مجموع مقام‌های هر ورزشکار را، که به وسیله ۹ داور معین شده بود، بر ۹ تقسیم کردند تا مقام او معلوم شود. در این «مقدارهای میانگین»، «میانگین» مقام بهترین فرد از ۲۰ ورزشکار، از چه عددی بزرگ‌تر نیست؟

b) فدراسیون تنیس، به همه تنیس‌بازان کشور، نمره شایستگی داد: به بهترین بازی‌کن، نمره ۱، به نفر بعدی نمره ۲ و غیره داده شد. می‌دانیم، در بازی دو تنیس‌بازی که اختلاف نمره‌های شایستگی آن‌ها بیش از ۲ باشد، بازی‌کنی که نمره کمتری دارد، پیروز می‌شود.

در بازی‌های به شیوه المپیک، ۱۰۲۴ تنیس‌باز شرکت کردند (بعد از هر دور رقابت، همه بازنده‌ها کنار می‌روند و بقیه شرکت کنندگان، به دو گروه رقابتی با قرعه‌کشی تقسیم می‌شوند و در دور بعدی مسابقه شرکت می‌کنند). قهرمان این مسابقه‌ها، حداکثر کدام نمره شایستگی را می‌تواند داشته باشد؟

۲۶. مسابقه‌ها n روز طول کشید و N مدال بین برنده‌ها تقسیم شد: روز اول یک مدال و $\frac{1}{7}$ بقیه مدال‌ها، روز دوم ۲ مدال و $\frac{1}{7}$ بقیه مدال‌ها، ...،

روز $(n-1)$ ام $(n-1)$ مدال و $\frac{1}{7}$ بقیه مدال‌ها و، سرانجام، در روز n ام، n مدال باقی مانده، به برندگان اهدا شد. این مسابقه‌ها چند روز طول کشیده است و، روی هم، چند مدال بین برندگان تقسیم شده است؟

۴۷. ۵ نفر با هم دوست بودند و یک میمون داشتند. یک روز سبزی گردو خریدند و تصمیم گرفتند صبح روز بعد، آن‌ها را، بین خود تقسیم کنند. در طول شب، یکی از پنج نفر بیدار شد، گردوها را به پنج بخش برابر تقسیم کرد، ولی متوجه شد یک گردو اضافی است، گردوی اضافی را به میمون داد، سهم خود را خورد و دوباره خوابید. بعد نفر دوم بیدار شد. او بدون این که از عمل اولی اطلاع داشته باشد، گردوها را به پنج بخش برابر تقسیم کرد، یک گردوی اضافی را به میمون داد، سهم خود را خورد و خوابید. نفر سوم بیدار شد، گردوهای باقی مانده را به پنج بخش برابر تقسیم کرد، یک گردو را که اضافه مانده بود به میمون داد، سهم خودش را خورد و خوابید. دو نفر دیگر هم، به همین ترتیب عمل کردند، یعنی هر کدام به نوبت، گردوهای مانده را به پنج بخش برابر تقسیم کردند، هر بار گردوی اضافه را به میمون دادند، بعد سهم خود را خوردند و خوابیدند. سرانجام، صبح که همگی با هم از خواب برخاستند، گردوهای مانده را به پنج بخش برابر تقسیم کردند و چون یک گردو اضافه بود، آن را به میمون دادند. حداقل تعداد گردوها، چقدر است؟

۴۸. دو برادر یک گله گوسفند داشتند. گله را فروختند و بابت هر گوسفند، به تعداد گوسفندها، روبل گرفتند. پول را به این صورت تقسیم کردند: برادر بزرگتر ۱۵ روبل برداشت، بعد برادر کوچکتر ۱۵ روبل؛ دوباره اول برادر بزرگتر و بعد برادر کوچکتر، هر کدام ۱۵ روبل برداشتند؛ به همین ترتیب ادامه دادند تا جایی که برادر کوچکتر دید، مبلغی که باقی مانده، از ده روبل کمتر است؛ در نتیجه آن چه مانده بود برداشت. برادر بزرگتر، برای رعایت عدالت، چاقوی خود را به برادر کوچکترش داد، این چاقو چقدر می‌ارزد؟

(a. ۲۹) کدامیک از روزهای شنبه یا یکشنبه، بیشتر به‌اول ژانویه می‌افتند؟

(b) در سی‌امین روز ماه، به‌کدامیک از روزهای هفته، بیشتر برخورد می‌کنیم؟

۲. جابه‌جایی رقم‌ها در عدد

۳۵. رقم آخریک عدد طبیعی را حذف کرده‌ایم. عدد به‌اندازه‌مضرب‌درستی از یک عدد درست، کوچک می‌شود (یعنی نسبت عدد مفروض به‌عدد حاصل، عددی درست است). همه‌این‌گونه عددها را پیدا کنید.

(a. ۳۱) همه‌عددهای طبیعی را پیدا کنید که با رقم ۶ آغاز می‌شوند و اگر این رقم را حذف کنیم، عددی که به‌دست می‌آید $\frac{1}{۲۵}$ عدد نخستین باشد.

(b) ثابت کنید، عددی طبیعی وجود ندارد که اگر رقم اول (از سمت چپ) آن را حذف کنیم، به $\frac{1}{۳۵}$ خود تبدیل‌شود.

۳۲*. یکی از رقم‌های عدد طبیعی N را حذف کرده‌ایم، حاصل به ۹ بخش‌پذیر و برابر $\frac{N}{۹}$ شده است.

(a) کدام رقم‌ها را می‌توان حذف کرد؟

(b) همه‌عددهای طبیعی از این‌گونه را پیدا کنید.

(a. ۳۳) همه‌عددهای طبیعی را پیدا کنید که، اگر رقم سوم آن‌ها را حذف کنیم، عدد اصلی، به‌اندازه‌مضرب‌درستی از یک عدد درست کوچک شود.

(b*) همه‌عددهای طبیعی را پیدا کنید که، با حذف رقم دوم آن‌ها، به‌اندازه‌مضرب‌درستی از یک عدد درست، کوچکتر شوند.

۴۴. a) کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که با رقم ۱ آغاز شود و اگر رقم ۱ را از ابتدا به انتهای آن ببریم، عدد حاصل سه برابر عدد اصلی باشد. همه این گونه عددها را پیدا کنید.

b) يك عدد طبیعی با چه رقمی می‌تواند آغاز شود که، اگر این رقم را از ابتدا به انتهای عدد ببریم، عدد حاصل سه برابر عدد مفروض باشد؟ همه این گونه عددها را پیدا کنید.

۳۵. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که به ۶ ختم شده باشد (رقم سمت راست آن، برابر ۶ باشد) و اگر این رقم را به آغاز عدد منتقل کنیم، چهار برابر عدد اصلی به دست آید.

۳۶. ثابت کنید، عددهای طبیعی وجود ندارند که، اگر رقم اول آن‌ها (از سمت چپ) را به پایان عدد منتقل کنیم، ۵، ۶ یا ۸ برابر عدد به دست آید.

۳۷. ثابت کنید، عددی طبیعی وجود ندارد که، اگر رقم اول آن‌ها را، به آخر عدد منتقل کنیم، به دو برابر خود تبدیل شود.

۳۸. a) ثابت کنید، عدد طبیعی وجود ندارد که، اگر در آن، رقم اول را به پایان عدد منتقل کنیم، عدد مفروض ۷ یا ۹ برابر شود.

b) ثابت کنید، عدد درست و مثبتی وجود ندارد که، با انتقال رقم اول آن به پایان عدد، چهار برابر شود.

۳۹. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که با رقم ۷ آغاز شده باشد و اگر این رقم را به انتهای آن منتقل کنیم، به يك سوم خودش تبدیل شود. همه این گونه عددها را پیدا کنید.

۴۰. a) ثابت کنید، يك عدد طبیعی نمی‌تواند برابر با $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$ ،

$\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{7}$ و یا $\frac{1}{8}$ «مقلوب» خودش باشد (عددی را «مقلوب» يك عدد گویند که با همان رقم‌ها و در جهت عکس نوشته شود).

b) عددهای طبیعی را پیدا کنید که برابر $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{9}$ «مقلوب» خودشان

۴۱. (a) عددی شش رقمی را پیدا کنید که، اگر سه رقم سمت راست آن را، با همان ردیف به سمت چپ عدد منتقل کنیم، به شش برابر خودش تبدیل شود. (b) ثابت کنید، عددی هشت رقمی وجود ندارد که، اگر چهار رقم سمت راست آن را، با همان ردیف، به سمت چپ عدد منتقل کنیم، به شش برابر خود تبدیل شود.

۴۲. عددی شش رقمی را پیدا کنید که از ضرب آن در ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، عددی شش رقمی با همان رقم‌ها، ولی با ترتیب دیگری، به دست آید.

۴۳. عددی سه رقمی برابر است با واسطه حسابی همه عددهایی که با جابه‌جایی رقم‌های آن به دست آمده‌اند (البته، این جابه‌جائی رقم‌ها طوری است که تنها مرتبه رقم‌ها تغییر می‌کند، ولو این که، ردیف آن‌ها به هم بخورد). همه این گونه عددها را پیدا کنید.

۴۴. A عددی است طبیعی و A' عدد دیگری که با همان رقم‌های A ، منتهی با ترتیب دیگری، به دست آمده است. ثابت کنید، اگر داشته باشیم: $A + A' = 10^{10}$ ، آن وقت، عدد A بر ۱۰ بخش پذیر است.

۴۵. M عددی ۱۷ رقمی است و N عددی که با همان رقم‌ها، منتهی در جهت عکس به دست آمده است (M و N «مقلوب» یکدیگرند). ثابت کنید، دست کم یکی از رقم‌های عدد $M + N$ (در عدد نویسی دهدهی) زوج است.

۳. بخش پذیری عددها

اغلب مساله‌های این بخش، به نظریه عددها مربوط می‌شود. در بخش‌های ۴ و ۵ و ۱۱ هم، دوباره به نظریه عددها، برخورد خواهیم گشت.

۴۶. ثابت کنید، برای هر عدد درست n ، بخش پذیر است:

$$(a) \quad n^3 - n \text{ بر } 3;$$

$$(b) \quad n^5 - n \text{ بر } 5;$$

$$(c) \ n - n^7 \text{ بر } 7؛$$

$$(d) \ n^{11} - n \text{ بر } 11،$$

$$(e) \ n^{13} - n \text{ بر } 13.$$

یادداشت: توجه کنید $n - n^9$ همیشه بر ۹ بخش پذیر نیست (به عنوان نمونه، عدد $2 - 2^9 = 510$ مضربی از ۹ نیست).

مساله‌های (a) تا (e)، حالت‌های خاصی از يك قضیه کلی‌اند که، آن را، در مساله ۳۴۰ آورده‌ایم.

۴۷. ثابت کنید، برای هر عدد درست n

$$(a) \ 2^6n - 3^6n \text{ بر } 35 \text{ (در این جا } n \geq 0 \text{) بخش پذیر است؛}$$

$$(b) \ 4n + 5n^2 - n^5 \text{ بر } 120 \text{ بخش پذیر است؛}$$

$$(c) \ 5 + 3n + n^2 \text{ نمی‌تواند بر } 121 \text{ بخش پذیر باشد.}$$

۴۸. ثابت کنید، برای عددهای درست m و n

$$(a^*) \ (m^{60} - n^{60})mn \text{ بر } 56786730 \text{ بخش پذیر است؛}$$

$$(b) \ 12m^5 + 4mn^4 + 15m^2n^3 - 5m^3n^2 + 3m^4n + m^5 \text{ برابر}$$

۳۳ نیست.

$$49. \text{ به ازای چه مقدار درست و مثبت } n، \text{ عدد } 1 - 3^n - 16^n + 20^n$$

بر ۳۲۳ بخش پذیر است؟

$$50. \text{ آیا می‌توان عدد طبیعی } n \text{ را طوری پیدا کرد که } 1 + n + n^2$$

بر ۱۹۵۵ بخش پذیر باشد؟

۵۱. باقی مانده تقسیم توان صدم يك عدد را بر ۱۲۵ پیدا کنید.

۵۲. ثابت کنید، اگر N و ۱۰ نسبت به هم اول باشند (N عددی

طبیعی است) آن وقت، سه رقم سمت راست عدد N^{101} بر سه رقم سمت راست

عدد N منطبق است (مثلاً، سه رقم سمت راست عدد 101^{1233} برابر ۲۳۳

و سه رقم سمت راست عدد 101^{37} برابر ۵۳۷ است).

۵۳. عددی سه رقمی پیدا کنید که، سه رقم سمت راست هر توانی از

از آن، همین عدد سه رقمی باشد.

۵۴. N ، عددی زوج و غیرقابل بخش بر ۱۰ است. رقم دهگان عدد

N^{20} چند است؟ رقم صدگان N^{200} چقدر است؟

۵۵. n عددی طبیعی و k عددی فرد است. ثابت کنید، عدد

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

بر عدد $1 + 2 + 3 + \dots + n$ بخش پذیر است.

۵۶. قاعده‌ای برای بخش پذیری عددهای درست بر عدد ۱۱ پیدا کنید.

۵۷. عدد $(14)(13)(12)(11)(10)987654321$ ؛ در دستگاه

عددنویسی به مبنای ۱۵ نوشته شده است، یعنی برابر است با

$$15^{13} + 2 \cdot 15^{12} + \dots + (11) \cdot 15^3 + (12) \cdot 15^2 + (13) \cdot 15 + 14$$

باقی مانده تقسیم این عدد بر ۷ را پیدا کنید.

۵۸. می‌دانیم عدد N و همه عددهایی که با تبدیل رقم‌های عدد N

به دست می‌آیند، بر عدد درست k بخش پذیرند. ثابت کنید، k تنها می‌تواند

برابر ۱، ۳ یا ۹ باشد (برای $k=1$ درستی حکم روشن است؛ برای $k=3$

و $k=9$ هم، از معیار بخش پذیری بر ۳ و ۹ نتیجه می‌شود).

۵۹. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که، در مبنای دهدهی، تنها

با رقم‌های ۱ نوشته شود و بر عدد $\underbrace{333\dots33}_{\text{رقم } 100}$ بخش پذیر باشد.

۶۰. a را رقم سمت راست عدد $N = 2^k$ و A را عددی می‌گیریم که

با حذف رقم سمت راست N به دست آمده باشد. ثابت کنید، برای هر $k > 3$.

عدد $a.A$ بر ۶ بخش پذیر است.

۶۱. ثابت کنید، عدد $10152^8 + 10887^8 - 27195^8$ بر عدد

۲۶۴۶۰ بخش پذیر است.

۶۲. ثابت کنید $11^{10} - 1$ بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

۶۳. ثابت کنید $5555^{2222} + 2222^{5555}$ بر ۷ بخش پذیر است.

۶۴. ثابت کنید، هر عددی که شامل 3^n رقم مساوی باشد، بر 3^n

بخش پذیر است (مثلاً، عدد ۲۲۲ بر ۳، عدد ۷۷۷۷۷۷۷۷ بر ۹ بخش پذیر

است و غیره).

۶۵. باقی مانده تقسیم عدد زیر را بر ۷ پیدا کنید:

$$10^{10} + 10^{(10^2)} + \dots + 10^{(10^{10})}$$

۶۶. (a) رقم یکان را در عددهای $9^{(9^9)}$ و $2^{(2^4)}$ پیدا کنید.

(b) در هریک از عددهای 2^{999} و 3^{999} ، دو رقم سمت راست را پیدا کنید.

(c) دو رقم سمت راست را در عدد $14^{(14^{14})}$ به دست آورید.
۶۷. ثابت کنید:

(a) دو رقم سمت راست در عددهای 9^{9^9} و $9^{9^{9^9}}$ یکی است (9^9 به معنای $9^{(9^9)}$ است).

(b) شش رقم سمت راست در دو عدد $7^{7^{7^{7^{7^7}}}}$ و $7^{7^{7^{7^{7^7}}}}$ یکی است.
۶۸. (a) در عدد نویسی دهدهی، رقم سمت راست عدد

$$\left(\left(\left(\left(7^7 \right)^7 \right)^7 \right)^7 \right)^7$$

چند است (عدد ۷ در توان، ۱۰۰۰ بار تکرار شده است). دو رقم سمت راست این عدد چقدر است؟

(b) رقم سمت راست این عدد را پیدا کنید:

$$\left(\underset{7}{7} \cdot \underset{7}{7} \cdot \left(7^{(7^7)} \right) \cdot \dots \right)$$

در این جا هم، مثل (a)، ۱۰۰۱ بار از عدد هفت استفاده شده است، ولی در ترتیب به توان رساندن، با آن فرق دارد. دو رقم سمت راست این عدد چند است؟

۶۹. این عدد داده شده است:

$$N = 9 \left(9 \dots \left(9 \left(9^9 \right) \right) \dots \right)$$

که در آن، شبیه مسأله ۶۸b)، از ۱۰۰۱ بار عدد ۹ استفاده شده است. پنج رقم سمت راست این عدد را پیدا کنید.

۷۰. به ازای چه مقادارهایی از عدد طبیعی n ، عدد $n^5 + 5^n$ بر ۱۳ بخش پذیر است؟ حداقل مقدار n ، برای برقراری این شرط، چند است؟
۷۱. دو رقم آخر این عدد را پیدا کنید:

$$n^\alpha + (n+1)^\alpha + (n+2)^\alpha + \dots + (n+99)^\alpha$$

n ، عددی دلخواه درست و غیرمنفی است و

$$\alpha = 4 \quad (a)$$

$$\alpha = 8 \quad (b)$$

۷۲. ۱۰۰۰ رقم سمت راست این عدد را پیدا کنید

$$N = 1 + 50 + 50^2 + \dots + 50^{99}$$

۷۳. عدد M بر ۷ بخش پذیر است. ثابت کنید، اگر تعداد رقم‌های عدد M ، مضربی از ۶ باشد، آن گاه عدد N هم که با جابه‌جا کردن رقم‌های اول و آخر M به دست می‌آید، بر ۷ بخش پذیر می‌شود.

۷۴. حاصل ضرب عددهای از ۱ تا ۱۰۰، به چند صفر ختم می‌شود؟ اگر از نماد $n!$ استفاده کنیم:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)n$$

مسأله به این صورت درمی‌آید: عدد ۱۰۰! به چند صفر ختم می‌شود؟

۷۵. ثابت کنید، حاصل ضرب n عدد طبیعی متوالی، مضربی از $n!$ است.

(b) می‌دانیم $a + b + \dots + k \leq n$. ثابت کنید:

$$\frac{n!}{a!b!\dots k!}$$

عددی درست است.

(c) ثابت کنید $(n!)!$ بر $n!^{(n-1)!}$ بخش پذیر است.

(d*) ثابت کنید، حاصل ضرب n عدد درست که تشکیل يك تصاعد حسابی می‌دهند، به شرطی که قدر نسبت تصاعد نسبت به $n!$ اول باشد، بر $n!$ بخش پذیر است. (مسأله d، تعمیم مسأله a است.)

۷۶. آیا تعداد ترکیب‌های ۵۰۰ تایی از ۱۰۰۰ شیء، بر ۷ بخش پذیر است؟

۷۷. (a) همه عددهای n با شرط $1 < n < 100$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، $(n-1)!$ بر n بخش پذیر نباشد.

(b) با همان شرط $1 < n < 100$ ، عدد n را طوری پیدا کنید که، برای آن، $(n-1)!$ بر n^2 بخش پذیر نباشد.

۷۸*. همه عددهای درست n را پیدا کنید که بر عددهای درست کوچکتر از $\sqrt{n}$ بخش پذیر باشند.

۷۹. (a) ثابت کنید، مجموع مجذورهای پنج عدد درست متوالی، نمی‌تواند مجذور کامل باشد.

(b) ثابت کنید، مجموع توان‌های سه عدد درست متوالی، به شرطی که توان‌ها زوج و برابر باشند، نمی‌تواند برابر با توان زوج يك عدد درست باشد.

(c) ثابت کنید، مجموع توان‌های زوج ۹ عدد درست متوالی، نمی‌تواند برابر با توانی (بزرگتر از واحد) از يك عدد درست باشد.

۸۰. (a) A و B دو عدد هفت رقمی مختلف‌اند که، در هر کدام از آن‌ها، همه رقم‌های از ۱ تا ۷ وجود دارد. ثابت کنید، A نمی‌تواند مضربی از B باشد.

(b) با استفاده از همه رقم‌های ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی بنویسید که به نسبت ۱:۲:۳ باشند.

۸۱. مجذور يك عدد درست، به چهار رقم برابر ختم شده است. این چهار رقم را پیدا کنید.

۸۲. طول و عرض و قطر يك مستطیل، باعددهای درست بیان شده اند. ثابت کنید، عدد معرف مساحت مستطیل، بر ۱۲ بخش پذیر است.
۸۳. ثابت کنید، اگر ضریب های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- عددهایی فرد باشند، ریشه های معادله نمی توانند عددهایی گویا باشند.
۸۴. این مجموع را در نظر می گیریم (n) ، عددی است درست):

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

- ثابت کنید، بیان دهنده این عدد، يك كسر متناوب مرکب است.
۸۵. ثابت کنید، عبارت های

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad (a)$$

$$N = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m} \quad (b)$$

$$K = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} \quad (c)$$

- که در آن ها، m و n عددهایی درست و مثبت اند، نمی توانند برابر با عددی درست باشند.

۸۶. (a) ثابت کنید، كسر $\frac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$ ، به ازای هر عدد درست a ، تحویل ناپذیر است.

- (b) به ازای چه مقدارهایی از عدد طبیعی n ، كسر $\frac{5n+6}{8n+7}$ تحویل پذیر

است؟

۸۷. ۱۹۵۳ رقم را روی محیط دایره ای نوشته ایم. از يك رقم آغاز می کنیم و عدد ۱۹۵۳ رقمی که، در جهت حرکت عقربه های ساعت، به دست

می‌آید، در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، اگر این عدد مضربی از ۲۷ باشد، آن وقت هر عدد ۱۹۵۳ رقمی که از رقم دلخواهی آغاز شده باشد (و البته، در همان جهت)، مضربی از ۲۷ است.

۸۸. ثابت کنید، عدد درستی وجود دارد که بر 5^{1000} بخش پذیر باشد و در نمایش دهدهی آن، رقم صفر وجود نداشته باشد.

۸۹. ثابت کنید، همه عددهایی که به صورت زیر باشند، مرکب‌اند:

$$10001, 100010001, 1000100010001, \dots$$

۹۰. ثابت کنید، هر دو عدد دلخواه، از دنباله عددی زیر، نسبت به هم اول‌اند.

$$2+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1, 2^{16}+1, \dots, 2^{2^n}+1, \dots$$

یادداشت: از این مساله می‌توان نتیجه گرفت که، مجموعه عددهای اول نامتناهی است (در این باره، مساله‌های ۲۳۴ و ۳۴۹ را هم ببینید). اگر مجموعه عددهای اول متناهی بود، آن وقت نمی‌توانستیم بی‌نهایت عدد از بین آن‌ها انتخاب کنیم، به نحوی که نسبت به هم اول باشند.

۹۱. ثابت کنید، اگر یکی از عددهای $2^n - 1$ و $2^n + 1$ ($n > 2$) اول باشد، دیگری عددی مرکب است (به ازای $n = 2$ ، هر دو عدد اول‌اند).

۹۲. (a) ثابت کنید، اگر p و $8p - 1$ عددهایی اول باشند، آن وقت عدد $8p + 1$ مرکب است.

(b) ثابت کنید، اگر p و $8p^2 + 1$ عددهایی اول باشند، آن وقت $8p^2 - 1$ هم عددی اول است.

۹۳. ثابت کنید، مجذور هر عدد اول، به جز ۲ و ۳، در تقسیم بر ۱۲، به باقی مانده واحد می‌رسد.

۹۴. ثابت کنید، اگر سه عدد اول بزرگتر از ۳، به تصاعد حسابی باشند، آن وقت قدرنسبت این تصاعد، بر ۶ بخش پذیر است.

۹۵. (a) ۱۰ عدد اول، تشکیل یک تصاعد حسابی داده‌اند. اگر هر یک از این عددها، از ۳۰۰۰ کوچکتر باشد، آن‌ها را پیدا کنید.

(b) ثابت کنید، نمی‌توان ۱۱ عدد اول کوچکتر از ۲۰۰۰۰ پیدا کرد، به نحوی که به تصاعد حسابی باشند.

۹۶. (a) ثابت کنید، از بین هر ۵ عدد متوالی، همیشه می‌توان عددی را انتخاب کرد که نسبت به هریک از ۴ عدد دیگر اول باشد.

(b) ثابت کنید، از بین ۱۶ عدد درست مفروض، همواره می‌توان عددی را پیدا کرد که، نسبت به ۱۵ عدد دیگر، اول باشد.

۴. مسأله‌های گوناگون در حساب

۹۷. در عددنویسی به مبنای ۱۰، عدد A با ۶۶۶ رقم برابر ۳ و عدد B با ۶۶۶ رقم برابر ۶ نوشته شده‌اند. عدد AB از چه رقم‌هایی تشکیل شده است؟

۹۸. عدد A ، در عددنویسی به مبنای ۱۰، شامل ۱۰۰۱ رقم برابر ۷ است. خارج قسمت و باقی‌مانده را، در تقسیم عدد A بر ۱۰۰۱ پیدا کنید.

۹۹. کوچکترین عدد مجذور کامل را پیدا کنید که، نمایش آن در دستگاه دهدهی، با ۶ رقم برابر ۲ آغاز شود.

۱۰۰. آیا عددهای درست m و n وجود دارند، به نحوی که

$$m^2 = n^2 + 1954?$$

۱۰۱. سه رقم به سمت راست عدد ۵۲۳ طوری اضافه کنید که، عدد ۶ رقمی حاصل، بر ۷، ۸ و ۹ بخش پذیر باشد.

۱۰۲. عدد چهاررقمی پیدا کنید که، در تقسیم به عددهای ۱۳۱ و ۱۳۲، به ترتیب به باقی‌مانده‌های ۱۱۲ و ۹۸ برسد.

۱۰۳. (a) ثابت کنید، مجموع همه عددهای n رقمی ($n > 2$) برابر است با

$$\underbrace{49499 \dots 95500 \dots 0}_{\text{رقم } n-3} \underbrace{\quad}_{\text{رقم } n-2}$$

(مثلاً، مجموع همه عددهای سه رقمی، برابر است با ۴۹۴۵۵۰ و مجموع همه عددهای شش رقمی: ۴۹۴۹۹۵۵۰۰۰۰).

(b) همه عددهای چهار رقمی زوج را، با استفاده از رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نوشته‌ایم (تکرار رقم‌ها، مجاز است) مجموع همه این عددها را پیدا کنید.

۱۰۴. برای نوشتن عددهای از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰، به چند رقم و چه رقم‌هایی نیاز داریم؟

۱۰۵. همه عددهای درست متوالی را، از چپ به راست، پشت سر هم نوشته‌ایم، رقم ردیف ۲۰۶۷۸۸ را، با محاسبه از سمت چپ، پیدا کنید.

۱۰۶. عدد دهدهی ۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳... را در نظر بگیرید که، در آن، همه عددهای درست متوالی را، بعد از ممیز نوشته‌ایم. آیا این عدد، یک کسر دهدهی متناوب است؟

۱۰۷. به جای هریک از عددهای از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰، مجموع رقم‌های آن را قرار می‌دهیم (به این ترتیب، عددهای یک رقمی تغییر نمی‌کنند، درحالی که عددهای دیگر، به عددهایی کوچکتر از خود تبدیل می‌شود). سپس، دوباره، به جای هریک از عددهای حاصل، مجموع رقم‌های آن را می‌گذاریم و غیره. این روند را تا آن جا ادامه می‌دهیم که دنباله‌ای شامل ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ عدد یک رقمی به دست آید. آیا در بین عضوهای این دنباله، تعداد عضوهای برابر ۱ بیشتر از تعداد عضوهای برابر ۲ است؟

۱۰۸. (a) نمایش دهدهی یک عدد درست، تنها شامل تعدادی رقم‌های برابر و تعدادی رقم‌های برابر صفر است. آیا این عدد می‌تواند مجذور کامل باشد؟

(b) همین مساله را درباره عددی حل کنید که شامل همه رقم‌های از ۱ تا ۹ (و هر کدام تنها یک بار) است و رقم ۵ در انتهای سمت راست عدد قرار دارد.

۱۰۹. هریک از عددهای پنج رقمی از ۱۱۱۱۱ تا ۹۹۹۹۹ را روی

يك كارت نوشته‌ایم (روشن است که، تعداد این کارت‌ها برابر ۸۸۸۸۹ است). این کارت‌ها را، به ترتیب دلخواه، در يك سطر پشت سرهم قرار داده‌ایم؛ يك عدد ۴۴۴۴۵ رقمی به دست می‌آید ($88889 \times 5 = 44445$). ثابت کنید، این عدد، نمی‌تواند برابر توانی از ۲ باشد.

۰۱۱۰ در نمایش دهدهی عددی ۱۰ رقمی، رقم اول (رقم سمت چپ) برابر است با تعداد صفرهایی که در عدد مورد استفاده قرار گرفته است؛ رقم بعدی برابر با تعداد واحدهای به کار رفته در عدد است و غیره؛ آخرین رقم (رقم یکان) برابر است با تعداد رقم‌های ۹ که در نوشتن عدد مورد استفاده قرار گرفته است. همه این گونه عددهای ده رقمی را پیدا کنید.

۰۱۱۱ عدد ۹۹۹۹۹۹۹۹ را در چه عاملی باید ضرب کرد تا حاصل ضرب، تنها شامل رقم‌های برابر ۱ باشد؟

۰۱۱۲ A را عددی طبیعی می‌گیریم ثابت کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی N وجود دارد، به نحوی که در عددنویسی دهدهی تنها شامل رقم‌های ۱، ۲، ...، ۹ باشند (رقم صفر در این عددها وجود ندارد) و، در ضمن، مجموع رقم‌های عدد N با مجموع رقم‌های عدد AN برابر شود.*

۰۱۱۳ $a_1, a_2, \dots$ را همه عددهای درست و غیرمنفی می‌گیریم که، هر کدام از آن‌ها، بیش از n رقم ($n \geq 2$) در عددنویسی دهدهی ندارند و مجموع رقم‌های هریک، عددی زوج است. $b_1, b_2, b_3, \dots$ هم همه عددهای درست و غیرمنفی اند که، تعداد رقم‌های هریک، از n تجاوز نمی‌کند و، در ضمن، مجموع رقم‌های هریک، عددی فرد است. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $m < n$ داریم:

$$a_1^m + a_2^m + \dots = b_1^m + b_2^m + \dots$$

(*) تأکید مساله بر این که، رقم صفر در بین رقم‌های عدد N نیست، به این علت است که، اگر صفر را هم جزو رقم‌های عدد N بدانیم، کافی است يك عدد N با توجه به شرط‌های مساله پیدا کنیم، آن وقت هر چند صفر که در سمت راست N قرار دهیم، مجموع رقم‌ها در N و AN تغییر نمی‌کند.

آیا این حکم، برای $m \geq n$ هم درست است؟
 ۱۱۴. آرایش مثلثی عددها را، به این صورت در نظر می‌گیریم:

۱

۱ ۱ ۱

۱ ۲ ۳ ۲ ۱

۱ ۳ ۶ ۷ ۶ ۳ ۱

.....

که در آن، هر عدد برابر است با سه عدد در سطر قبلی که در بالا، سمت راست و سمت چپ آن، قرار دارند (مثلاً $۳ = ۱ + ۲$ ، $۶ = ۲ + ۲ + ۲$ ، $۷ = ۳ + ۲ + ۲$ ، ...). اگر در سطر بالا یکی یا دوتا از این سه عدد وجود نداشته باشد، آن را صفر به حساب می‌آوریم. ثابت کنید، با آغاز از سطر سوم، در هر سطر، عددی زوج وجود دارد.

۱۱۵. این آرایش مثلثی از عددها را در نظر می‌گیریم:

۱۹۵۸ ۱۹۵۷ ۱۹۵۶ ۱ ۲ ۳ ۰

۳۹۱۵ ۳۹۱۳ ۱ ۳ ۵

۷۸۲۸ ۴ ۸

.....

.....

که در آن، هر عدد (به جز عددهای سطر اول)، برابر است با مجموع دو عددی که در سطر بالا در سمت راست و سمت چپ آن قرار گرفته‌اند. ثابت کنید، عددی که در پایین‌ترین سطر این جدول قرار دارد، بر ۱۹۵۸ بخش پذیر است.
 ۱۱۶. فاصله بین دو ایستگاه A و B برابر با ۹۹۹ کیلومتر است. در هر کیلومتر از فاصله بین دو ایستگاه، در طول راه آهن، دیرک‌هایی نصب شده است که فاصله آن را از دو ایستگاه A و B ، به این ترتیب، نشان می‌دهند:

۰|۹۹۹، ۱|۹۹۸، ۲|۹۹۷، ...، ۹۹۹|۰

روی چندتا از این دیرك‌ها، تنها دو رقم متفاوت نوشته شده است؟
 ۱۱۷. از ساعت (ونه دقیقه‌ها)، برای آغاز چهار سانس (از هشت سانس) يك سینما اطلاع داریم:

سانس اول در ساعت ۱۲ و ... دقیقه،

سانس دوم، در ساعت ۱۳ و ... دقیقه،

.....

سانس هفتم، در ساعت ۲۳ و ... دقیقه،

سانس هشتم، در ساعت ۲۴ و ... دقیقه.

هر سانس دقیقاً در چه زمانی آغاز می‌شود؟

۱۱۸. اتوبوس در تمام طول شبانه‌روز از بزرگ راه عبور می‌کند. مسیر راه‌آهن، این بزرگ‌راه را قطع می‌کند. در هر ساعت دو قطار و درست در ساعت n و ساعت n و ۳۸ دقیقه به محل برخورد با بزرگ راه می‌رسند. وقتی قطار به تقاطع می‌رسد، به‌طور خودکار، مسیر عبور اتوبوس‌ها در بزرگ‌راه سد می‌شود. آیامی‌توان، برای حرکت اتوبوس‌ها برنامه‌ای تنظیم کرد، به نحوی که هر اتوبوس T دقیقه بعد از اتوبوس قبلی حرکت کند و، در ضمن، هیچ اتوبوسی، در تقاطع با راه‌آهن متوقف نشود؟ اگر بخواهیم، فاصله زمانی T ، از نیم ساعت تجاوز نکند، آیا تنظیم چنین برنامه‌ای ممکن است؟
 ۱۱۹. بزرگ‌ترین مقدار نسبت يك عدد سه‌رقمی، بر مجموع رقم‌های آن چقدر است؟

۱۲۰. ۱۰۰ رقم از عدد

۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴ ... ۹۷۹۸۹۹۱۰۰

را حذف کنید، به نحوی که، عدد حاصل: (a) بیشترین مقدار ممکن؛ (b) کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۲۱. با استفاده از رقم‌های ۱ تا ۹، سه عدد سه‌رقمی طوری بسازید که، حاصل ضرب آن‌ها: (a) کمترین مقدار ممکن؛ (b) بیشترین مقدار

ممکن باشد.

۱۲۲. مجموع چند عدد درست، متوالی و مثبت، برابر است با ۱۰۰۰. این عددها را پیدا کنید.

۱۲۳. (a) ثابت کنید، هر عدد درست و مثبت را که توانی از ۲ نباشد، می‌توان به صورت مجموع دست کم دو عدد درست متوالی نشان داد، ولی برای توان‌های ۲، چنین نمایشی وجود ندارد.

(b) ثابت کنید، هر عدد فرد مرکب را می‌توان به صورت مجموع دست کم دو عدد فرد متوالی نشان داد، ولی برای عدد اول، چنین نمایشی وجود ندارد. کدام عددهای زوج را می‌توان به صورت مجموع چند عدد فرد متوالی نشان داد؟

(c) ثابت کنید، هر توانی از عدد درست و مثبت n را (به شرطی که به توانی بزرگتر از واحد رسیده باشد) می‌توان به صورت مجموع n عدد فرد متوالی نوشت.

۱۲۴. ثابت کنید، اگر حاصل ضرب چهار عدد متوالی را با عدد ۱ جمع کنیم، يك مجذور کامل به دست می‌آید.

۱۲۵. به تعداد $4n$ عدد مثبت در اختیار داریم و می‌دانیم، هر چهار عدد مختلفی را که از بین آن‌ها انتخاب کنیم، تشکیل يك تصاعد هندسی می‌دهند. ثابت کنید، در بین این $4n$ عدد، n عدد برابر وجود دارد.

۱۲۶. ۲۷ وزنه، به ترتیب به وزن‌های $۱^۲$ ، $۲^۲$ ، $۳^۲$ ، ...، $۲۷^۲$ گرم در اختیار داریم. می‌خواهیم این وزنه‌ها را به سه گروه با وزن‌های برابر تقسیم کنیم.

۱۲۷. ۱۳ وزنه در اختیار داریم. وزن هر وزنه بر حسب گرم، با عدد درستی بیان می‌شود و می‌دانیم، هر ۱۲ وزنه را می‌توان طوری به دو گروه ۶ وزنه‌ای تقسیم کرد که وزن هر گروه با وزن گروه دیگر برابر باشد. ثابت کنید، وزن همهٔ وزنه‌ها یکی است.

۱۲۸. چهار عدد دلخواه a ، b ، c ، و d را در يك سطر نوشته‌ایم. سپس در زیر آن‌ها (در سطر دوم)، عددهای $a_1 = ab$ ، $b_1 = bc$ ، $c_1 = cd$ ، $d_1 = da$

را نوشته‌ایم زیر عددهای a_1, b_1, c_1 و d_1 (در سطر سوم)، عددهای $a_2 = a_1 b_1, b_2 = b_1 c_1, c_2 = c_1 d_1$ و $d_2 = d_1 a_1$ را نوشته‌ایم و غیره. ثابت کنید، گروه‌های چهار عددی که به این ترتیب به دست می‌آیند، یا دوه‌دو با هم اختلاف دارند و یا با آغاز از جایی، با هم برابر می‌شوند.

۱۲۹. مجموعه دلخواهی شامل N عدد را از عددهای $a_1, a_2, \dots, a_N$ در اختیار داریم و می‌دانیم، N برابر است با توانی از ۲ ($N = 2^k$) و هریک از این عددها برابر $1+$ یا $1-$ است. با استفاده از این مجموعه، مجموعه جدیدی تشکیل می‌دهیم که، برای عضوهای آن، داشته باشیم:

$$a'_1 = a_1 a_2, a'_2 = a_2 a_3, \dots, a'_{N-1} = a_{N-1} a_N, a'_N = a_N a_1$$

روشن است که، هر عضو مجموعه جدید هم، برابر $1+$ یا $1-$ است. با استفاده از عددهای $a'_1, a'_2, \dots, a'_N$ مجموعه شامل N عضو $a''_1, a''_2, \dots, a''_N$ را، با همان روش می‌سازیم و غیره. ثابت کنید، با ادامه این عمل، سرانجام به مجموعه‌ای می‌رسیم که، هر N عضو آن، برابر $1+$ است. ۱۳۰۰. $a_1, a_2, \dots, a_n$ را عددهایی درست می‌گیریم ($n > 2$). با استفاده از این عددها، دنباله جدیدی از عددها را، به این صورت می‌سازیم:

$$a'_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, a'_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, a'_{n-1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, a'_n = \frac{a_n + a_1}{2}$$

سپس، از دنباله اخیر، دنباله عددهای $a''_1, a''_2, \dots, a''_n$ را با همان روش می‌سازیم و غیره. ثابت کنید، اگر همه عددهایی که به این ترتیب به دست می‌آیند، عددهای درستی باشند، آن وقت

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

۱۳۱. $x=1$ ، و y و z را عددهایی دلخواه می‌گیریم. عددهای $|x-y|$ ، $|y-z|$ و $|z-x|$ را، به ترتیب، x_1, y_1 و z_1 می‌نامیم. به همین ترتیب، قدرمطلق تفاضل‌های دو به دوی عددهای x_1, y_1 و z_1 را با x_2, y_2 و z_2 نشان می‌دهیم:

$$x_2 = |x_1 - y_1|, y_2 = |y_1 - z_1|, z_2 = |z_1 - x_1|$$

سپس، با همین روش، عددهای x_3, y_3, z_3 را به دست می‌آوریم و غیره. می‌دانیم، به ازای مقداری از n ، سه عدد x_n, y_n و z_n همان سه عدد اولیه x, y و z درآمده‌اند. عددهای y و z را پیدا کنید.

۱۳۳۰ (a) چهار عدد درست و مثبت A, B, C و D را در نظر می‌گیریم. تفاضل‌های A و B, B و C, C و D, D و A را با A_1, B_1, C_1 و D_1 نشان می‌دهیم (هر بار، عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم کرده‌ایم). به همین ترتیب و با همین روش، عددهای A_2, B_2, C_2 و D_2 را به کمک عددهای A_1, B_1, C_1 و D_1 به دست می‌آوریم و غیره. ثابت کنید، اگر این عمل را ادامه دهیم، در جایی به چهار عدد برابر صفر می‌رسیم.

مثلاً، اگر از عددهای ۳۲، ۱، ۱۱۰ و ۷ آغاز کنیم، به ترتیب به دست می‌آید:

۳۲	۱	۱۱۰	۷
۳۱	۱۰۹	۱۰۳	۲۵
۷۸	۶	۷۸	۶
۷۲	۷۲	۷۲	۷۲
۰	۰	۰	۰

(b) آیا در حالتی که چهار عدد A, B, C و D عددهایی گویا (و نه الزاماً عددهایی درست) و مثبت باشند، باز هم حکم مسأله ۱۳۲ (a) درست است؟ اگر عددهای مثبت A, B, C و D گنگ باشند، به این پرسش چه پاسخی باید داد؟

۱۳۳۰ (a) عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را به صورت دنباله‌ای چنان مرتب کنید که اگر ۱۱ عدد را به تصادف انتخاب کنیم (لزومی ندارد، ۱۱ عدد متوالی دنباله باشند)، به دنباله‌ای از این ۱۱ عدد برسیم که صعودی یا نزولی نباشد.

(b) ثابت کنید، از هر دنباله‌ای شامل عددهای از ۱ تا ۱۰۱، همیشه

می‌توان ۱۱ عدد انتخاب کرد (لزومی ندارد که حتماً عددهای متوالی دنباله باشند)، که دنباله‌ای صعودی یا نزولی تشکیل دهند.

۰۱۳۴ (a) از بین ۲۰۰ عدد طبیعی متوالی ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰۰، به تعداد ۱۰۱ عدد را، به دلخواه انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، بین این ۱۰۱ عدد، دست کم دو عدد وجود دارد، به نحوی که یکی بر دیگری بخش پذیر باشد.

(b) از بین ۲۰۰ عدد طبیعی متوالی از ۱ تا ۲۰۰، صد عدد طوری انتخاب کنید، که در بین آنها، هیچ عددی پیدا نشود که بر عددی دیگر بخش پذیر باشد.

(c) ثابت کنید، اگر دست کم یکی از ۱۰۰ عدد طبیعی، که از ۲۰۰ تجاوز نمی‌کنند، کمتر از ۱۶ باشد، آن وقت در بین آن‌ها عددی پیدا می‌شود که بر عددی دیگر بخش پذیر است.

۰۱۳۵ ثابت کنید:

(a) از بین هر ۵۲ عدد درست، همیشه می‌توان دو عدد انتخاب کرد، به نحوی که یا مجموع و یا تفاضل آن‌ها، مضربی از ۱۰۰ باشد.

(b) در بین هر ۱۰۰ عدد درست، یا عددی وجود دارد که بر ۱۰۰ بخش پذیر است و یا چند عدد می‌توان پیدا کرد که، مجموع آن‌ها، مضربی از ۱۰۰ باشد.

(c) اگر عددهای مسأله (b) مثبت باشند، هر کدام از آن‌ها از ۱۰۰ تجاوز نکند، در ضمن، مجموعی برابر ۲۰۰ داشته باشند، آن وقت می‌توان چند عدد از بین آن‌ها انتخاب کرد، به نحوی که مجموعی برابر با ۱۰۰ داشته باشند.

(d*) از بین هر ۲۰۰ عدد درست، می‌توان ۱۰۰ عدد را طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش پذیر باشد.

۰۱۳۶ دنباله عددهای مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ غیر صعودی است. می‌دانیم مجموع همه جمله‌های این دنباله برابر واحد و بزرگترین جمله

دنباله برابر $\frac{1}{2k}$ است (k ، عددی است طبیعی):

$$\frac{1}{2k} = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

ثابت کنید، می‌توان k عدد دنباله را طوری انتخاب کرد که، کوچکترین آن‌ها از نصف بزرگترین عدد آن‌ها، بزرگتر باشد.

۱۳۷. روی محیط دایره‌ای، p علامت « $\times$ » و q علامت « $\circ$ » گذشته شده‌است. تعداد زوج علامت‌های « $\times$ » مجاور را a و تعداد زوج علامت‌های « $\circ$ » مجاور را b می‌گیریم (در هر از یک این زوج‌ها، دو علامت یکسان، مجاور یکدیگرند). ثابت کنید:

$$a - b = p - q$$

۱۳۸. دنباله $i_1, i_2, \dots, i_n$ از عددهای $1, 2, \dots, n$ را به‌ترتیبی دلخواه نوشته‌ایم. ثابت کنید، اگر n عددی زوج باشد، حاصل ضرب $(1 - i_1)(2 - i_2)(3 - i_3) \dots (n - i_n)$ می‌تواند زوج یا فرد باشد، ولی اگر n عددی فرد باشد، این حاصل ضرب همیشه عددی زوج است.

۱۳۹. n عدد $x_1, x_2, \dots, x_n$ مفروض است. هر یک از این عددها برابر است با $+1$ یا -1 . ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1 = 0$$

آن وقت، n مضربی است از ۴.

۱۴۰. ثابت کنید، مجموعه همه عددهای طبیعی را، که در نمایش دهدهی آن‌ها تنها از رقم‌های ۱ و ۲ استفاده شده است، می‌توان به‌دو گروه طوری تقسیم کرد که، نمایش دهدهی مجموع هر دو عدد متعلق به هر گروه، دست کم دو رقم برابر ۳ داشته باشد.

۱۴۱. پنج عدد ۱۰۰ رقمی داریم که، در نمایش دهدهی هر یک از آن‌ها، تنها از رقم‌های ۱ و ۲ استفاده شده است. از این پنج عدد، هر دو عدد دلخواه، در r مرتبه از ۱۰۰ مرتبه خود، رقم‌هایی یکسان دارند؛ ولی هر پنج عدد، در هیچ مرتبه‌ای، رقم‌های یکسان ندارند. ثابت کنید، این موقعیت تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $40 \leq r \leq 60$.

۱۴۲. دو مجموعه از علامت‌های « $+$ » و « $-$ » وجود دارد و، هر مجموعه، شامل ۱۹۵۸ علامت است. می‌توانیم، پشت سرهم، ۱۱ علامت

از مجموعه اول را به دلخواه انتخاب و آن‌ها را به علامت‌های مخالف خود تبدیل کنیم. ثابت کنید، بعد از چند مرحله، با تکرار این عمل، مجموعه اول، به مجموعه دوم تبدیل می‌شود (دوم مجموعه را وقتی برابر می‌گیریم که، در ردیف‌های برابر، علامت‌های یکسان وجود داشته باشد).

۱۴۳. يك شطرنج باز، هر روز دست كم يك دور بازی می‌کند، ولی مراقب است که در هر هفته، بیش از ۱۲ بازی نداشته باشد. ثابت کنید، تناوبی از چند روز متوالی وجود دارد که شطرنج باز در آن فاصله، درست ۲۵ دور بازی می‌کند.

۱۴۴. N را عددی درست و مثبت، ولی دلخواه، می‌گیریم. ثابت کنید، مضربی از N وجود دارد که، نمایش دهمی آن، تنها شامل رقم‌های ۰ و ۱ باشد. علاوه بر این ثابت کنید، اگر N نسبت به ۱۰ اول باشد (یعنی n بر ۲ یا ۵ بخش پذیر نباشد)، مضربی از N وجود دارد که، نمایش دهمی آن، تنها شامل رقم‌های ۱ است (روشن است که وقتی N و ۱۰ نسبت به هم اول نباشند، آن وقت عدد به صورت $\underbrace{11\dots1}_n$ نمی‌تواند مضربی از N باشد).

۱۴۵. دستگاهی از پاره‌خط‌های راست واقع بر محور عددها را پیدا کنید که نقطه مشترکی نداشته باشند، طول هر کدام برابر واحد باشد و، در ضمن، هر تصاعد حسابی نامتناهی (با جمله اول دلخواه و قدر نسبت دلخواه)، دست کم يك جمله داشته باشد که در درون یکی از پاره‌خط‌های متعلق به دستگاه قرار گیرد.

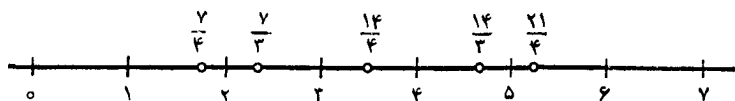
۱۴۶. m و n نسبت به هم اول اند. ثابت کنید، اگر هر يك از کسرهای

$$\frac{m+n}{m}, \frac{2(m+n)}{m}, \frac{3(m+n)}{m}, \dots, \frac{(m-1)(m+n)}{m};$$

$$\frac{m+n}{n}, \frac{2(m+n)}{n}, \frac{3(m+n)}{n}, \dots, \frac{(n-1)(m+n)}{n}$$

را به وسیله نقطه‌ای از محور عددها نشان دهیم، آن وقت هر يك از بازه‌های

$$(1, 2); (2, 3); (3, 4); \dots; (m+n-2, m+n-1)$$



شکل ۲

درست شامل یکی از این نقطه‌هاست (شکل ۲ را ببینید؛ در این شکل، حالت $m=4$ و $n=3$ نشان داده شده است).

عددهایی درست و مثبت‌اند. هریک از این عددها کوچکتر از ۱۰۰۰ و، کوچکترین مضرب مشترک هر دو عدد از آن‌ها، بزرگتر از ۱۰۰۰ است. ثابت کنید، مجموع عکس‌های عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ از ۲ کوچکتر است.

۱۴۸۰. کسر $\frac{q}{p}$ که در آن، p عددی اول غیر از ۲ و ۵ است، معرف یک کسر دهدهی نامتناهی است. ثابت کنید، اگر تعداد رقم‌های دوره تناوب، عددی زوج باشد، آن وقت واسطه حسابی همه رقم‌های دوره تناوب برابر است با $\frac{4}{5}$ (یعنی این واسطه حسابی، بر واسطه حسابی همه رقم‌های $1, 2, \dots, 9$ منطبق است). به این ترتیب، می‌توانیم حکم کنیم که، در این گونه کسرهای متناوب، «فراوانی» رقم‌ها، یکسان است. همچنین ثابت کنید، اگر تعداد رقم‌های دوره تناوب فرد باشد، آن وقت واسطه حسابی همه این رقم‌ها، حتماً عددی غیر از $\frac{4}{5}$ است.

۱۴۹۰. این کسرها را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p^2}, \frac{a_3}{p^3}, \dots, \frac{a_n}{p^n}$$

که در آن‌ها، p عددی است اول غیر از ۲ و ۵، و $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، عددهایی طبیعی و نسبت به p اول‌اند. این کسرها، معرف کسرهای دهدهی نامتناهی‌اند. ثابت کنید، چند کسر اول (و احتمالاً تنها یک کسر)، در تعداد رقم‌های دوره تناوب خود برابرند و، برای بقیه کسرها، تعداد رقم‌های دوره تناوب هر کسر، p برابر تعداد رقم‌های دوره تناوب کسر قبلی است.

$$\text{مثلاً } \frac{1}{3} = 0/(3) \quad , \frac{4}{9} = 0/(4) \quad , \frac{10}{27} = 0/(370)$$

$$\frac{80}{81} = 0/(987654220) \quad , \text{ کسر } \frac{116}{343} \text{ دارای دوره تناوبی شامل ۲۷ رقم}$$

$$\text{و کسر } \frac{653}{729} \text{ دارای دوره تناوبی شامل ۸۱ رقم است.}$$

۵. جواب‌های درست معادله

۱۵۰. a) عددی چهار رقمی پیدا کنید که مجذور کامل باشد و دو رقم سمت راست آن با هم و دو رقم سمت چپ آن با هم برابر باشند.

b) عددی دو رقمی را با عدد مقلوب خود جمع کرده‌ایم، يك مجذور کامل به دست آمده است (عدد $\overline{ba}$ مقلوب عدد $\overline{ab}$ است). همه این گونه عددهای دورقمی را پیدا کنید.

۱۵۱. عددی چهاررقمی پیدا کنید که مجذور کامل باشد؛ در ضمن اگر عدد دو رقمی سمت راست آن را با عدد دو رقمی سمت چپ آن جمع کنیم، عددی به دست آید که، مجذور آن، برابر با عدد چهار رقمی مطلوب شود. همه این گونه عددها را پیدا کنید.

۱۵۲. همه عددهای چهاررقمی مجذور کامل را پیدا کنید که در عددی نویسی دهدهی

a) دارای چهار رقم زوج باشند،

b) دارای چهار رقم فرد باشند.

۱۵۳. a) همه عددهای سه رقمی را پیدا کنید که با مجموع فاکتوریل‌های رقم‌های خود برابر باشند.

b) همه عددهای درست را پیدا کنید که برابر با مجموع مجذورهای رقم‌های خود باشند.

۱۵۴. همهٔ عددهای درستی را پیدا کنید که

(a) برابر با مجذور مجموع رقم‌های خود باشند؛

(b) برابر با مجموع رقم‌های مکعب خود باشند.

۱۵۵. جواب‌های درست این معادله‌ها را پیدا کنید

$$a) 1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$$

$$b) 1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$$

۱۵۶. به چند طریق می‌توان عدد 2^n را، به صورت مجموع مجذورهای

چهار عدد درست و مثبت نوشت؟

۱۵۷. (a) ثابت کنید، معادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

به جز $x = y = z = 0$ ، برای عددهای درست x و y و z ، جواب دیگری ندارد.

(b) عددهای درست x ، y ، z و v را پیدا کنید، به شرطی که

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 2xyzv$$

۱۵۸. (a) اگر x و y و z عددهایی درست باشند، به ازای چه عدد

درست k ، این برابری برقرار است:

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$$

(b) از بین هزار عدد درست نخستین، همهٔ سه‌تایی‌هایی را پیدا کنید

که، مجموع مجذورهای آنها، بر حاصل ضربشان بخش پذیر باشد.

۱۵۹. جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$$

۱۶۰. جواب‌های درست را در این معادله پیدا کنید:

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$$

۱۶۱. به ازای کدام عددهای درست و مثبت x و y داریم:

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$$

۱۶۲. جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}_{\text{به تعداد } y \text{ رادیکال}} = z$$

۱۶۳. ثابت کنید، معادله $x^2 + x + 1 = py$ ، برای بی‌نهایت عدد اول p ، جواب‌های درست دارد.

۱۶۴. چهار عدد درست مثبت پیدا کنید، به نحوی که اگر مجذور هر کدام را با سه عدد دیگر جمع کنیم، مجموع حاصل مجذور کامل باشد.

۱۶۵. دو عدد پیدا کنید که مجموع آن‌ها با حاصل ضربشان برابر باشد.

۱۶۶. سه عدد پیدا کنید که، مجموع عکس‌های آن‌ها، برابر واحد باشد.

۱۶۷. (a) ثابت کنید، معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ (x و y و n ، عددهای

طبیعی اند و $n > 1$)، برای هر عدد اول n درست سه جواب دارد (جواب به صورت $x=a, y=b$ ، در حالت $a \neq b$ ، با جواب $x=b, y=a$ متفاوت گرفته ایم)؛ و وقتی n عددی مرکب باشد، بیش از سه جواب دارد. (b) جواب‌های درست مسأله ۱۶۷، (a) را به ازای $n=14$ پیدا کنید.

(c*) دستوری کلی برای جواب‌های معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ به دست آورید (x, y و z عددهایی طبیعی اند).

۱۶۸. (a) همه عددهای درست x و y را، با شرط $x \neq y$ پیدا کنید، به شرطی که

$$x^y = y^x$$

(b) همه عددهای گویا و مثبت x و y را، با شرط $x \neq y$ ، برای معادله

$$x^y = y^x$$

پیدا کنید (برای جواب‌ها، دستوری کلی بنویسید).

۱۶۹. دو دانش‌آموز کلاس پنجم با چند دانش‌آموز کلاس ششم، در يك مسابقه شطرنج شرکت کرده‌اند. هردانش‌آموز با هردانش‌آموز دیگر، يك دوربازی کرده است. دو دانش‌آموز کلاس پنجم، روی هم، ۸ امتیاز کسب کردند؛ امتیاز هردانش‌آموز کلاس ششم با امتیاز هردانش‌آموز دیگری از آن کلاس، برابر شد (در هر مسابقه، برنده يك امتیاز، بازنده ۰ امتیاز و مساوی $\frac{1}{2}$ امتیاز دارد). از کلاس ششم، چند نفر در مسابقه شرکت کرده‌اند؟

۱۷۰. دانش‌آموزانی از کلاس‌های پنجم و ششم در يك مسابقه شطرنج شرکت کرده‌اند. هر شرکت‌کننده، يك بار با هريك از شرکت‌کنندگان دیگر، بازی کرده است. تعداد دانش‌آموزانی از کلاس ششم که در مسابقه شرکت داشتند، ۱۰ برابر تعداد دانش‌آموزانی از کلاس پنجم است که به مسابقه دعوت شده‌اند. تعداد امتیازهای دانش‌آموزان کلاس ششم، $\frac{4}{5}$ برابر تعداد امتیازهای دانش‌آموزان کلاس پنجم شد. از کلاس پنجم چند نفر در مسابقه شرکت کرده‌اند و چند امتیاز آورده‌اند؟

۱۷۱. مثلثی را که طول هريك از ضلع‌های آن عددی درست باشد، «مثلث درست» می‌نامیم. همه مثلث‌های درستی را پیدا کنید که، عدد محیط آن‌ها، با عدد مساحت آن‌ها، برابر باشد.

*

مسأله ۱۷۱، به بخشی از نظریه مربوط به جواب‌های درست معادله‌ها تعلق دارد که، در این جا، وارد بحث تفصیلی آن نمی‌شویم، چرا که بحثی بسیار گسترده است. مثلاً، این مسأله بسیار جالب درباره «مثلث‌های درست» وجود دارد که زاویه‌های آن‌ها، بر حسب درجه، مقسوم‌علیهی از زاویه ۳۶۰ درجه باشند؛ می‌توان ثابت کرد که، در يك مثلث درست، نمی‌توان زاویه‌هایی پیدا کرد که مقسوم‌علیهی از ۳۶۰ درجه و، در ضمن، غیر از ۶۰° ، ۹۰° یا ۱۲۰° باشند. این مسأله چندان دشواری نیست و، برای آن، می‌توان از

دستورهایی استفاده کرد که، طول ضلع‌های همه مثلث‌های درست را، با زاویه α برابر ۶۰، ۹۰ یا ۱۲۰ درجه، به دست می‌دهند (مثلث با زاویه ۹۰ درجه را، معمولاً مثلث فیثاغوری می‌نامند)، این مساله هم جالب است که، مثلث‌های درستی را پیدا کنیم که، در آن‌ها، دست کم نسبت دو زاویه، عددی معلوم باشد؛ مثلاً مثلثی که، در آن، یکی از زاویه‌ها، دو، سه، پنج یا شش برابر زاویه دیگر باشد. به عنوان نمونه، می‌توان ثابت کرد، کوچکترین مثلث درستی که، در آن، یکی از زاویه‌ها دو برابر زاویه دیگر باشد، مثلث با ضلع‌های به طول ۴، ۵ و ۶ است؛ همچنین، کوچکترین مثلث درستی که در آن، یکی از زاویه‌ها شش برابر زاویه دیگر باشد، مثلثی است با ضلع‌های به طول ۳۰۴۲۱، ۴۶۶۵۶ و ۷۲۹۳۰.

همچنین، جالب است که برای ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث درست، شرط‌هایی در نظر بگیریم. مثلاً به آسانی ثابت می‌شود که، بین مثلث‌های فیثاغوری، بی‌نهایت مثلث وجود دارد که، یکی از ضلع‌های آن (وتر یا یک ضلع مجاور به زاویه قائمه) مجذور یک عدد درست باشد، درحالی که نمی‌توان به مثلثی فیثاغوری دست یافت که، دو ضلع آن، مجذور کامل باشند. علاوه بر این، در بین مثلث‌های فیثاغوری که وتر آن‌ها مجذور کامل است، می‌توان بی‌نهایت مثلث پیدا کرد که مجموع دو ضلع مجاور به زاویه قائمه، در هر یک از آن‌ها، مجذور یک عدد درست باشد.

طول ضلع‌های چنین مثلث‌هایی، بسیار بزرگ است. فرما*، در سال ۱۶۴۳ ثابت کرد، طول ضلع‌های کوچکترین مثلث فیثاغوری با این شرط‌ها (یعنی وقتی که وتر و مجموع دو ضلع مجاور به زاویه قائمه، مجذورهای کاملی باشند)، چنین است:

$$a = 1061652293520$$

$$b = 4565486027761$$

$$c = 4687298610289$$

(* پیر فرما (Pierre de Fermat) ۱۶۰۲-۱۶۶۵)، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی و یکی از بنیان‌گذاران نظریه عددها.

۶. ماتریس‌ها، دنباله‌ها و تابع‌ها

ماتریس $m \times n$ (یا ماتریس m در n)، یک آرایش سادهٔ مستطیلی از عددهاست که شامل m سطر و n ستون باشد. در زیر نمونه‌هایی از ماتریس‌ها داده شده است: ماتریس 2×3 ، ماتریس 3×3 (یا ماتریس مربعی مرتبهٔ سوم)، ماتریس 4×1 و ماتریس 1×5 (ماتریس‌های $1 \times n$ و $m \times 1$ را بردار هم می‌گویند: اولی بردار سطری و دومی بردار ستونی):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -11 & 0 & 7 \\ 12 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$[10 \quad -9 \quad 8 \quad -7 \quad 6]$$

ماتریسی را درست گویند که، همهٔ عضوهای آن، عددهایی درست باشند. مثلاً، از ماتریس‌های بالا، ماتریس دوم و ماتریس چهارم درست‌اند (درحالی که ماتریس‌های اول و سوم درست نیستند). در این جا، از این جهت اشاره‌ای به اندیشهٔ ماتریس کردیم که، در تمامی ریاضیات، نقشی عمده به عهده دارد. مجموعه‌ای مرتب از عددهای درست را دنباله گویند:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

(اغلب با دنباله‌های نامتناهی سروکار داریم). برای مشخص بودن یک دنباله، باید از دستوری یا قاعده‌ای اطلاع داشته باشیم که، برطبق آن، جمله‌های $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ شکل گرفته‌اند. به کمک این قاعده، باید بتوان جملهٔ عمومی a_n را برحسب n محاسبه و یا مقدار a_n را پیدا کرد (یعنی a_n ، برای هر مقدار مشخص n ، در دسترس ما باشد). مثلاً در این فصل، به چند مساله برخورد می‌کنیم که به دنبالهٔ عددهای فیبوناچی مربوط می‌شوند*:

(*) لئوناردو فیبوناچی (Leonardo Fibonacci) یا لئوناردوی پیزایی (Leonardo de Pisa) (۱۱۸۰–۱۲۴۰) ریاضی‌دان برجستهٔ سده‌های میانهٔ اروپا.

(*) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$

(عضوهای این دنباله را، عددهای فیبوناچی گویند). آگوریتم یادستوری کلی که این دنباله را مشخص می‌کند، به این صورت است:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 2) \quad (**)$$

در ریاضیات، با دنباله‌هایی هم روبرو می‌شویم که شکل گیری عضوهای آن‌ها، از قاعده معینی پیروی نمی‌کنند (مساله ۱۹۲ را ببینید). به چنین دنباله‌هایی، دنباله‌های تصادفی گویند.

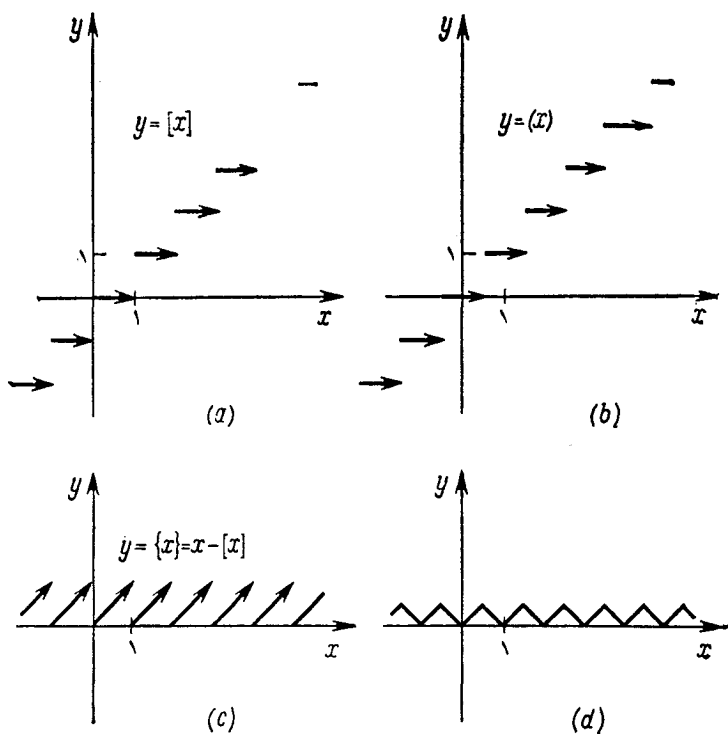
تابع $y = f(x)$ ، یعنی قانون $f: x \rightarrow y$ ، نگاشت مجموعه X از «مقدارهای قابل قبول» آوند x به توی مجموعه Y از مقدارهای تابع y ؛ در ضمن، هر مقدار $x \in X$ متناظر با مقدار منحصر به فردی از $y = f(x)$ است. در نظریه عددها، تابع‌هایی اهمیت دارند که در ارتباط با عددهای درست باشند، یعنی تابع‌هایی که، در آن‌ها، دامنه X و برد Y ، شامل عددهایی درست باشند. درحالتی که $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ ، مجموعه عددهای طبیعی است، آوند x را اغلب با حرف n نشان می‌دهند. در این حالت تابع $n \mapsto y(n)$ یا $n \mapsto a_n$ ، به صورت ساده‌ای تبدیل به دنباله $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ می‌شود، مثلاً، به فراوانی با تابعی برخورد می‌کنیم که، برد Y آن، شامل عددهایی درست است و آن را، تابع بخش درست x گویند و به صورت $[x]$ نشان می‌دهند: $[x]$ یعنی بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نمی‌کند (مثلاً: $[2/5] = 2$, $[4] = 4$, $[-3/2] = -4$ و غیره). مشابه با این تابع، تابع (x) است که برابر است با نزدیکترین عدد درست به x ، یعنی عدد درستی که، به ازای آن، قدر مطلق تفاضل بین آن و عدد x ، کمترین مقدار ممکن

(*) آگوریتم‌های دیگری هم، برای مشخص کردن دنباله عددهای فیبوناچی

وجود دارد. مثلاً

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

که جمله عمومی u_n را به طور مستقیم بر حسب n می‌دهد.



شکل ۳

باشد (درحالی که، این کمترین قدر مطلق تفاضل، برای دو عدد به دست آید، x) را برابر با بزرگترین آن‌ها می‌گیریم؛ مثلاً $(2/5) = 3$ ، $(4) = 4$ ، $(-3/2) = -3$ (و غیره). نمودارهای $y = (x)$ و $y = [x]$ در شکل‌های (a، ۳ و b، ۳) داده شده است که می‌توانید آن‌ها را باهم مقایسه کنید.

در بعضی از مسأله‌ها، به تابع $\{x\} = x - [x]$ برخورد می‌کنیم که تابع بخش‌کسری عدد x نام دارد (شکل ۳، c) را ببینید). شکل ۳، d) نمودار انحراف x را نسبت به نزدیک‌ترین عدد درست نشان می‌دهد. البته، در نظریهٔ عددها، نقش اصلی به عهدهٔ تابع‌های «حسابی خالص»

است، یعنی تابع‌هایی که، در آن‌ها، دامنه X و برد Y ، هر دو، شامل عددهایی درست باشند. بعضی از این گونه تابع‌ها را، که در مساله‌های این بخش با آن روبه‌رو می‌شویم، می‌آوریم: تعداد مقسوم‌علیه‌های $(n) = \tau_n$ از عدد طبیعی n ، مجموع $\sigma(n) = \sigma_n$ از مقسوم‌علیه‌های عدد طبیعی n و تابع موبیوس* $\mu(n)$ که با قانون زیر تعریف شده است: $\mu(1) = 1$ ، $\mu(n) = (-1)^k$ وقتی که $n = p_1 p_2 \dots p_k$ $p_1, p_2, \dots, p_k$ عددهایی اول و متمایزند، و به ازای همه بقیه عددهای درست و مثبت n ، که دست کم مضربی از یک مجذور کامل اند، $\mu(n) = 0$. ضمن حل مساله ۱۹۷، به تابع موبیوس برخورد می‌کنیم. این مطلب جالب است که، هر سه تابع $\tau(n)$ ، $\sigma(n)$ و $\mu(n)$ دارای ویژگی ضربی هستند، یعنی اگر $\varphi(n)$ را، یکی از این سه تابع بگیریم؛ اگر n_1 و n_2 دو عدد، طبیعی دلخواه و نسبت به هم اول باشند، آن وقت

$$\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1) \varphi(n_2)$$

در این بخش، مساله‌هایی انتخاب شده‌اند که هم از نظر مضمون و هم از نظر روش حل خود جالب وقائع‌کننده باشند. به خصوص در چند مساله با مجموعه نقطه‌هایی از صفحه برخورد می‌کنیم که، مختصات آن‌ها، عددهایی درست‌اند. این شیوه کاربرد مساله‌های نظریه عددها را، برای نخستین بار در کارهای منیکووسکی** و دورونوی*** می‌توان پیدا کرد.

۱۷۲. عددهای از ۱ تا n^2 ، در جدول مربعی زیر مرتب شده‌اند:

- (*) اوگوستوس فردیناند موبیوس (Augustus Ferdinand Mobius؛ ۱۷۹۵-۱۸۶۸)، ریاضی‌دان مشهور آلمانی، که علاقه اصلی او به هندسه بود.
- (**) هرمان مینکووسکی (Herman Minkowski؛ ۱۸۶۴-۱۹۰۶) ریاضی‌دان برجسته آلمانی که کارهای او در هندسه، فیزیک (نظریه نسبیت) و نظریه عددها مشهور است. او یکی از بنیان‌گذاران «نظریه هندسی عددها» است.
- (***) وورونوی (G. Voronoi؛ ۱۸۶۸-۱۹۰۸)، ریاضی‌دان برجسته روسی و یکی از بنیان‌گذاران «نظریه هندسی عددها».

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{bmatrix}$$

در این جدول، عددی انتخاب وسط و ستونی را که این عدد متعلق به آن‌هاست، حذف می‌کنیم. سپس از آرایش عددی باقی‌مانده، دوباره عددی را انتخاب وسط و ستون متعلق به آن را حذف می‌کنیم؛ این عمل را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که تنها یک عدد در جدول باقی بماند؛ عدد اخیر را هم به مجموعه عددهایی که تا کنون انتخاب کرده‌ایم اضافه می‌کنیم. مجموع همه این عددهای انتخابی را پیدا کنید.

۱۷۳. یک جدول مربعی با n^2 خانه را به وسیله عددهای درست از ۱ تا n پر کرده‌ایم. در هر سطر و هر ستون تمام عددهای از ۱ تا n وجود دارد. ثابت کنید، اگر جدول نسبت به قطری که گوشه بالا و سمت چپ را به گوشه پایین و سمت راست وصل می‌کند، متقارن باشد، آن وقت، به شرط فرد بودن عدد n ، همه عددهای از ۱ تا n روی این قطر وجود دارند. آیا این حکم در حالت زوج بودن عدد n درست است؟

۱۷۴. جدول مربعی $n \times n$ و عددهای ۱ تا n^2 را در اختیار داریم. عدد ۱ را در خانه‌ای دلخواه از جدول قرار می‌دهیم؛ بعد عدد ۲ را در خانه‌ای از سطری می‌گذاریم که شماره ردیف آن با شماره ردیف ستون شامل عدد ۱ برابر باشد؛ سپس عدد ۳ را در یکی از خانه‌های سطری قرار می‌دهیم که شماره ردیف آن با شماره ردیف ستون شامل عدد ۲ برابر باشد و غیره. تفاضل مجموع عددهای واقع در سطر شامل عدد ۱ و مجموع عددهای واقع در ستون شامل عدد n^2 را پیدا کنید.

۱۷۵. در خانه‌های جدولی مستطیلی با اندازه‌های $m \times n$ عددهایی قرارداده‌ایم. در هر گام می‌توانیم همه عددهای واقع در یک سطر یا همه عددهای واقع در یک ستون را تغییر علامت بدهیم. ثابت کنید بعد از چند گام به جدولی

می‌رسیم که، در آن، مجموع عددهای واقع در هر سطر و مجموع عددهای واقع در هر ستون، عددی غیرمنفی است:

۱۲۶. ۸۰۰۰ عدد را طوری نوشته‌ایم که جدولی مستطیلی شامل ۱۰۰ سطر و ۸۰ ستون را تشکیل داده‌اند؛ در ضمن، حاصل ضرب مجموع همه عددهای متعلق به يك ستون در مجموع همه عددهای متعلق به يك سطر، برابر با عددی شده است که در محل برخورد این سطر و ستون قرار گرفته است. می‌دانیم، عدد واقع در گوشه راست و بالای جدول، عددی مثبت است. مجموع همه عددهای این جدول را پیدا کنید.

۱۲۷. ۶۴ عدد غیرمنفی و به مجموع ۱۹۵۶ را، در ۶۴ خانه صفحه شطرنجی نوشته‌ایم. می‌دانیم، مجموع همه عددهای متعلق به هر يك از دو قطر صفحه شطرنج برابر است با ۱۱۲ و هر دو عددی که در دو خانه متقارن نسبت به یکی از قطرهای قرار دارند، با هم برابرند. ثابت کنید، مجموع عددهای واقع در هر سطر و یا هر ستون صفحه شطرنج، از ۵۱۸ بیشتر نیست.

۱۲۸. در خانه‌های يك صفحه شطرنجی $n \times n$ عددهایی را نوشته‌ایم و می‌دانیم، اگر n رخ را به ترتیبی در خانه‌های صفحه قرار دهیم که، هیچ دو رخی، یکدیگر را تهدید نکنند، مجموع عددهای واقع در خانه‌هایی که به وسیله رخ‌ها اشغال شده است، مقداری است ثابت. a_{ij} را عددی می‌گیریم که در خانه محل برخورد سطر i ام و ستون j ام قرار دارد. ثابت کنید، دو مجموعه از عددهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $y_1, y_2, \dots, y_n$ وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم: $a_{ij} = x_i + y_j$.

۱۲۹. در خانه‌های يك صفحه شطرنجی $n \times n$ ، عددهایی نوشته‌ایم. x_{pq} را عددی می‌گیریم که در خانه محل برخورد سطر p ام و ستون q ام واقع باشد. ثابت کنید، اگر برای هر i و j و k ($1 \leq i, j, k \leq n$)، اتحاد $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ برقرار باشد، آن گاه n عدد $t_1, t_2, \dots, t_n$ وجود دارند، به نحوی که

$$x_{ij} = t_i - t_j$$

۱۸۰. در بعضی از خانه‌های يك صفحه شطرنجی $n \times n$ ، ستاره‌هایی (و در هر خانه، يك ستاره) گذاشته‌ایم. می‌دانیم، اگر تعدادی از سطرها (و

البته، نه همه آن‌ها را) حذف کنیم، ستونی باقی می‌ماند که درست شامل يك ستاره است (که حذف نشده است). در حالت خاصی هم که، هیچ يك از سطرها را حذف نکرده‌ایم، باز هم ستونی وجود دارد که درست شامل يك ستاره است. ثابت کنید، اگر به تعداد دلخواهی، ستون‌ها را حذف کنیم (و البته، نه همه آن‌ها را)، آن وقت سطری باقی می‌ماند که درست شامل يك ستاره حذف نشده است.

۱۸۱* در یکی از خانه‌های صفحه شطرنجی $n \times n$ ، علامت «—» و درهمه خانه‌های دیگر آن، علامت «+» گذاشته‌ایم. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

(الف) $n = 4$ و علامت «—» در خانه‌های مجاور يك ضلع صفحه، و نه در یکی از گوشه‌ها، قرار دارد؛

(ب) $n = 8$ و علامت «—» در یکی از خانه‌ها، غیر از چهارخانه گوشه‌ای واقع است.

می‌توانیم، به‌طور هم‌زمان، همه خانه‌های متعلق به يك سطر یا يك ستون و یا يك «خط مایل» موازی یکی از دو قطر صفحه را (که در حالت خاص می‌تواند یکی از دو قطر یا یکی از مربع‌های گوشه‌ای باشد) تغییر علامت دهیم. ثابت کنید: با این گونه تغییر علامت‌ها، نمی‌توانیم خود را از دست علامت «—» خلاص کنیم، یعنی به جدولی برسیم که، درهمه خانه‌های آن، علامت «+» وجود داشته باشد.

۱۸۲. (الف) درهمه خانه‌های يك صفحه شطرنجی 8×8 ، علامت‌های «+» و «—» گذاشته‌ایم. در هر گام می‌توانیم مربعی 3×3 یا 4×4 (که ضلع‌هایی موازی ضلع‌های جدول اصلی دارد) انتخاب، و همه علامت‌های واقع در خانه‌های آن را تغییر دهیم. می‌خواهیم، با انجام گام‌های متوالی از این گونه، به جدولی برسیم که، درهمه خانه‌های آن، علامت «+» وجود داشته باشد. آیا همیشه می‌توان به این هدف رسید؟

(ب) عددهایی طبیعی را در خانه‌های يك صفحه شطرنجی معمولی (8×8) نوشته‌ایم. می‌توانیم در هر گام، به همه عددهای واقع در خانه‌های

یک مربع 2×2 ، یا به عددهای هردو خانه مجاور هم در سطرها یا ستون‌های کناری جدول، یک واحد اضافه کنیم. آیا ممکن است، با تکرار این عمل، به حالتی برسیم که، همه عددهای جدول، مضربی از ۱۰ باشند؟

۰۱۸۳ الف) سه مجموعهٔ توپ وجود دارد. می‌توانیم در هر گام، به‌طور هم‌زمان، از هر مجموعه یک توپ را برداریم، یا تعداد توپ‌های یکی از مجموعه‌ها را دو برابر کنیم. آیا ممکن است با برداشتن چند گام، تعداد توپ‌ها، در سه مجموعه، با هم برابر شود؟

ب) در خانه‌های یک جدول مستطیلی شامل ۸ سطر و ۵ ستون، عددهایی طبیعی نوشته‌ایم. در هر گام می‌توانیم عددهای واقع در یک ستون را دو برابر و یا از عددهای واقع در یک سطر، یک واحد کم کنیم. ثابت کنید، می‌توان با برداشتن چند گام، به جدولی رسید که در همهٔ خانه‌های آن، عدد صفر وجود داشته باشد.

۰۱۸۴ جدولی شامل دو ستون و چند سطر، به‌ترتیب زیر، از عددهای درست و مثبت پر شده است. در سطر بالا، دو عدد درست و مثبت دلخواه a و

b را نوشته‌ایم. اگر a عددی زوج باشد، زیر آن، عدد $a_1 = \frac{a}{2}$ و اگر a

عددی فرد باشد، زیر آن عدد $\frac{a-1}{2}$ را می‌نویسیم؛ و در هر حال، زیر عدد

b ، عدد $b_1 = 2b$ را قرار می‌دهیم. برای عددهای سطر سوم هم، به همین ترتیب

عمل می‌کنیم، یعنی اگر a_1 زوج باشد $a_2 = \frac{a_1}{2}$ ، و اگر a_1 فرد باشد

$a_2 = \frac{a_1-1}{2}$ ؛ و در هر حال $b_2 = 2b_1$. با همین روش عددهای a_3 و b_3 را

زیر عددهای a_2 و b_2 می‌نویسیم و غیره. عمل را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که

به عدد $a_n = 1$ برسیم (متناظر با $b_n = 2b_{n-1} - 1$). ثابت کنید، مجموع همهٔ

عددهای b_i در ستون سمت راست، که متناظر با عددهای فرد a_i باشند، برابر

است با حاصل ضرب ab .

۱۸۵. ثابت کنید، هر عدد طبیعی، یا برابر است با یکی از عددهای دنباله فیبوناچی، و یا برابر است با مجموعی از چند عضو دنباله فیبوناچی.

۱۸۶. ثابت کنید، نمی‌توان ۸ عدد متوالی از دنباله فیبوناچی را پیدا کرد، به نحوی که مجموع آن‌ها، خود عددی از دنباله فیبوناچی باشد.

۱۸۷. ثابت کنید، اگر n مضربی از ۵ باشد، آن وقت u_n ، یعنی n امین جمله دنباله فیبوناچی هم، مضربی از ۵ خواهد بود.

۱۸۸. آیا در بین ۱۰۰۰۰۰۰۰۱ جمله نخستین دنباله فیبوناچی، می‌توان عددی پیدا کرد که، نمایش دهدهی آن، به چهار رقم برابر ۰ ختم شده باشد؟

۱۸۹. برای دنباله عددی $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، می‌دانیم:

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \quad (n > 1)$$

ثابت کنید: $14 < a_{100} < 18$.

۱۹۰. برای دنباله عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ داریم:

$$a_1 = 0, \quad |a_2| = |a_1 + 1|, \quad |a_3| = |a_2 + 1|, \quad \dots, \quad |a_n| = |a_{n-1} + 1|$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{1}{4}$$

ثابت کنید.

۱۹۱. برای دنباله عددهای طبیعی $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ داریم:

$$a_0, a_1, a_2 = |a_0 - a_1|, \quad a_3 = |a_1 - a_2|, \dots$$

$$\dots, \quad a_n = |a_{n-2} - a_{n-1}|, \dots$$

عضوهای دنباله را پشت سرهم به دست آورده‌ایم تا به نخستین صفر برسیم. می‌دانیم، هر یک از عددهای دنباله، از ۱۹۶۷ تجاوز نمی‌کند. بیشترین تعداد جمله‌ها را، که ممکن است در این دنباله وجود داشته باشد، پیدا کنید.

۱۹۲. دنباله نامتناهی رقم‌های $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots$ داده شده است، به نحوی که هر یک از رقم‌ها (که در مبنای دهدهی به حساب آمده است) می‌تواند هر

رقم دلخواهی به جز ۹ باشد. ثابت کنید، از بین عددهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ بی‌نهایت عدد مرکب (غیر اول) وجود دارد (منظور از $a_1 a_2 a_3 \dots$ عددی سه رقمی است با رقم‌های a_1, a_2 و a_3 ، یعنی عددی برابر با $100a_1 + 10a_2 + a_3$).
 ۱۹۳. در دنباله عددی $1975, \dots$ ، هر عدد با آغاز از عدد پنجم، برابر است با رقم سمت راست مجموع چهار رقم قبلی (محاسبه، درمبنای دهدهی است.) آیا ممکن است

(الف) این دنباله، شامل چهار رقم متوالی ۱۲۳۴ باشد؟
 (ب) در این دنباله، چهار رقم ۱۹۷۵، به همین ردیف، دوباره تکرار شود؟
 ۱۹۴. همه عددهای درست و مثبت مضرب ۹، به صورت دنباله‌ای نوشته شده‌اند:

$$(*) \quad 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, \dots$$

برای هر کدام از این عددها، مجموع رقم‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$(**) \quad 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, \dots$$

در کجای دنباله $(**)$ ، برای نخستین بار، عدد ۸۱ ظاهر می‌شود؟ در این دنباله، عدد بلافاصله بعد از نخستین ۸۱ چیست؟

قبل از آن که چهار عدد متوالی ۲۷ یا سه عدد متوالی ۳۶ در این دنباله ظاهر شود، چه عددی قرار دارد؟

درباره دنباله $(**)$ چه چیز دیگری می‌توانید بگویید؟



۱۹۵. دنباله‌ای شامل عددهای طبیعی را، به این صورت در نظر می‌گیریم. I_0 ، نخستین عدد دنباله، شامل دو واحد است: ۱، ۰۱، سپس، عدد I_1 به این ترتیب به دست آمده است: بین عددهای تشکیل دهنده I_0 ، مجموع آن‌ها، یعنی $2 = 1 + 1$ قرار گرفته است، بنابراین I_1 شامل عددهای ۱ و ۲ است. بعد بین هر دو عدد مربوط به I_1 ، مجموع آن‌ها را قرار می‌دهیم تا عدد I_2 پیدا شود؛ I_2 شامل عددهای ۱، ۳، ۲، ۳، ۱ است، همین عمل را در مورد I_2 تکرار می‌کنیم تا I_3 به دست آید:

$$I_3: ۱, ۴, ۳, ۵, ۲, ۵, ۳, ۴$$

اگر این عمل را ادامه دهیم تا به $I_{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ (جمله يك ميليونيم دنباله) برسیم، در آن‌جا، عدد ۱۹۷۳ چندبار تکرار می‌شود؟

۱۹۶. دنباله‌ای متناهی از صفرها و واحدها در اختیار داریم و می‌دانیم، اگر دو گروه شامل پنج رقم متوالی را، از هر جای دنباله جدا کنیم، متفاوت با هم از آب درمی‌آیند. البته در دو گروه انتخابی، ممکن است تعداد صفرها با هم و تعداد واحدها با هم برابر باشند، ولی ردیف آن‌ها با هم فرق کند. مثلاً در دنباله

$$\overbrace{\dots ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ ۱ \dots}$$

در دو گروه پنج رقمی ۰۱۰۱۱ و ۰۱۱۰۱، هم تعداد صفرها با هم برابر است و هم تعداد واحدها، در حالی که دو گروه برهم منطبق نیستند. ثابت کنید، اگر این دنباله، با رعایت شرط بالا درجایی قطع شود، یعنی نتوان آن را ادامه داد، آن وقت چهار رقم اول دنباله، بر چهار رقم آخر آن منطبق است.

۱۹۷. همه مقسوم‌علیه‌های عدد

$$N = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۷ \times ۱۹ \times \\ \times ۲۳ \times ۲۹ \times ۳۱ \times ۳۷$$

را در يك سطر می‌نویسیم. سپس، زیرا ۱ و زیر همه مقسوم‌علیه‌هایی که از ضرب تعداد زوجی عامل اول به دست آمده‌اند، عدد ۱ + و زیر همه مقسوم‌علیه‌هایی که از ضرب تعداد فردی عامل اول به دست آمده‌اند، عدد ۱ - را می‌نویسیم. ثابت کنید، مجموع همه عددهای واقع در سطر دوم، برابر صفر است.

۱۹۸. دو عدد p و q نسبت به هم اول‌اند. عدد n را «خوب» می‌نامیم، به شرطی که بتوان آن را به صورت $px + qy$ نوشت (x و y ، عددهایی درست و غیر منفی‌اند)؛ در غیر این صورت، عدد را «بد» می‌نامیم.

الف) ثابت کنید عدد A وجود دارد، به نحوی که اگر آن را برابر مجموع دو عدد درست بگیریم، یکی از آن دو عدد، عددی «خوب» و دیگری عددی «بد» است.

ب) اگر دو عدد p و q ، که نسبت به هم اول اند، مفروض باشند، تعداد همه عددهای طبیعی را پیدا کنید که، در رابطه با p و q ، عددهایی «بد» باشند.



۱۹۹. ثابت کنید، اگر n عددی درست و غیرمنفی باشد، آن وقت n را به صورتی منحصر به فرد، می توان به شکل

$$n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$$

نشان داد (x و y ، عددهایی درست و غیرمنفی اند).

۲۰۰. t را عددی مثبت می گیریم و فرض می کنیم $d(t)$ به معنای تعداد

همه کسرهای تحویل ناپذیری باشد که به صورت $\frac{p}{q}$ اند و، در ضمن، p و q از t تجاوز نمی کنند. مجموع زیر را پیدا کنید:

$$S = d\left(\frac{100}{1}\right) + d\left(\frac{100}{2}\right) + d\left(\frac{100}{3}\right) + \dots + d\left(\frac{100}{99}\right) + d\left(\frac{100}{100}\right)$$

۲۰۱. این ویژگی ها را برای بخشی درست عدد ثابت کنید:

$$۱) [x+y] \geq [x] + [y];$$

$$۲) \left[\frac{[x]}{n} \right] = \left[\frac{x}{n} \right] \quad (n, \text{ عددی است درست});$$

$$۳) \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x];$$

$$۴) [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx]$$

۲۰۲. این عبارت را ساده کنید:

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{4} \right] + \left[\frac{n+4}{8} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots$$

(n ، عددی است درست و مثبت).

۲۰۳. p و q دو عدد درست و نسبت به هم اول اند. ثابت کنید:

$$\left[\frac{p}{q} \right] + \left[\frac{2p}{q} \right] + \left[\frac{3p}{q} \right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q} \right] = \left[\frac{q}{p} \right] + \left[\frac{2q}{p} \right] + \left[\frac{3q}{p} \right] + \dots + \left[\frac{(p-1)q}{p} \right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

۲۰۴. ثابت کنید:

$$\text{الف) } \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n = \left[\frac{n}{1} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n} \right]$$

که در آن، n عددی است طبیعی و τ_n عبارت است از تعداد مقسوم علیه‌های عدد n .

$$\text{ب) } \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_n = \left[\frac{n}{1} \right] + 2 \left[\frac{n}{2} \right] + 3 \left[\frac{n}{3} \right] + \dots + n \left[\frac{n}{n} \right]$$

که در آن، n عددی طبیعی و σ_n مجموع مقسوم علیه‌های عدد n است.

۲۰۵. آیا عدد درست و مثبت n وجود دارد، به نحوی که بخش کسری

عدد $(2 + \sqrt{2})^n$ از $0/999999$ بزرگتر باشد، یعنی

$$\{(2 + \sqrt{2})^n\} = (2 + \sqrt{2})^n - [(2 + \sqrt{2})^n] > 0/999999$$

۲۰۶. الف) ثابت کنید، به ازای هر عدد درست و مثبت n ، $[(2 + \sqrt{3})^n]$ ،

عددی است فرد.

(ب) بزرگترین توان عدد ۲ را پیدا کنید، به نحوی که عدد $[(1+\sqrt{3})^n]$ بر آن، بخش پذیر باشد.

$p \cdot 207$ عددی است اول و بزرگتر از ۲. ثابت کنید عدد

$$[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$$

بر p بخش پذیر است.

$p \cdot 208$ عددی است اول. ثابت کنید عدد

$$C(n, p) - \left[\frac{n}{p} \right]$$

بر p بخش پذیر است؛ n عدد درستی است که از p کمتر نیست و $C(n, p)$ تعداد ترکیب‌های p به n از n عنصر است (برای ترکیب‌های p به p از n عنصر، علاوه بر نماد $C(n, p)$ ، از نمادهای C_n^p ، و یا C_p^n هم استفاده می‌کنند). مثلاً

$$C(11, 5) = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 462$$

و $C(11, 5) - \left[\frac{11}{5} \right] = 462 - 2 = 460$ بر ۵ بخش پذیر است.

۲۰۹. همه عددهای α را پیدا کنید، به نحوی که عددهای $[\alpha]$ ، $[2\alpha]$ ، $\dots$ ، $[N\alpha]$ (عدد طبیعی ثابتی است) همگی با هم فرق داشته

باشند و، همچنین، همه عددهای $\left[\frac{1}{\alpha} \right]$ ، $\left[\frac{2}{\alpha} \right]$ ، $\dots$ ، $\left[\frac{N}{\alpha} \right]$ هم، متمایز باشند.

در مسأله ۲۰۹ از ما خواسته‌اند، عدد α را طوری پیدا کنیم که عددهای

$[\alpha]$ ، $[2\alpha]$ ، $\dots$ ، $[N\alpha]$ و، همچنین، عددهای $[\beta]$ ، $[2\beta]$ ، $\dots$ ، $[N\beta]$ ،

با شرط $\beta = \frac{1}{\alpha}$ با هم فرق داشته باشند. مساله‌های شبیه مسأله ۲۰۹، ولی

خیلی پیچیده‌تر از آن، وجود دارد: عددهای α و β را طوری پیدا کنید (لزومی

ندارد α و β عکس یکدیگر باشند) که دنباله‌های نامتناهی

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \dots \text{ و } [\beta], [2\beta], [3\beta], \dots$$

عضوهائی دوبه‌دو متمایز داشته باشند.

می‌توان ثابت کرد که این دنباله‌ها، شامل همهٔ عددهای طبیعی اند و هر عدد طبیعی، درست یکبار در این دنباله‌ها ظاهر می‌شود، به شرطی که α عددی

$$\text{گنگ باشد و، در ضمن، داشته باشیم: } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

۲۱۰°. ثابت کنید، در برابری

$$N = \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{8} + \dots + \frac{N}{2^n} + \dots$$

(N ، عددی است درست و مثبت)، می‌توان همهٔ کسرهای N را با نزدیکترین عددهای درست به آن‌ها، عوض کرد:

$$N = \left(\frac{N}{2}\right) + \left(\frac{N}{4}\right) + \left(\frac{N}{8}\right) + \dots + \left(\frac{N}{2^n}\right) + \dots$$

(دربارهٔ این نماد و نمادهای دیگر، صفحه‌های ۴۵ و ۴۶ را ببینید.)

۷. برآورد مجموع‌ها و حاصل ضرب‌ها

۲۱۱. عدد 2^{100} در عددنویسی به مبنای ۱۰، چند رقم دارد؟

۲۱۲. ثابت کنید:

$$\text{الف) } \frac{1}{15} < \frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{12}$$

(روشن است که نابرابری ب)، نسبت به نابرابری الف)، قوی‌تر است).

۲۱۳. کدام بزرگترند: 3111 یا 1714 ؟

۲۱۴. کدام بزرگترند:

(الف) $A = 2^{2^{2^{\dots^2}}}$ یا $B = 3^{3^{3^{\dots^3}}}$ (در A ، ۱۰۰۱ بار ۲ و در B ،

۱۰۰۰ بار ۳ تکرار شده است)؟

(ب) عدد B (در بخش الف) یا $C = 4^{4^{4^{\dots^4}}}$ (عدد C شامل ۹۹۹ عدد ۴ است)؟

در این مساله منظور از $a_1^{a_2^{a_3^{\dots^{a_{n-1}^{a_n}}}}}$ عبارت است از $a_1 \left(\left(\left(\dots \left(a_{n-1}^{a_n} \right) \right) \right) \right)$

۲۱۵. n عددی طبیعی است. ثابت کنید، در عددنویسی به مبنای ۱۰،

تعداد رقم‌های عدد 1974^n با تعداد رقم‌های $2^n + 1974^n$ یکی است.

۲۱۶. m و n عددهایی طبیعی اند. از بین تفاضل‌های به صورت $5^n - 36^m$ ،

آن را پیدا کنید که کمترین قدر مطلق ممکن را داشته باشد.

۲۱۷. ثابت کنید:

$$\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C(100, 50) < \frac{2^{100}}{10}$$

منظور از $C(100, 50)$ ، تعداد ترکیب‌های ۵۰ به ۵۰ از ۱۰۰ عنصر است.

۲۱۸. n عددی است درست و مثبت. از دو عدد زیر، کدام بزرگترند:

$$101^n \text{ یا } 99^n + 100^n$$

۲۱۹. کدام بزرگترند: 1003^{30} یا $300!$ ؟

۲۲۰. ثابت کنید، برای هر عدد درست و مثبت n ، داریم:

$$r < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < r$$

۲۲۱. کدام بزرگترند: $100000(1/00000)$ یا ۲؟

۲۲۲. کدام يك از دو عدد $۱۰۰۰^{۱۰۰۰}$ و $۱۰۰۱^{۹۹۹}$ بزرگترند؟

۲۲۳. ثابت کنید، برای هر عدد درست $n \geq 6$ ، داریم:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

۲۲۴۰. ثابت کنید، اگر m و n عددهای درست و مثبتی باشند، برای

هر $m > n$ داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (\text{الف})$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27} > 2\frac{1}{3}, \text{ و } \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = \text{مثلاً}$$

(ب) $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ، به شرط $n \geq 2$

مثلاً $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$ و

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{259}{81} = 3\frac{13}{81} < 3\frac{3}{8}$$

یادداشت. از بخش الف) مسأله ۲۱۴ نتیجه می‌شود که در دنباله‌های

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

هر عدد، از عدد قبلی بزرگتر است. از طرف دیگر، هیچ کدام از این عددها از

۳ بزرگترین است (مسأله ۲۲۰ را ببینید). بنابراین، عبارت $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ، وقتی

n به سمت بی نهایت میل کند، به سمت حد معینی نزدیک می شود (روشن است

که، این حد، عددی است بین ۲ و ۳). اگر این حد را با نماد e نشان دهیم، مقدار تقریبی آن تا ۱۵ رقم دهدهی چنین است:

$$e = 2.718281828459045$$

به همین ترتیب، از بخش ب) مساله ۲۲۴ نتیجه می شود که در دنباله

عددی

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \dots$$

هر جمله، از جمله قبلی کوچکتر است؛ از آن جا که، هر جمله دنباله، از واحد بزرگتر است، می توان نتیجه گرفت که، وقتی n به سمت بی نهایت میل کند، عبارت

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ، به سمت حدمعینی نزدیک می شود. در ضمن، جمله های دنباله

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به سمت جمله های متناظر دنباله دوم میل می کنند، زیرا

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1 + \frac{1}{n}$$

اختلاف بین نسبت و عدد ۱، برابر است با $\frac{1}{n}$ و این مقدار

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، کاهش می یابد. بنابراین، حد دنباله اخیر هم باید همان عدد e باشد.

عدد e ، نقش مهمی در ریاضیات دارد و در بسیاری از مساله ها، با آن

رو به رو می شویم (مثلاً مساله ۲۲۵ یا مساله های ۲۳۱ و ۲۳۴ را ببینید).

۲۲۵. ثابت کنید، برای هر عدد درست بزرگتر از شش، داریم:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

که در آن $e = 2/81828 \dots$ عبارت از حد $(1 + \frac{1}{n})^n$ ، وقتی n به سمت بی نهایت میل کند.

این حکم، حکم مساله ۲۲۳ را تقویت می کند. از این جا، به خصوص، نتیجه می شود که برای هر دو عدد مفروض a_1 و a_2 با شرط $a_1 < e < a_2$ (مثلاً $a_1 = 2/7$ و $a_2 = 2/8$ یا $a_1 = 2/71$ و $a_2 = 2/72$ یا $a_1 = 2/718$ و $a_2 = 2/719$ و غیره)، داریم:

$$\left(\frac{n}{a_1}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{a_2}\right)^n$$

به ازای همه عددهای n که از عدد مشخص a بیشتر باشد (این عدد با a_1 متفاوت است).

به این ترتیب، عدد e ، به عنوان يك «مرز»، به ما كمك می كند تا بتوانیم

عددهای a را که به ازای آن‌ها $\left(\frac{n}{a}\right)^n$ «سریع تر» از $n!$ رشد می کند (وقتی

$n \rightarrow \infty$)، از عددهای a که به ازای آن‌ها $\left(\frac{n}{a}\right)^n$ نسبت به $n!$ «کندتر» رشد

می کند، جدا کنیم (وجود این «مرز»، نتیجه ای است از مساله ۲۲۳).

درواقع، به ازای هر n بزرگتر از e ، داریم: $\left(\frac{n}{a_1}\right)^n < n!$ (زیرا

$a_2 > e$ و، با توجه به مسأله ۲۲۵، برای هر $n > e$ داریم: $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$).

از این گذشته، با توجه به مساله های ۲۲۰ و ۲۲۴، نتیجه می شود که برای $n \geq 3$ ، نابرابرهای زیر برقرارند:

$$n > e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n},$$

$$n^{n+1} > (n+1)^n \text{ و } \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$$

بنابراین، به ازای $n \geq 3$ ، مقدار $\sqrt[n]{n}$ ، با رشد n ، کاهش می یابد. با توجه به این حقیقت که $\log \sqrt[10^k]{10^k} = \frac{k}{10^k}$ ، می توان نتیجه گرفت که، برای مقدار-

های به قدر کافی بزرگ k ، مقدار $\log \sqrt[10^k]{10^k}$ به دلخواه کوچک می شود. اکنون اگر N را طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم: $\sqrt[N]{N} < \frac{e}{a_1}$ ، نتیجه می شود که

برای هر $n > N$ باید داشته باشیم: $\sqrt[n]{n} < \frac{e}{a_1}$ ؛ که با توجه به نتیجه مسأله ۲۲۵، از آن نتیجه می شود:

$$n! < \left(\frac{\frac{n}{e}}{\sqrt[n]{n}} \right)^n < \left(\frac{n}{a_1} \right)^n$$

نا برابری مسأله ۲۲۵، اهمیت بسیار دارد. مثلاً از این جا می توان

ثابت کرد که، برای مقدارهای بزرگ n ، عدد $n!$ به تقریب برابر $C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$

است که، در آن، C مقداری است ثابت برابر $\sqrt{2\pi}$:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

از این دقیق تر، می توان ثابت کرد که نسبت

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n}$$

وقتی n به سمت بی نهایت میل کند، برابر است با واحد.



$$\frac{1}{k+1} n^{k+1} < 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{k+1} n^{k+1}$$

یادداشت. به خصوص، از مسأله ۲۲۶، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

۲۲۷. $n > 1$ ، عددی است درست. ثابت کنید:

الف) $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$;

ب) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$

۲۲۸. الف) بخش درست این عدد را پیدا کنید:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

ب) این مجموع را با دقت تا $\frac{1}{50}$ تقریب محاسبه کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{100000}} + \frac{1}{\sqrt{100001}} + \frac{1}{\sqrt{100002}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

۲۲۹. بخش درست این عدد را پیدا کنید:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$$

۲۳۰. الف) این مجموع را با دقت تا 0.006 تقریب محاسبه کنید:

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{1000^2}$$

ب) این مجموع را با دقت تا 0.000000015 تقریب به دست آورید:

$$\frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \dots + \frac{1}{1000!}$$

۲۳۱. ثابت کنید، اگر n را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم، آن وقت

عدد

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

از هر عدد مفروض N بزرگتر می شود.

یادداشت. نتیجه مسأله ۲۳۱ را می توان با دقت بیشتری بررسی کرد.

می توان ثابت کرد که، اگر n عددی بزرگ باشد، مجموع $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

با مقدار $\log_e n$ اختلاف کمی دارد ($e = 2.718 \dots$)؛ مسأله ۲۲۴ را ببینید.

مقدار $\log_e a$ را، معمولاً، به صورت $\ln a$ نشان می دهند).

اگر دقیق تر بگوییم، می توان ثابت کرد که تفاضل

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

(در این جا $\ln n = \log_e n$)، به ازای هر مقدار n ، از واحد بزرگتر نیست.

۲۳۲. در مجموع

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

(که همه عددها در مبنای دهدهی اند)، همه کسرهایی را که در مخرج خود،

رقم ۹ دارند، حذف کرده ایم؛ ثابت کنید، مجموع کسرهای باقی مانده، به ازای

هر مقدار n ، از ۸۵ کوچکتر است.

۲۳۳. الف) ثابت کنید، به ازای هر مقدار n

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

(ب) ثابت کنید، به ازای هر مقدار n

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}$$

روشن است که، نتیجه (ب)، قوی‌تر از نتیجه (الف) است. نتیجه را از این‌هم می‌توان قوی‌تر کرد و، با توجه به مسأله ۳۳۲، به دست آورد:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6} = 1/6449340668 \dots$$

در واقع، به ازای هر N که از $\frac{\pi^2}{6}$ کمتر باشد (مثل $N = 1/64$) یا $N = 1/644934$ ، می‌توان عدد n را طوری پیدا کرد که، برای آن، داشته باشیم:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} > N$$

*۲۳۴. این مجموع را در نظر می‌گیریم:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{p}$$

که در آن، مخرج‌ها، عددهای اول متوالی از ۲ تا p هستند. ثابت کنید، این مجموع، از هر عدد مشخصی مانند N که از قبل تعیین کرده‌ایم، تجاوز می‌کند (و برای این منظور، باید مقدار عدد اول p را، به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم).

یادداشت. این نتیجه گیری را می‌توان دقیق‌تر و روشن‌تر کرد و نشان داد

که، به ازای مقدارهای بزرگ p ، تفاضل مجموع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$ با

* $\ln a = \log_e a$ را، لگاریتم طبیعی یا لگاریتم نپری هم می‌گویند، و در واقع، نام‌نپری ریاضی‌دان (J. Napier، ۱۵۵۰-۱۶۱۷) را برخود دارد.

$\ln \ln p$ ، عددی نسبتاً کوچک است (همان طور که قبلاً هم گفته ایم، $\ln$ به معنای لگاریتم طبیعی، یعنی لگاریتم در معنای $e = 2.718 \dots$ است). از این هم می‌توان جلوتر رفت و ثابت کرد که تفاضل

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \ln \ln p$$

از عدد ۱۵ تجاوز نمی‌کند ($\ln \ln p = \log_e \log_e p$).

وقتی نتیجه حاصل از مسأله ۲۳۴ را با نتیجه‌های حاصل از مساله‌های ۲۳۲ و ۲۳۳ مقایسه کنیم، روشن می‌شود که، دنباله عددهای اول، در دنباله عددهای طبیعی، با تعداد جمله‌های به طور نسبی زیادتری سروکار دارد (به ویژه، همان طور که از مسأله ۲۳۴ نتیجه می‌شود، تعداد عددهای اول، بی‌نهایت است). در واقع، می‌توان گفت که: در دنباله عددهای طبیعی، با عددهای اول، نسبت به عددهای مجذور کامل و نسبت به عددهایی که نمایش دهنده آن‌ها شامل رقم ۹ نیست، به فراوانی بیشتری برخورد می‌کنیم، زیرا مجموع عکس‌های همه عددهای مجذور کامل و، همچنین، مجموع عکس‌های همه عددهایی که شامل رقم ۹ نیستند، مقداری محدود است، درحالی که مجموع عکس‌های عددهای اول را، می‌توان به هر اندازه که بخواهیم، بزرگ کرد.

۸. مساله‌های گوناگونی از جبر

بیشتر مساله‌هایی که در این کتاب انتخاب کرده ایم، به حساب (و گاهی «حساب عالی»، یعنی «نظریه عددها») مربوط می‌شود. ولی مساله‌های بخش-های ۸ تا ۱۵، به جبر و مثلثات مربوط اند. حل برخی از این مساله‌ها، بستگی به اندیشه‌های نسبتاً مهمی دارند؛ مثلاً، بعضی از آن‌ها، به قضیه‌ای مربوط می‌شوند که به قضیه اصلی جبر مشهور شده است.

بنابر قضیه اصلی جبر: هر معادله (جبری) چند جمله‌ای از درجه n ، با ضریب‌های دلخواه حقیقی یا مختلط، درست دارای n ریشه است (اینها

ریشه‌ها می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند، ولی لزومی ندارد که دو به دو متمایز باشند). دستورهای دیگری که مورد استفاده ما قرار می‌گیرند، دستورهای ویت* است که به رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادله مربوط اند. همچنین، از نمایش هندسی عددهای مختلف هم، در بعضی مسأله‌ها استفاده شده است.

۰۲۳۵. ثابت کنید عبارت

$$(a+b+c)^{222} - a^{222} - b^{222} - c^{222}$$

بر عبارت زیر بخش پذیر است:

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

۰۲۳۶. این عبارت را تجزیه کنید:

$$a^{10} + a^5 + 1$$

۰۲۳۷. ثابت کنید، چند جمله‌ای

$$x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555} + x^{4444} + \\ + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111} + 1$$

بخش پذیر است بر عبارت

$$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$



۰۲۳۸. الف) این عبارت را تجزیه کنید:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

ب) با استفاده از نتیجه مسأله ۲۳۸، الف)، دستوری کلی برای جواب‌های معادله درجه سوم زیر پیدا کنید:

$$x^3 + px + q = 0$$

(*) ویت (Francois Vieta، ۱۵۴۰-۱۶۰۳)، ریاضی‌دان برجستهٔ فرانسوی، که یکی از پدیدآورندگان جبر و نمادهای جبری جدید است.

یادداشت. یادآوری می‌کنیم که، با حل این مساله، یعنی پیدا کردن جواب‌های معادله $x^3 + px + q = 0$ ، می‌توان هر معادله درجه سوم دلخواه را حل کرد. معادله درجه سوم

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

را، که صورت کلی يك معادله درجه سوم است، در نظر بگیرید (هر معادله درجه سوم دلخواه را می‌توان، به صورت معادله درجه سوم درآورد که، ضریب x^3 در آن، برابر واحد باشد؛ برای این منظور، کافی است، همه جمله‌های معادله را بر ضریب بزرگترین درجه آن تقسیم کنیم). اکنون، اگر قرار دهیم: $x = y + c$ ، معادله مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + c^3 + A(y^2 + 2cy + c^2) + B(y + c) + C = 0$$

و از آنجا

$$y^3 + (3c + A)y^2 + (3c^2 + 2Ac + B)y + (c^3 + Ac^2 + Bc + C) = 0$$

اکنون اگر $c = -\frac{A}{3}$ (یعنی $x = y - \frac{A}{3}$) بگیریم، معادله درجه سوم مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$y^3 + \left(\frac{3A^2}{9} - \frac{2A^2}{3} + B\right)y + \left(-\frac{A^3}{27} + \frac{A^3}{9} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0$$

که به گروه معادله‌های به صورت

$$y^3 + py + q = 0$$

تعلق دارد که در مساله ۲۳۸ مورد بررسی قرار گرفته است و، در آن

$$p = -\frac{A^2}{3} + B \quad \text{و} \quad q = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C$$

۰۲۳۹. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

۰۲۴۰*. ریشه‌های حقیقی این معادله را پیدا کنید:

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$$

که در آن $0 < a < \frac{1}{4}$.

۰۲۴۱. ریشه‌های حقیقی این معادله را به دست آورید:

$$\underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \dots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}}}_{n \text{ رادیکال}} = x$$

(هر ریشه‌ای که به صورت رادیکالی با فرجه زوج باشد، مثبت به حساب آورده ایم).

۰۲۴۲. این معادله را حل کنید:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = x$$

$$1 + \frac{1}{x}$$

در سمت چپ برابری، تعداد کسرها، n بار تکرار شده است.

۰۲۴۳. ریشه‌های حقیقی این معادله را پیدا کنید:

$$\sqrt{x + 3 - 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$$

(همهٔ رادیکال‌ها، مثبت به حساب می‌آیند).

۲۴۴. این معادله را حل کنید:

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2$$

۲۴۵. این معادله را حل کنید:

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \times 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \times 2 \times 3} + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!} = 0$$

۲۴۶. این معادله را حل کنید:

$$x^3 - [x] = 3$$

در این جا، طبق معمول، نماد $[x]$ به معنای بخش درست عدد x است (صفحه‌های ۴۵ و ۴۶ را ببینید).



۲۴۷. در حالت کلی، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

چهار جواب دارد. به ازای چه مقدارهایی از a ، تعداد جواب‌های این دستگاه، به سه یا به دو کاهش می‌یابد؟

۲۴۸. الف) این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

این دستگاه، به ازای چه مقدارهایی از a جواب ندارد؛ به ازای چه مقدارهایی از a ، بی‌نهایت جواب دارد؟
ب) دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

را حل کنید و به همان پرسش‌های مسأله الف) پاسخ دهید.
ج) به همان پرسش‌ها دربارهٔ دستگاه زیر پاسخ دهید:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

۲۴۹. دستگاه زیر، شامل شش معادله و چهار مجهول، مفروض است:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \alpha_1 \alpha_2 \\ x_1 + x_3 = \alpha_1 \alpha_3 \\ x_1 + x_4 = \alpha_1 \alpha_4 \\ x_2 + x_3 = \alpha_2 \alpha_3 \\ x_2 + x_4 = \alpha_2 \alpha_4 \\ x_3 + x_4 = \alpha_3 \alpha_4 \end{cases}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و α_4 درجه شرطی صدق کنند تا این دستگاه جواب داشته باشد (یعنی، دستگاه متوافق باشد)؟ با توجه به شرطی که برای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و α_4 پیدا می‌کنید، مقدار مجهول‌های x_1, x_2, x_3 و x_4 را پیدا کنید.
۲۵۰. تعداد جواب‌های حقیقی این دستگاه را پیدا کنید.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

۲۵۱. همهٔ جواب‌های حقیقی این دستگاه را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

۲۵۲. همه جواب‌های ممکن $x, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ را از دستگاه زیر به دست آورید:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = xx_2 \\ x_2 + x_4 = xx_3 \\ x_3 + x_5 = xx_4 \\ x_4 + x_1 = xx_5 \\ x_5 + x_2 = xx_1 \end{cases}$$

۲۵۳. چهار عدد حقیقی چنان‌اند که اگر یکی از آن‌ها را با حاصل ضرب سه‌تای دیگر جمع کنیم، همیشه عدد ۲ به دست می‌آید. همه این گونه گروه‌های چهار عددی را پیدا کنید.

۲۵۴. دستگاه زیر را، که شامل چهار معادله و چهار مجهول است، حل کنید:

$$\begin{cases} |a-b|y + |a-c|z + |a-d|t = 1 \\ |b-a|x + |b-c|z + |b-d|t = 1 \\ |c-a|x + |c-b|y + |c-d|t = 1 \\ |d-a|x + |d-b|y + |d-c|z = 1 \end{cases}$$

که در آن، a, b, c و d ، عددهایی حقیقی، دلخواه و متمایزند.

۲۵۵. دستگاهی شامل n مجهول $x_1, x_2, \dots, x_n$ با n معادله به صورت

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \dots \dots \dots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

مفروض است که در آن $a \neq 0$. ثابت کنید، این دستگاه با شرط

$$(b-1)^2 - 4ac < 0$$

جواب ندارد؛ با شرط $(b-1)^2 - 4ac = 0$ جوابی منحصر دارد و، سرانجام، در حالت $(b-1)^2 - 4ac > 0$ بیش از یک جواب دارد.

۲۵۶. $a_1, a_2, \dots, a_n$ را عددهایی مثبت می‌گیریم ($n \geq 2$). تعداد ریشه‌های حقیقی دستگاه شامل معادله‌های زیر را پیدا کنید:

$$x_1 x_2 = a_1, x_2 x_3 = a_2, \dots, x_{n-1} x_n = a_{n-1}, x_n x_1 = a_n$$

۲۵۷. الف) تعداد ریشه‌های این معادله را پیدا کنید:

$$\sin x = \frac{x}{100}$$

ب) تعداد ریشه‌های این معادله را پیدا کنید:

$$\sin x = \log x$$



۲۵۸. می‌دانیم:

$$a_1 - 4a_2 + 3a_3 \geq 0$$

$$a_2 - 4a_3 + 3a_4 \geq 0$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$a_{98} - 4a_{99} + 3a_{100} \geq 0$$

$$a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 \geq 0$$

$$a_{100} - 4a_1 + 3a_2 \geq 0$$

فرض کنید $a_1 = 1$. عددهای $a_2, a_3, \dots, a_{100}$ را پیدا کنید.

۲۵۹. a, b, c, d را چهار عدد دلخواه و مثبت می‌گیریم. ثابت کنید،

این نابرابری‌ها نمی‌توانند باهم برقرار باشند:

$$a+b < c+d,$$

$$(a+b)(c+d) < ab+cd$$

$$(a+b)cd < (c+d)ab$$

۲۶۰. ثابت کنید کسر

$$\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}$$

که صورت آن شامل n رادیکال و مخرج آن شامل $(n-1)$ رادیکال است، به ازای هر $n \geq 1$ ، بزرگتر از $\frac{1}{4}$ است.

۲۶۱. حاصل ضرب سه عدد حقیقی و مثبت، برابر واحد است. در ضمن، مجموع این سه عدد، از مجموع عکس‌های سه عدد بیشتر است. ثابت کنید، یکی از سه عدد از واحد بزرگتر و دوتای دیگر، از واحد کوچکترند.

۲۶۲. مجموع ۱۹۵۹ عدد مثبت $a_1, a_2, \dots, a_{1959}$ برابر واحد است. ثابت کنید، مجموع همه حاصل ضرب‌های ممکن که از هر ۱۰۰۰ عدد مختلف، از مجموعه این عددها، به دست می‌آید، از واحد کمتر است (در مجموعه حاصل ضرب‌های ۱۰۰۰ عددی، هر دو عضو باید دست کم در یک عامل با هم اختلاف داشته باشند؛ عضوایی را که تنها در ردیف عامل‌های ضرب با هم فرق دارند، یکی به حساب می‌آوریم).

۲۶۳. $N \geq 2$ را عددی طبیعی فرض می‌کنیم. مجموع همه کسرهای

به صورت $\frac{1}{mn}$ را پیدا کنید، به شرطی که m و n نسبت به هم اول باشند و،

ضمن، داشته باشیم:

$$1 \leq m \leq n \leq N \text{ و } m+n > N$$

۲۶۴. برای ۱۹۷۳ عدد مثبت $a_1, a_2, \dots, a_{1973}$ داریم:

$$a_1^{a_2} = a_2^{a_3} = a_3^{a_4} = \dots = (a_{1992})^{a_{1993}} = (a_{1993})^{a_1}$$

ثابت کنید: $a_1 = a_{1993}$.

۲۶۵°. ثابت کنید، اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 1 = 0$ باشند، آن وقت برای هر عدد درست n ، $x_1^n + x_2^n$ عددی است درست و بخش - ناپذیر بر ۵.

۲۶۶. این اتحاد را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_{999} + a_{1000})^2 = \\ = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{999}^2 + a_{1000}^2 + 2a_1a_2 + \\ + 2a_1a_3 + \dots + 2a_{999}a_{1000} \end{aligned}$$

از عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{999}, a_{1000}$ بعضی مثبت و بعضی دیگر منفی‌اند. آیا ممکن است در عبارت سمت راست برابری، بین حاصل ضرب‌های دوه‌دوی عددهای مختلف، تعداد جمله‌های مثبت با تعداد جمله‌های منفی برابر باشد؟ به‌همین پرسش دربارهٔ این عبارت پاسخ بدهید:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{999} + a_{1000})^2$$

۲۶۷. ثابت کنید، اگر $\sqrt{2} - 1$ را به‌توان عدد درستی برسانیم، حاصل را می‌توان به‌صورت $\sqrt{N} - \sqrt{N-1}$ نوشت که، در آن، N عددی است درست. به‌عنوان نمونه

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - 1)^2 &= 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}, \\ (\sqrt{2} - 1)^3 &= 5\sqrt{2} - 7 = \sqrt{50} - \sqrt{49} \end{aligned}$$

۲۶۸. ثابت کنید، عدد $99999 + 11111\sqrt{3}$ را نمی‌توان به‌صورت عدد، $(A + B\sqrt{3})^2$ نمایش داد، که در آن، A و B عددهایی درست‌اند.

۲۶۹. ثابت کنید، عدد $\sqrt[3]{2}$ را نمی‌توان به‌صورت

$$\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$$

نوشت. p و q و r ، عددهایی گویا هستند.

۰۲۷۰ می‌دانیم:

$$A = \left(\frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2} \right)^m$$

که در آن $m \geq 2$ و $n \geq 2$ ، عددهایی طبیعی‌اند. ثابت کنید، در این صورت، می‌توان A را به صورت

$$A = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

نوشت که، در آن، k عددی است طبیعی.

۰۲۷۱. آیا می‌توان عددهای گویای x, y, z را طوری پیدا کرد که برابری

$$(x + y\sqrt{2})^{2n} + (z + t\sqrt{2})^{2n} = 5 + 4\sqrt{2}$$

به‌ازای مقداری از عدد طبیعی n برقرار باشد؟

۰۲۷۲. دو بشکه آب، با حجم‌های نامتناهی وجود دارد. آیا می‌توان به کمک دوزف به حجم‌های $\sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$ ، فقط یک لیتر آب را، از یک بشکه به بشکه دیگر ریخت؟

۰۲۷۳. x عددی است گویا. به‌ازای چه مقدارهایی از عدد x ، عبارت درجه دوم $3x^2 - 5x + 9$ برابر با مجذور یک عدد گویا می‌شود؟



۰۲۷۴. مبین $\Delta = p^2 - 4q$ از معادله درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ از مرتبه ۱۰ است. با گرد کردن عدد q در معادله، مقدار q تغییری از مرتبه ۰/۰۱ پیدامی‌کند ثابت کنید، نمودار ریشه‌های معادله، از مرتبه ۰/۰۰۱ است.

۰۲۷۵. قرار می‌گذاریم، عددها را طوری گرد کنیم که، به‌جای هر عدد اصلی، عدد درستی قرار گیرد که با آن، کمتر از یک واحد اختلاف دارد، ثابت کنید، هر n عدد درست مثبت را، می‌توان با این روش طوری گرد کرد که

مجموع هر تعداد دلخواه از عددهای اصلی، بیش از $\frac{n+1}{4}$ با مجموع گردشده آن‌ها، اختلاف نداشته باشد.

۲۷۶. در عدد مثبت a ، که در عددنویسی به مبنای ده نوشته شده است، همه رقم‌های از رقم چهار اعشار به بعد را حذف کرده‌ایم تا عدد a_0 به دست آید (a_0 عبارت است از مقدار تقریبی a ، با دقت $0/001$ تقریب). اکنون a_0 را بر a تقسیم و خارج قسمت را دوباره و با همان روش، با دقت تا $0/001$ تقریب گرد می‌کنیم. همه عددهایی را پیدا کنید که با این روش به دست می‌آیند. ۲۷۷. α را کسری گویا و غیر منفی و $n > 0$ را عددی درست می‌گیریم. در دنباله کسرهای

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$$

کسری وجود دارد که، نسبت به دیگران، به α نزدیک‌تر است؛ روشن است که اختلاف α با این کسر، از نصف کسر $\frac{1}{n}$ تجاوز نمی‌کند.

ثابت کنید، می‌توان n را طوری پیدا کرد که، به ازای آن، اختلاف بین

عدد α و کسری با مخرج n (که از همه به α نزدیک‌تر است)، از $\frac{1}{n} \cdot 0/001$ کمتر باشد.

۲۷۸. الف) نمایش‌دهی عدد α به صورت $0/999\dots$ در آمده است

که، در آن تعداد رقم‌های ۹ بعد از ممیز برابر ۱۰۰ است. ثابت کنید، نمایش‌دهی عدد $\sqrt{\alpha}$ هم به صورت $0/999\dots$ در می‌آید و، در این جا هم، ۱۰۰ رقم ۹، بعد از ممیز قرار دارد.

ب) مقدار ریشه دوم $\sqrt{0/111\dots 111}$ را به ترتیب: ۱) تا ۱۰۰ رقم

رقم، ۲) تا ۱۰۱ رقم، ۳) تا ۲۰۰ رقم، ۴) تا ۳۰۰ رقم بعد از ممیز پیدا کنید.

$$\frac{2 / \textcircled{\hspace{0.8cm}}}{(1 / \textcircled{\hspace{0.8cm}})^Y + 2 / \textcircled{\hspace{0.8cm}}}$$

٤

$$\frac{2/0000000002}{(1/0000000002)^2 + 2/0000000002}$$

(ب) با شرط $a > b > 0$ ، کدام بزرگترند:

$$\frac{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\dots+a^n} \leq \frac{1+b+b^2+\dots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\dots+b^n}$$

۲۸۰. عدد $a_1, a_2, \dots, a_n$ مفروض اند. مقدار x را طوری پیدا

کنید که، مجموع

$$(x-a_1)^r + (x-a_2)^r + \dots + (x-a_n)^r$$

کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۲۸۱. الف) چهار عدد حقیقی و دو به دو متمایز $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$

مفروض اند. می‌خواهیم این چهار عدد را به ترتیب مشخصی مثل

$$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}$$

منظم کنیم (i_1, i_2, i_3, i_4) همان اندیس‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند، ولی ممکن است به ترتیب دیگری مرتب شده باشند، به نحوی که مجموع

$$\Phi = (a_{i_1} - a_{i_2})^T + (a_{i_2} - a_{i_3})^T + (a_{i_3} - a_{i_4})^T + (a_{i_4} - a_{i_1})^T$$

کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

(ب*) n عدد دو به دو متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ مفروض اند. می‌خواهیم

آنها را، به صورت

$$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_n}$$

طوری مرتب کنیم کہ مجموع

$$\Phi = (a_{i_1} - a_{i_r})^r + (a_{i_r} - a_{i_{r'}})^{r'} + \dots + (a_{i_{n-1}} - a_{i_n})^r + (a_{i_n} - a_{i_1})^r$$

کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۰۲۸۲ الف) ثابت کنید، برای عددهای حقیقی و دلخواه

$a_1, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_r$ همیشه داریم:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \\ & \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2} \end{aligned}$$

با چه شرطی، علامت برابری برقرار است؟

ب) يك هرم را قائم می‌نامیم، وقتی که اولاً بتوان دایره‌ای در قاعده آن محاط کرد و ثانیاً، ارتفاع وارد از راس هرم بر قاعده، از مرکز این دایره گذشته باشد.

ثابت کنید، هرم قائم، از هر هرم دیگری که همان ارتفاع را داشته باشد و مساحت و محیط قاعده آن با مساحت و محیط قاعده هرم قائم یکی باشد، سطح جانبی کمتری دارد.

یادداشت. نابرابری بخش الف، حالت خاصی از نابرابری مین کودسکی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \dots + l_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + \dots + l_2^2} + \dots \\ & \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + \dots + l_n^2} \geq \\ & \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + \dots + b_n)^2 + \dots + (l_1 + \dots + l_n)^2} \end{aligned}$$

۲۸۳. ثابت کنید، برای هر مجموعه‌ای از عددهای حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، این نابرابری برقرار است.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1^2 + (1 - a_1)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_2)^2} + \dots \\ & \dots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_{n-1})^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_n)^2} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

به ازای چه مقدارهایی از این عددها، دو عبارت سمت چپ و سمت راست نابرابری، باهم برابر می‌شوند؟

۲۸۴. می‌دانیم، قدر مطلق‌های دو عدد x_1 و x_2 ، از واحد تجاوز نمی‌کنند. ثابت کنید:

$$\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} \leq 2 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$$

به ازای چه مقدارهایی از x_1 و x_2 ، دو عبارت سمت چپ و سمت راست

این نابرابری، با یکدیگر برابر می‌شوند؟
۲۸۵. کدام بزرگترند:

$$\cos \sin x \text{ یا } \sin \cos x$$

۲۸۶. بدون استفاده از جدول‌های لگاریتم، ثابت کنید:

الف) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$;

ب) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{\pi} 2} > 2$

۲۸۷. α و β ، زاویه‌هایی حاده‌اند و می‌دانیم $\alpha < \beta$. ثابت کنید:

الف) $\alpha - \sin \alpha < \beta - \sin \beta$;

ب) $\operatorname{tg} \alpha - \alpha < \operatorname{tg} \beta - \beta$

۲۸۸. α و β زاویه‌هایی حاده‌اند و می‌دانیم $\alpha < \beta$. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \beta$$

۲۸۹. بین این دو مقدار چه رابطه‌ای وجود دارد:

$$\arcsin \cos \arcsin x \text{ و } \arccos \sin \arccos x$$

۲۹۰. آیا مجموع

$$\cos^3 2x + a_1 \cos^3 1x + a_2 \cos^3 0x + \dots + a_r \cos^2 x + a_1 \cos x$$

برای هر مقدار x و ضرایب‌های دلخواه $a_1, a_2, \dots, a_r$ ، تنها مقدارهای مثبت را قبول می‌کند؟

۲۹۱. فرض کنید، بعضی (یا همه) عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ برابر

1 ، و بقیه برابر -1 باشند. ثابت کنید:

$$2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2^{n-1}} \right) 45^\circ =$$

$$= a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + a_3 \sqrt{2 + \dots + a_n \sqrt{2}}}}$$

مثلاً به ازای $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 2 \sin \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) 45^\circ &= 2 \cos \frac{45^\circ}{2^{n-1}} = \\ &= \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ رادیکال}} \end{aligned}$$

۹. جبر چند جمله‌ای‌ها

۲۹۲. مجموع ضرب‌های عددی عبارتی را پیدا کنید که از بسط عبارت زیر به دست می‌آید:

$$(1 - 3x + 3x^2)^{143} (1 + 3x - 3x^2)^{144}$$

۲۹۳. در کدام یک از دو عبارت حاصل از بسط عبارت‌های

$$(1 + x^2 - x^3)^{1000} \quad \text{و} \quad (1 - x^2 + x^3)^{1000}$$

ضریب x^{20} بزرگتر است؟

۲۹۴. ثابت کنید، در عبارتی که از بسط

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100})$$

به دست می‌آید، جمله‌ای وجود ندارد که، در آن، توان x ، عددی فرد باشد.

۲۹۵. در هر یک از دو عبارت زیر، ضریب x^{50} را پیدا کنید:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & (1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + \\ & + x^2(1+x)^{998} + \dots + x^{1000}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad & (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \dots \\ & \dots + 1000(1+x)^{1000} \end{aligned}$$

۲۹۶۰. ضرب x^2 را در عبارت حاصل از بسط عبارت زیر پیدا کنید:

$$\underbrace{((\dots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\dots-2)^2)}_{k \text{ مرتبه}}$$

۲۹۷. باقی‌مانده حاصل از تقسیم عبارت

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$$

را بر هریک از عبارت‌های زیر پیدا کنید:

$$(x-1) \text{ (الف)} \quad (x-1)^2 \text{ (ب)}$$

۲۹۸. در تقسیم یک چندجمله‌ای بر $x-1$ و $x-2$ ، به ترتیب،

باقی‌مانده‌های ۲ و ۱ به دست آمده است. از تقسیم این چندجمله‌ای بر حاصل ضرب

$$(x-1)(x-2)، \text{ چه باقی‌مانده‌ای به دست می‌آید؟}$$

۲۹۹. اگر چندجمله‌ای $x^{1951} - 1$ را بر چندجمله‌ای

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

تقسیم کنیم، خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم به دست می‌آید. ضرب x^{14} در

عبارت خارج قسمت تقسیم، چقدر است؟

۳۰۰. همه چندجمله‌ای‌های $P(x)$ را پیدا کنید که، برای هر کدام از

آنها، اتحاد زیر برقرار باشد:

$$x.P(x-1) \equiv (x-26).P(x)$$

۳۰۱. چندجمله‌ای $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$

مفروض است. ضرب‌های $a_0, a_1, \dots, a_n$ را

(الف) عددهای طبیعی؛

(ب) عددهای درست

می‌گیریم. مجموع رقم‌های عدد $P(n)$ را، در عددنویسی به مبنای ۱۰، با

$s(n)$ نشان می‌دهیم (روشن است که $s(n)$ وقتی معنا دارد که $P(n)$ عددی

طبیعی باشد، در غیر این صورت، $s(n)$ وجود نخواهد داشت).

ثابت کنید، اگر دنباله $s(1), s(2), s(3), \dots$ بی‌نهایت جمله

متمایز داشته باشد، آن وقت، بی‌نهایت جمله برابر هم خواهد داشت.

۳۰۲. ثابت کنید، چندجمله‌ای $x^{۲۰۰}y^{۲۰۰} + ۱$ را (که شامل دو متغیر x و y است)، نمی‌توان به صورت حاصل ضرب $f(x) \cdot g(y)$ نوشت، به نحوی که $f(x)$ تنها شامل متغیر x ، و $g(y)$ تنها شامل متغیر y باشد.

۳۰۳. در مورد چندجمله‌ای درجه دوم

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

می‌دانیم، معادله $f(x) = x$ جواب ندارد (یعنی ریشه‌های حقیقی ندارد). ثابت کنید، در این صورت، معادله $p(p(x)) = x$ هم ریشه حقیقی ندارد.

۳۰۴. درباره سه جمله‌ای درجه دوم $p(x) = ax^2 + bx + c$ می‌دانیم، اگر داشته باشیم $|x| \leq ۱$ ، آن وقت خواهیم داشت $|p(x)| \leq ۱$. ثابت کنید، در این صورت، برای سه جمله‌ای درجه دوم

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a$$

از شرط $|x| \leq ۱$ نتیجه می‌شود: $|p_1(x)| \leq ۲$.

۳۰۵. می‌دانیم، یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (۱)$$

و x_2 یکی از ریشه‌های معادله

$$-ax^2 + bx + c = 0 \quad (۲)$$

است، ثابت کنید، x_3 یکی از ریشه‌های معادله

$$\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0 \quad (۳)$$

بین دو مقدار x_1 و x_2 قرار دارد، یعنی

$$x_1 \leq x_3 \leq x_2 \quad \text{یا} \quad x_1 \geq x_3 \geq x_2$$

۳۰۶. می‌دانیم α و β ریشه‌های معادله درجه دوم

$$x^2 + px + q = 0$$

و γ و δ ریشه‌های معادله درجه دوم

$$x^2 + Px + Q = 0$$

می‌باشند. حاصل این عبارت را، برحسب q, p, P و Q پیدا کنید:

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta)$$

۳۵۷. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آن‌ها،

دو معادلهٔ

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + x + a = 0$$

دست‌کم، دارای یک ریشهٔ مشترک باشند.

۳۵۸. الف) مقدار a را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، بتوان عبارت

$$(x - a)(x - 10) + 1$$

را به صورت $(x + b)(x + c)$ تجزیه کرد (b و c ، عددهایی درست‌اند).

ب) همهٔ عددهای غیر صفر و دوه‌دو متمایز a, b و c را طوری پیدا

کنید که چندجمله‌ای

$$x(x - a)(x - b)(x - c) + 1$$

از درجهٔ چهارم و ضریب‌های درست را بتوان به صورت ضرب دو جمله‌ای،

با ضریب‌های درست، تجزیه کرد.

۳۵۹. به ازای چه مقدارهای دو به دو متمایز، از عددهای درست

$a_1, a_2, \dots, a_n$ ، می‌توان چندجمله‌ای

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n) - 1 \quad \text{الف}$$

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n) + 1 \quad \text{ب}$$

را، به ضرب دو چندجمله‌ای دیگر تجزیه کرد؟

۳۶۰. ثابت کنید، نمی‌توان مقدارهای دوه‌دو متمایز عددهای درست

$a_1, a_2, \dots, a_n$ را طوری پیدا کرد که چندجمله‌ای

$$(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$$

را به صورت ضرب دو چندجمله‌ای با ضریب‌های درست تجزیه کرد.

۳۶۱. ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای با ضریب‌های درست

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

به ازای چهار عدد درست x ، مقداری برابر ۷ داشته باشد، آن وقت، به ازای هیچ عدد درستی از x ، برابر ۱۴ نمی‌شود.

۳۱۲. می‌دانیم، چندجمله‌ای درجه هفتم

$$a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$$

به ازای ۷ مقدار درست x ، برابر ۱ یا -۱ شده است. ثابت کنید، این چندجمله‌ای را نمی‌توان به صورت ضرب دو چندجمله‌ای با ضرایب‌های درست تجزیه کرد.

۳۱۳. چندجمله‌ای

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

با ضرایب‌های درست، مفروض است. ثابت کنید، اگر $P(0)$ و $P(1)$ عددهایی فرد باشند، آن وقت معادله $P(x) = 0$ ، ریشه درست ندارد.

۳۱۴. می‌دانیم، قدر مطلق چندجمله‌ای

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ عددهایی درست‌اند، به ازای $x = p$ و $x = q$ ، برابر واحد شده است ($p > q$)؛ در ضمن معادله $P(x) = 0$ دارای ریشه‌ای گویا برابر a است. ثابت کنید $p - q$ برابر است با ۱ یا ۲ و در ضمن

$$a = \frac{1}{p+q}$$

۳۱۵. ثابت کنید، چندجمله‌ای‌های

$$\text{الف) } x^{2222} + 2x^{2220} + 4x^{2218} + 6x^{2216} + 8x^{2214} + \dots$$

$$\dots + 2218x^4 + 2220x^2 + 2222;$$

$$\text{ب) } x^{250} + x^{249} + x^{248} + x^{247} + x^{246} + \dots + x^2 + x + 1$$

را نمی‌توان به صورت ضرب چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب‌های درست، تجزیه کرد.

۳۱۶. حاصل ضرب دو چندجمله‌ای با ضرایب‌های درست، یک چندجمله‌ای

با ضرایب‌های زوج است، ولی همه این ضرایب‌های زوج، بر ۴ بخش پذیر نیستند.

ثابت کنید، از دو چندجمله‌ای اصلی، همه ضریب‌های یکی از دو چندجمله‌ای زوج است، در حالی که در چندجمله‌ای دیگر، بعضی از ضریب‌ها زوج نیستند. ۳۱۷. ثابت کنید، ریشه‌های گویا در چندجمله‌ای

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

(با ضریب‌های درست و ضریب بزرگترین درجه برابر واحد)، به طور مسلم، عددهایی درست‌اند.

۳۱۸* ثابت کنید، چندجمله‌ای به صورت

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

وجود ندارد، به نحوی که، همه مقادیرهای $P(0)$ ، $P(1)$ ، $P(2)$ ، ... عددهایی اول باشند.

یادداشت. لئونارد اولر*، نخستین کسی بود که به حل این مساله پرداخت. او همچنین چندجمله‌ای‌هایی را پیدا کرده که، به ازای چند عدد درست متوالی، برابر با عددهای اول می‌شوند. مثلاً چندجمله‌ای به صورت

$$P(x) = x^2 - 79x + 1601$$

به ازای ۸۰ مقدار متوالی از ۰ تا ۷۹، عددی اول است، یعنی همه عددهای

$$P(0) = 1601, P(1) = 1523, P(2), P(3), \dots, P(79)$$

عددهایی اول‌اند

۳۱۹. درباره چندجمله‌ای

$$P(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

می‌دانیم، به ازای هر مقدار درست x ، برابر با مقداری درست می‌شود. ثابت

(*) لئونارد اولر (Leonard Euler: ۱۷۰۷-۱۷۸۳)، ریاضیدان

سوئیس که دوره‌ای طولانی از عمر خود را در روسیه گذراند و، بدون شك، یکی از بزرگترین ریاضیدانان سده هجدهم است. او چه در ریاضیات و چه در مکانیک و فیزیک کارهای زیادی دارد و سهم زیادی از پیشرفت این دانش‌ها، به عهده اوست.

کنید، این چندجمله‌ای را، می‌توان به صورت مجموعی از چندجمله‌ای‌های

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{x(x-1)}{1 \times 2}, \dots$$

$$\dots, P_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}$$

که در يك ضريب عددی درست ضرب شده باشد، نوشت. (بنا بر بخش اول مسأله ۷۵، هريك از چندجمله‌ای‌های $P_0(x)$ ، $P_1(x)$ ، $\dots$ ، $P_n(x)$ ، هم، دارای همین ویژگی هستند.)

۰۳۲۰ الف) می‌دانیم چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه n ، به ازای هريك از مقدارهای $x=0$ ، $x=1$ ، $x=2$ ، $\dots$ ، $x=n$ ، برابر مقدار درستی می‌شود. ثابت کنید، در این صورت، چندجمله‌ای $P(x)$ ، به ازای هر مقدار درست و دلخواه x ، برابر با عددی درست است.

ب) می‌دانیم چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه n ، به ازای $n+1$ عدد درست متوالی از x ، برابر عددی درست می‌شود. ثابت کنید، این چندجمله‌ای به ازای هر مقدار درست x ، برابر با عددی درست است.

ج) ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای درجه n ام $P(x)$ ، به ازای هريك از مقدارهای $x=0$ ، $x=1$ ، $x=2$ ، $x=3$ ، $\dots$ ، $x=n^2$ ، برابر عدد درستی شود، آن وقت به ازای هر عدد درست دیگری هم که مجذور کامل باشد، برابر با عددی درست می‌شود. (ولی يك چنین چندجمله‌ای، الزاماً، به ازای هر عدد درست، برابر با مقداری درست نخواهد بود.)

نمونه‌ای از يك چندجمله‌ای را پیدا کنید که، به ازای هر عدد درست مجذور کامل، برابر با مقداری درست باشد، ولی به ازای مقدارهای درستی از x که مجذور کامل نیستند، برابر با عددهای درست نباشد.

۱۰. عددهای مختلط

۰۳۲۱ الف) ثابت کنید:

$$\cos \Delta a = \cos^{\Delta} a - 1 \circ \cos^{\gamma} a \sin^{\gamma} a + \Delta \cos a \sin^{\epsilon} a;$$

$$\sin \Delta a = \sin^{\Delta} a - 1 \circ \sin^{\gamma} a \cos^{\gamma} a + \Delta \sin a \cos^{\epsilon} a$$

ب) ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= \cos^n \alpha - C(n, 2) \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C(n, 4) \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \\ &\quad - C(n, 6) \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin n\alpha &= C(n, 1) \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C(n, 3) \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \\ &\quad + C(n, 5) \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots \end{aligned}$$

در این جا $C(n, k)$ به معنای تعداد ترکیب های k عضوی از n عنصر است،

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ یعنی همان ضریب های بسط دو جمله ای:}$$

یادداشت. در واقع، مسأله ب)، تعمیم مسأله الف) است.

۳۲۲. بسط $tg^{\epsilon} \alpha$ را بر حسب $tg \alpha$ پیدا کنید.

$$323. \text{ می دانیم: } x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha. \text{ ثابت کنید } x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha.$$

۳۲۴. ثابت کنید:

$$\sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \dots$$

$$\dots + \sin(\varphi + n\alpha) = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \left(\varphi + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos \varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \dots$$

$$\dots + \cos(\varphi + n\alpha) = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cos \left(\varphi + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

۳۲۵. این عبارت‌ها را ساده کنید:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \dots + \cos^2 n\alpha;$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \dots + \sin^2 n\alpha$$

۳۲۶. این عبارت‌ها را ساده کنید:

$$\cos \alpha + C(n, 1) \cos 2\alpha + C(n, 2) \cos 3\alpha + \dots$$

$$\dots + C(n, n-1) \cos n\alpha + \cos(n+1)\alpha;$$

$$\sin \alpha + C(n, 1) \sin 2\alpha + C(n, 2) \sin 3\alpha + \dots$$

$$\dots + C(n, n-1) \sin n\alpha + \sin(n+1)\alpha$$



۳۲۷. m, n و p سه عدد درست دلخواه‌اند. ثابت کنید، عبارت

$$\sin \frac{m\pi}{p} \sin \frac{n\pi}{p} + \sin \frac{2m\pi}{p} \sin \frac{2n\pi}{p} + \sin \frac{3m\pi}{p} \sin \frac{3n\pi}{p} + \dots$$

$$\dots + \sin \frac{(p-1)m\pi}{p} \sin \frac{(p-1)n\pi}{p}$$

وقتی $m+n$ بر $2p$ بخش پذیر و $m-n$ بر $2p$ بخش ناپذیر باشد برابر

$-\frac{p}{2}$ ؛ وقتی $m-n$ بر $2p$ بخش پذیر و $m+n$ بر $2p$ بخش ناپذیر باشد برابر

$\frac{p}{2}$ و وقتی هر دو عدد $m+n$ و $m-n$ بر $2p$ بخش پذیر و یا هر دو بر $2p$

بخش ناپذیر باشند، برابر صفر است.

۳۲۸. ثابت کنید:

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \cos \frac{6\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

۳۲۹. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن، این عددها باشند:

$$\text{الف) } \sin^2 \frac{\pi}{2n+1}, \sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \sin^2 \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1};$$

$$\text{ب) } \cotg^2 \frac{\pi}{2n+1}, \cotg^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \cotg^2 \frac{3\pi}{2n+1}, \dots, \cotg^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

۳۳۰. حاصل این مجموع‌ها را پیدا کنید:

$$\text{الف) } \cotg^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cotg^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cotg^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cotg^2 \frac{n\pi}{2n+1};$$

$$\text{ب) } \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{cosec}^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

۳۳۱. این حاصل ضرب‌ها را محاسبه کنید:

$$\text{الف) } \sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1},$$

$$\sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

و

$$\text{ب) } \cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{3\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1}$$

$$\cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n} \cdot \cos \frac{3\pi}{2n} \dots \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

و

۳۳۲. به کمک نتیجه‌هایی که در مسئله ۳۳۰ به دست آورده‌اید، ثابت

کنید، به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار مجموع

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

بین دو مقدار زیر قرار دارد:

$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6},$$

$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{\pi^2}{6}$$

یادداشت: به‌خصوص، از حل مسأله ۳۳۲ می‌توان نتیجه گرفت:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

که در آن، منظور از رشته نامتناهی $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ عبارت است

از حد مجموع $\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + 1$ ، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند.



۳۳۳. الف) دایره محیطی n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_n$ ، و نقطه M واقع بر محیط این دایره داده شده است. ثابت کنید، مجموع مجذورهای فاصله‌های نقطه M از رأس‌های n ضلعی، بستگی به جای نقطه M ندارد و، اگر شعاع دایره را R فرض کنیم، این مجموع برابر است با $2nR^2$.

ب) نقطه M را در صفحه n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_n$ و مرکز n ضلعی را O و فاصله بین دو نقطه M و O را l می‌گیریم. ثابت کنید، مجموع مجذورهای فاصله‌های نقطه M تا رأس‌های n ضلعی، تنها به l و R بستگی دارد و برابر است با $n(R^2 + l^2)$ ، شعاع دایره محیطی n ضلعی است).
ج) ثابت کنید، حکم مسأله ۳۳۳-ب)، برای حالتی هم که نقطه M ، در صفحه n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ واقع نباشد، درست است.

۳۳۴. M را نقطه‌ای از کمان $A_1 A_n$ روی دایره محیطی n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_n$ می‌گیریم ثابت کنید:

الف) در حالت زوج بودن n ، مجموع مجذورهای فاصله‌های از نقطه M تا رأس‌هایی که اندیس زوج دارند، برابر است با مجموع مجذورهای فاصله‌های از نقطه M تا رأس‌هایی که اندیس فرد دارند.

ب) در حالت فرد بودن n ، مجموع فاصله‌های از نقطه M تا رأس‌هایی از n ضلعی که اندیس زوج دارند، برابر است با مجموع فاصله‌های از نقطه M تا رأس‌هایی از n ضلعی که اندیس فرد دارند.

۳۳۵. شعاع دایره محیطی n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_n$ را R می‌گیریم.

ثابت کنید:

الف) مجموع مجذورهای همه ضلع‌ها و مجموع مجذورهای همه قطرهای این n ضلعی منتظم، برابر است با $n^2 R^2$.

ب) مجموع همه ضلع‌ها و همه قطرهای، در این n ضلعی، برابر است با

$$Rn \cot g \frac{\pi}{2n}$$

ج) حاصل ضرب طول‌های همه ضلع‌ها و همه قطرهای n ضلعی، برابر است با

$$n^{\frac{n}{2}} \cdot R^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

۳۳۶*. توان پنجاهم طول هر یک از ضلع‌ها و هر یک از قطرهای یک صدضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R را پیدا کرده‌ایم. مطلوب است، مجموع همه این عددها.



۳۳۷. z عددی است مختلط و می‌دانیم $\left| z + \frac{1}{z} \right| = a$. حداکثر و حداقل

مقدار مدول $|z|$ ، برای عدد مختلط z چقدر است؟

۳۳۸. مجموع n عدد مختلط، برابر صفر شده است. ثابت کنید، در بین این عددها، دو عدد وجود دارد که، تفاضل آرگومان‌های آن‌ها، از ۱۲۰ درجه کمتر نیست.

۳۳۹. $c_1, c_2, \dots, c_n$ و z عددهایی مختلط‌اند و می‌دانیم

$$\frac{1}{z-c_1} + \frac{1}{z-c_2} + \dots + \frac{1}{z-c_n} = 0$$

ثابت کنید، اگر عددهای $c_1, c_2, \dots, c_n$ را، به عنوان رأس‌های یک n ضلعی، بر صفحه عددهای مختلط در نظر بگیریم، آن وقت، عدد z ، نقطه‌ای از درون این n ضلعی را مشخص می‌کند.

۱۱. چند مسأله از نظریه عددها

۳۴۰. قضیه فرما. p عددی است اول. ثابت کنید، برای هر عدد درست a ، تفاضل $a^p - a$ بر p بخش پذیر است.

یادداشت. در مسأله ۴۶، حالت‌های خاصی از قضیه فرما را آورده بودیم.

۳۴۱. قضیه اولر. N را عددی درست و r را تعداد عددهای درستی از دنباله

$$1, 2, 3, \dots, N-1$$

می‌گیریم که، هر کدام از آن‌ها، نسبت به N اول است. ثابت کنید، اگر a عدد درست دلخواهی باشد که نسبت به N اول است، آن وقت $a^r - 1$ بر N بخش پذیر است.

یادداشت. اگر خود N عددی اول باشد. آن وقت همه عددهای دنباله

$$1, 2, 3, 4, \dots, N-1 \quad (*)$$

نسبت به N اول می‌شود، یعنی در این حالت $r = N - 1$. در این حالت قضیه، اولر به این صورت درمی‌آید:

اگر N عددی اول باشد، عدد $a^{N-1} - 1$ بر N بخش پذیر است؛ به این ترتیب، قضیه فرما (مسأله ۳۴۰)، حالت خاصی از قضیه اولر است.

اگر $N = p^n$ و p عددی اول باشد، آن وقت از تعداد $1 = p^n - 1$ عددی که در دنباله $(*)$ وجود دارد، تنها عددهای $p, 2p, 3p, \dots, N - p$ (که برابر است با $1 - p^{n-1}$)، نسبت به عدد $N = p^n$ اول نیستند، در این حالت

$$r = (p^n - 1) - (p^{n-1} - 1) = p^n - p^{n-1}$$

به این ترتیب، در این حالت، قضیه اولر به این صورت درمی‌آید: اگر p عدد اول و عدد درست a بخش ناپذیر بر p باشد، آن وقت تفاضل

$$a^{p^n - p^{n-1}} - 1 \text{ بر } p^n \text{ بخش پذیر است.}$$

اگر $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ و $p_1, p_2, \dots, p_k$ ، عددهایی اول و دوه‌دو متمایز باشند، آن وقت تعداد r (یعنی تعداد عددهای درست کمتر از N و نسبت به N اول) از دستور زیر به دست می‌آید:

$$r = N \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

که در حالت خاص، وقتی که N برابر توانی از عدد اول p باشد: $N = p^n$ ، به همان دستور قبلی می‌رسیم:

$$r = p^n \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^n - p^{n-1}$$

۳۴۲* اگر فرض کنیم $k = 5^n - 5^{n-1}$ ، آن وقت بنابر قضیهٔ اول، باید تفاضل $1 - 2^k$ بر 5^n بخش پذیر باشد (مسأله ۳۴۱ و به ویژه یادداشت پایان آن را ببینید). ثابت کنید، تفاضل $1 - 2^k$ ، به ازای هر مقدار $k < 5^n - 5^{n-1}$ ، بر 5^n بخش پذیر نیست.

۳۴۳* توان‌های متوالی عدد ۲ را می‌نویسیم:

... ۴۰۹۶، ۲۰۴۸، ۱۰۲۴، ۵۱۲، ۲۵۶، ۱۲۸، ۶۴، ۳۲، ۱۶، ۸، ۴، ۲

در این دنبالهٔ عددها، رقم‌های یکان عددها، با دورهٔ تناوبی برابر ۴، تکرار می‌شوند:

... ۶؛ ۴، ۲، ۸؛ ۶؛ ۴، ۲، ۸؛ ۶؛ ۴، ۲

ثابت کنید، با آغاز از جمله‌ای در دنبالهٔ توان‌های ۲، ده رقم سمت راست عددها، به صورت دنباله‌ای متناوب درمی‌آیند. طول این تناوب را پیدا کنید. این تناوب از چه عددی آغاز می‌شود؟

۳۴۴* ثابت کنید، توانی از عدد ۲ وجود دارد، به نحوی که ۱۰۰۰ رقم سمت راست آن، وقتی که در عددنویسی به‌مبنای ۱۰ نوشته شده باشد، تنها از رقم‌های ۱ و ۲ تشکیل شده است.

۳۴۵. دو عدد طبیعی و متمایز m و n را، يك «جفت خوب» می‌نامیم، وقتی که عامل‌های اول یکسانی داشته باشند (در حالت کلی، ممکن است توان این عامل‌های اول، در دو عدد، یکی نباشد). مثلاً دو عدد $۹۰ = ۲ \times ۳^۲ \times ۵$ و $۱۵۰ = ۲ \times ۳ \times ۵^۲$ ، يك «جفت خوب» را تشکیل می‌دهند.

دو عدد m و n را يك «جفت خیلی خوب» می‌نامیم، وقتی که، علاوه بر دو عدد m و n ، دو عدد $m+۱$ و $n+۱$ هم، يك «جفت خوب» درست کنند. مثلاً دو عدد $۶ = ۲ \times ۳$ و $۴۸ = ۲^۴ \times ۳$ ، يك «جفت خیلی خوب» اند، زیرا $۷ = ۶ + ۱$ و $۴۹ = ۴۸ + ۱ = ۷^۲$.

آیا در بین عددهای طبیعی، مجموعه همه «جفت‌های خیلی خوب»، مجموعه‌ای متناهی است یا نامتناهی؟

۳۴۶. يك تصاعد حسابی نامتناهی با جمله اول a و قدر نسبت d در نظر بگیرید و a و d را عددهایی طبیعی فرض کنید:

$$a, a+d, a+۲d, a+۳d, \dots$$

ثابت کنید، در بین جمله‌های این تصاعد، بی‌نهایت جمله وجود دارد که در تجزیه متعارف هریک از آن‌ها، عامل‌های اول یکسانی به دست می‌آید (توان این عامل‌های اول، لزومی ندارد با هم برابر باشند).

۳۴۷. قضیه ویلسون*. ثابت کنید، اگر p عددی اول باشد، آن وقت عدد $۱ + (p-۱)!$ بر عدد p بخش پذیر است؛ ولسی اگر p عددی مرکب باشد، آن وقت عدد $۱ + (p-۱)!$ بر p بخش پذیر نیست.

۳۴۸. ثابت کنید

(الف) برای هر عدد اول p ، می‌توان عددهای درست x و y را طوری پیدا کرد که $۱ + x^۲ + y^۲$ بر p بخش پذیر باشد.

(ب*) اگر در تقسیم عدد اول p بر ۴، به باقی مانده واحد برسیم، آن وقت عدد درست x وجود دارد، به نحوی که $۱ + x^۲$ بر p بخش پذیر باشد (در حالت

(*) جان ویلسون (John Wilson: ۱۷۱۴-۱۷۹۳)، ریاضی‌دان و اخترشناس برجسته اسکاتلندی.

فرد بودن عدد اول p ، یعنی در حالت $p \neq 2$ ، شرطی که برای p داده ایم، شرط لازم و کافی برای وجود این عدد x است).

یادداشت. مسأله ۳۴۸، به بخشی از نظریه عددها مربوط می شود که درباره نمایش عددهای طبیعی، به صورت مجموعی از توان های n ام عددهای طبیعی دیگر ($n > 1$) مطالعه می کند. مثلاً از نتیجه مسأله ب) می توانیم به این نتیجه برسیم که: عدد طبیعی N را، تنها وقتی می توانیم به صورت مجموع مجذورهای دو عدد طبیعی نشان دهیم که، در تجزیه متعارف عدد N ، تنها با توان های زوج عامل های اول به صورت $4n+3$ سروکار داشته باشیم (یعنی، همه این عامل ها، در تقسیم بر ۴، باقی مانده ای برابر ۳ داشته باشند).

از حکم مسأله ۳۴۸ - الف) می توان قضیه بسیار جالبی نتیجه گرفت: هر عدد طبیعی را، می توان به صورت مجموع مجذورهای چهار عدد طبیعی (و یا تعداد کمتری) نشان داد. و این به نوبه خود، به ما امکان می دهد تا ثابت کنیم. هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع محدودی از توان های چهارم عددهای طبیعی نشان داد؛ مثلاً ثابت می شود که، هر عدد طبیعی، قابل بیان به صورت مجموع توان های چهارم ۵۳ عدد طبیعی (یا کمتر) است (روش های پیچیده ای وجود دارد که، به کمک آن ها، می توان به جای ۵۳، عدد ۲۱ را قرار داد. حتی به احتمال زیاد، می توان این نتیجه را هم، دقیق تر کرد. بعضی ملاحظه ها نشان می دهد که، هر عدد طبیعی را می توان (احتمالاً) به صورت مجموعی از توان های چهارم نوشت که تنها شامل ۱۹ جمله باشد). همچنین ثابت شده است که، هر عدد طبیعی را، می توان به صورت مجموعی که شامل ۹ مکعب کامل یا بیشتر باشد، نشان داد (در این جا، به جای عدد ۹، نمی توان عدد کوچکتری قرار داد).

همه این حکم ها، حالت های خاصی از قضیه بسیار جالب زیرند: برای هر عدد مثبت و درست k ، عددی مانند N وجود دارد (که البته، بستگی به k دارد)، به نحوی که هر عدد درست را بتوان به صورت مجموعی از توان های

ام N عدد طبیعی نوشت*.

برای اثبات این قضیه، راه‌های مختلفی وجود دارد، ولی تا آن‌جا که ما می‌دانیم، همه این روش‌ها پیچیده‌اند و از ریاضیات عالی استفاده کرده‌اند. تنها یو. د. لینیک، ریاضی‌دان اتحاد شوروی بود که توانست، در سال ۱۹۴۲، راه حل خالص حسابی این قضیه را پیدا کند (که البته، کاملاً بغرنج است). همچنین، ثابت شده است که، هر عدد گویا را، می‌توان به صورت مجموعی از مکعب‌های کامل عددهای گویا نوشت که تعداد جمله‌های آن از ۳ تجاوز نمی‌کند. در ضمن، این مطلب هم جالب است که، عدد ۱ را نمی‌توان به صورت مجموع مکعب‌های دو عدد گویا نشان داد.

۳۴۹. ثابت کنید، عددهای اول، دنباله‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

۳۵۰. الف) ثابت کنید، بین جمله‌های تصاعدی حسابی

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, \dots;$$

$$5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, \dots$$

بی‌نهایت جمله وجود دارد، که عددهایی اول‌اند.

ب) ثابت کنید، بین جمله‌های تصاعد حسابی

$$11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, \dots$$

بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

با روش حل مسأله‌های ۳۵۰، ولی اندکی طولانی‌تر، می‌توان ثابت کرد، بین جمله‌ها تصاعد حسابی

$$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, \dots$$

بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. همچنین، گزاره کلی زیر هم درست است: اگر

(*) این قضیه را، برای نخستین بار، ادوارد وارینگ. ریاضی‌دان انگلیسی (Edward Waring; ۱۷۳۴ - ۱۷۹۸) مطرح کرد و به همین مناسبت، اغلب آن را قضیه وارینگ می‌گویند.

در يك تصاعد حسابی، جمله اول و قدر نسبت تصاعد، نسبت به هم اول باشند، در بین جمله‌های آن، بی نهایت عدد اول پیدا می‌شود. البته، روش اثبات این گزاره، به اندازه کافی پیچیده است. این نکته را هم یادآوری کنیم که اثبات رسمی این گزاره را در نظریه عددها (به نحوی که از روش‌های ریاضیات عالی استفاده نشده است) برای نخستین بار آ. سلبرگ (A. Selberg) ریاضی‌دان دانمارکی در سال ۱۹۵۰ ارائه داد. این اثبات، گرچه براساس روش‌های مقدماتی حساب است، ولی به اندازه کافی، طولانی و پیچیده است؛ قبل از آن همه اثبات‌های این گزاره، بر مبنای ریاضیات عالی قرار داشتند.

حل مسأله‌ها

۱. A و B را، به ترتیب، اولین و دومین سرباز انتخابی می‌گیریم. اگر A و B در يك ردیف از آرایش مستطیلی باشند، آن وقت B از A بلندتر است، زیرا A کوتاه‌ترین سرباز از ردیفی است که در آن قرار دارد. اگر A و B در يك ستون باشند، باز هم A از B بلندتر است، زیرا B بلندترین سرباز ستون خود است. سرانجام، اگر A و B متعلق به دو ردیف مختلف و دو ستون مختلف باشند آن وقت، اگر C را سربازی بگیریم که با A در يك ردیف و با B در يك ستون باشد، A از B بلندتر می‌شود، زیرا B از C و C از A بلندتر است. به این ترتیب، در هر حال، B از A بلندتر است.

۴. تعداد کل دست‌هایی که تاکنون به هم داده شده است، عددی زوج است، زیرا وقتی A و B به هم دست می‌دهند، دو واحد به مجموع دست‌دادن‌ها اضافه می‌شود (يك واحد به مجموع دست‌دادن‌های A و يك واحد به مجموع دست‌دادن‌های B). اکنون فرض کنید، n نفر و هر کدام به تعدادی فرد، دست داده باشند؛ روشن است که اگر بخواهیم تعداد کل دست‌دادن‌ها زوج باشد، باید تعداد این افراد هم عددی زوج باشد (زیرا، اگر عددهای فرد را، به تعدادی فرد با هم جمع کنیم، عددی زوج به دست نمی‌آید).

۳. A را یکی از این ۶ نفر می‌گیریم. روشن است که تنها دو حالت برای A وجود دارد:

الف) A با سه نفر B_1 ، B_2 و B_3 آشناست.

ب) A با سه نفر C_1 ، C_2 و C_3 از پنج نفر دیگر ناآشناست.

[اگر A حداکثر با دو نفر از پنج نفر دیگر آشنا باشد، به معنای آن است که دست کم با سه نفر ناآشناست، و اگر A حداکثر با دو نفر ناآشنا باشد، به معنای آن است که دست کم با سه نفر آشناست.]

در حالت الف): اگر بین سه نفر B_1 ، B_2 و B_3 ، دست کم دو نفر با هم آشنا باشند (و مثلاً B_1 و B_2)، آن وقت، سه نفر A ، B_1 و B_2 گروهی را تشکیل می‌دهند که دو به دو با هم آشنا هستند. ولی اگر بین B_1 ، B_2 و B_3 ، دو نفر آشنا وجود نداشته باشد، آن وقت این سه نفر، گروهی را تشکیل می‌دهند که دو به دو با هم آشنا نیستند.

به همین ترتیب در مورد حالت ب): اگر C_1 ، C_2 و C_3 دو به دو یکدیگر را بشناسند، گروه مورد نظر ما را تشکیل می‌دهند و اگر دست کم دو نفر (و مثلاً C_1 و C_2) با هم آشنا نباشند، آن وقت گروه سه نفری A ، C_1 و C_2 ، گروه مورد نظر مسأله است.

۴. a) هر يك از N نفر حاضر در جلسه می‌تواند دارای ۰، ۱، ۲، ...، یا $N-1$ آشنا باشد، یعنی بزرگترین تعداد ممکن نوع آشنایی‌ها برابر است با N . ولی اگر تعداد آشنای کسی ۰ باشد، آن وقت نمی‌توان کسی را پیدا کرد که دارای $N-1$ آشنا باشد. به این ترتیب، برای N نفر، حداکثر $N-1$ نوع آشنایی می‌توان در نظر گرفت، یعنی باید دست کم دو نفر وجود داشته باشند که، تعداد آشنای آن‌ها، یکی باشد (اصل دیریکله را در صفحه ۸ ببینید).

b) تعداد افراد جلسه را N می‌گیریم و آن‌ها را با اندیس‌های از ۱ تا N مشخص می‌کنیم (مثلاً A_1 ، A_2 ، ...، A_N). اکنون، این موقعیت را در نظر می‌گیریم: فرد A_{N-i} به شرط $i < \frac{N}{2}$ ، با همه افراد، به جز i نفر اول آشناست: A_N با همه دیگران، A_{N-1} با همه دیگران به جز نفر اول، A_{N-2} با همه دیگران به جز دو نفر اول و دوم، ... در ضمن، بقیه افراد، هیچ آشنای دیگری ندارند: مثلاً در حالت $N=3$ ، نفر سوم با دو نفر اول و دوم آشناست، ولی هر يك از نفرهای دوم و اول، تنها با همان نفر سوم آشنائی

دارد؛ در حالت $N=۴$ ، نفر چهارم ($A_۴$) با سه نفر آشنایی دارد ($A_۴, A_۱$ و $A_۳$)، نفر سوم ($A_۳$) با دو نفر ($A_۴$ و $A_۲$)، نفر دوم ($A_۲$) با دو نفر ($A_۴$ و $A_۳$) و نفر اول ($A_۱$) فقط با یک نفر ($A_۴$) [روشن است که آشنایی‌ها را دو طرفه در نظر گرفته ایم: اگر a با b آشناست، b هم a را می‌شناسد]. به همین ترتیب، می‌توان به سادگی روشن کرد که، اگر تعداد آشنای A_i را n_i بگیریم ($i=۱, ۲, \dots, N$)، آن وقت، برای $N=۲k+۱$ خواهیم داشت:

$$n_۱=۱, n_۲=۲, \dots, n_k=k, n_{k+۱}=k,$$

$$n_{k+۲}=k+۱, \dots, n_N=N-۱$$

و برای $N=۲k$:

$$n_۱=۱, n_۲=۲, \dots, n_{k+۱}=k+۱, n_{k+۲}=k+۱,$$

$$n_{k+۳}=k+۲, \dots, n_N=N-۱$$

به این ترتیب، در موقعیتی که در نظر گرفته ایم، نمی‌توان سه نفر پیدا کرد که تنها آشنای آن‌ها یکی باشد.

۵. اگر همه افراد جلسه با هم آشنا باشند، وجود چنین امکانی روشن است. اکنون فرض می‌کنیم، از بین شرکت کنندگان در جلسه، مثلاً A و B با هم آشنا نباشند. هر یک از این دو نفر از بین $(۲n-۲)$ نفر بقیه، دست کم n آشنا دارد. چون $۲+ (۲n-۲) = ۲n = n+n$ بنابراین، A و B ، دست کم دارای دو آشنای مشترک $C_۱$ و $C_۲$ هستند. به این ترتیب می‌توانیم A و B را دور میز گرد، روبه‌روی یکدیگر بنشانیم و $C_۱$ و $C_۲$ را در بین آن‌ها قرار دهیم.

۶. A را دانشمندی می‌گیریم که بیش از همه دیگران، آشنا داشته باشد، و تعداد آشنای او را n می‌گیریم، (ممکن است، تعداد کسانی که بیشترین آشنایان را دارند، بیش از یک نفر باشد؛ در این صورت، A را یکی از آن‌ها در نظر می‌گیریم). روشن است که $n > ۰$ ، زیرا فرض مسأله بر این است که، بعضی از شرکت کنندگان در کنگره، بعضی دیگر را می‌شناسند.

همه کسانی که با A آشنا هستند، تعداد آشنایهای مختلفی دارند (زیرا A ، آشنای مشترک هردو نفر آنهاست)؛ به جز این، هیچ کدام از آنها، بیش از n آشنا ندارد. بنابراین B ، یکی از آشنایهای A باید الزاماً تنها يك نفر را بشناسد، نفر دومی از آشنایهای A درست ۲ نفر، نفر سوم درست ۳ نفر، ... و سرانجام، آخرین نفر، مثل A ، n آشنا دارد. وجود فردی مانند B ، حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۷. سه نماینده را، به دلخواه، از بین نماینده‌ها انتخاب می‌کنیم بین این سه نفر، دو نفر وجود دارند که می‌توانند به يك زبان با هم صحبت کنند. این دو نفر را در يك اطاق جا می‌دهیم. از بین ۹۹۸ نماینده باقی مانده، دوباره سه نفر را انتخاب می‌کنیم؛ در بین آنها، دو نفر پیدا می‌شوند که می‌توان، آنها را در يك اطاق جاداد. با همین روش کار را ادامه می‌دهیم تا تنها چهار نفر A ، B ، C و D باقی بمانند. اگر هردوتایی از آنها بتوانند با زبانی مشترک صحبت کنند، مانعی برای تقسیم آنها در دو اطاق پیش نمی‌آید. ولی اگر مثلاً A و B زبان مشترکی نداشته باشند، به معنای آن است که هم C و هم D می‌توانند مترجم آنها باشند (زیرا بنابر شرط مسأله، باید سه نفر A و B و C یا سه نفر A و B و D از نظر زبان مشترک، خودکفا باشند). در این صورت می‌توانیم، مثلاً A و C را در يك اطاق و B و D را در اطاق دیگر جا دهیم.

۸. A را یکی از شرکت کنندگان در گردهم‌آیی می‌گیریم. A می‌تواند با هریک از ۱۶ نفر دیگر، صحبت کند. به آسانی می‌توان فهمید که از بین سه زبان رسمی، زبانی وجود دارد که A باید دست کم با ۶ نفر، به وسیله آن زبان صحبت کند، زیرا اگر به وسیله هر زبان نتواند با بیش از ۵ نفر تماس بگیرد، نمی‌تواند روی هم با بیش از ۵×۳ ، یعنی ۱۵ دانشمند تماس داشته باشد، در حالی که بنابر شرط مسأله، هردو دانشمند دلخواه، می‌توانند با زبان مشترکی باهم صحبت کنند (این زبان را، زبان اول می‌نامیم). اگر در بین این ۶ نفر، دو دانشمند باشند که بتوانند با همین زبان با یکدیگر صحبت کنند، درستی حکم مسأله روشن است. در غیر این صورت، این ۶ دانشمند،

برای صحبت با هم، تنها می‌توانند از دو زبان (غیر از زبان اول) استفاده کنند. B را دانشمندی از بین این ۶ نفر فرض می‌کنیم. B باید با سه نفر از این پنج نفر، با یک زبان صحبت کند (که ما آن را زبان دوم می‌نامیم)؛ در واقع اگر غیر از این باشد، بین این ۵ نفر، بیش از $4 = 2 \times 2$ نفر پیدا نمی‌شود که B بتواند با آن‌ها صحبت کند. اگر بین این سه نفر، دست کم دو نفر بتوانند به زبان دوم با هم صحبت کنند (مثلاً دانشمندان با نام‌های C و D)، آن وقت B و C و D می‌توانند با زبان دوم، با یکدیگر صحبت کنند و حکم مسأله درست است. در حالتی که این سه دانشمند می‌توانند با زبان سوم با هم صحبت کنند، آن وقت خود آن‌ها، گروه سه نفری مورد نظر مسأله را تشکیل می‌دهند.

۹.۱) یکی از شرکت کنندگان در جلسه را A ، و همه آشناهای او را $A_1, A_2, \dots, A_k$ می‌نامیم. روشن است که، بین $A_1, A_2, \dots, A_k$ نمی‌توان دو نفر را پیدا کرد که با هم آشنا باشند؛ ولی هر دو تای آن‌ها، و مثلاً A_i و A_j ، دارای دو آشنای مشترک هستند که یکی همان A است و دیگری را A_{ij} می‌نامیم (در این جا $i, j = 1, 2, \dots, k$ و $i \neq j$). در ضمن، روشن است که بین $\frac{1}{4}k(k-1)$ شرکت کننده A_{ij} نمی‌توان دو نفر را پیدا کرد که برهم منطبق باشند، زیرا آن وقت، این فرد و A ، کم‌تر از سه آشنای مشترک نخواهند داشت. از طرف دیگر، هر شرکت کننده‌ای که با A آشنا نیست، دو آشنای مشترک با A خواهد داشت (که البته به مجموعه $A_1, A_2, \dots, A_k$ متعلق اند). می‌بینیم، همه شرکت کنندگانی که با A آشنا نیستند، عبارتند از $A_{12}, A_{13}, \dots, A_{k-1,k}$ ، در نتیجه، اگر تعداد همه شرکت کنندگان در جلسه را n بگیریم، باید داشته باشیم:

$$n = 1 + k + \frac{1}{4}k(k-1) \quad (*)$$

(در این رابطه: ۱ متناظر با A ، k متناظر با A_i ها و $\frac{1}{4}k(k-1)$ متناظر با A_{ij} هاست).

برابری (*) را می‌توان به صورت معادله درجه دوم زیر نوشت:

$$k^2 + k - (2n - 2) = 0 \quad (**)$$

که از آن به دست می‌آید:

$$k = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (2n - 2)} = \frac{\sqrt{8n - 7} - 1}{2}$$

(ریشه دیگر معادله (**)) منفی است و به کار ما نمی‌آید). به این ترتیب، تعداد آشنای A ، که به وسیله k مشخص می‌شود، فقط به n (تعداد همه شرکت کنندگان در جلسه) بستگی دارد و، اگر به جای A شخص دیگری را در نظر می‌گرفتیم، باز هم به همین جواب می‌رسیدیم.
(b) با توجه به (*) داریم:

$$n = \frac{1}{2}k(k+1) + 1 \quad (***)$$

از این جا نتیجه می‌شود که، عدد n ، به اندازه يك واحد از عدد $\frac{1}{2}k(k+1)$

بزرگتر است. هر عدد به صورت $\frac{1}{2}k(k+1)$ را، عدد مثلثی گویند. وقتی

n با دستور (***) بیان شده باشد، تعداد آشنای هر فرد، با توجه به شرطهای مسأله، برابر است با k ($k = 1, 2, \dots$ ، عددی طبیعی است).

۱۵. سه شهروند A ، B و C را در نظر می‌گیریم. روشن است، می‌تواند

این حالت پیش آید که هر سه نفر با هم دوست باشند؛ همچنین ممکن است یکی از آن‌ها (مثلاً A) با دو نفر دیگر (B و C) دشمن باشد، ولی B و C با هم دوست باشند. پس برای این که A و B و C با یکدیگر دوست شوند، کافی است A با همه دوستانش دعوا و با همه دشمنانش آشتی کند. به سادگی معلوم می‌شود که دو حالت دیگر (وقتی که هر سه شهروند A و B و C دشمن هم باشند و وقتی که یکی از شهروندان، و مثلاً A ، دوست B و C ، ولی B و C دشمن هم باشند) ممکن نیست. در واقع، در هر دو حالت از بین سه

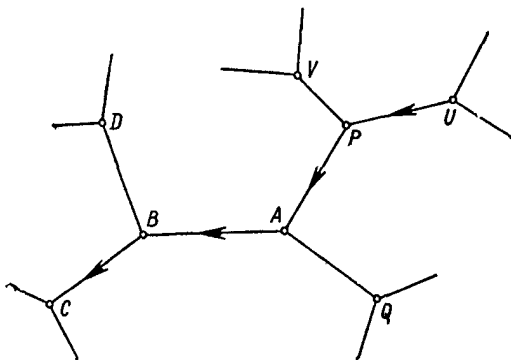
جفت A و A' ، B و B' ، C و C' ، ۱ یا ۳ زوج دشمن و ۰ یا ۲ زوج دوست یکدیگرند، یعنی اگر تعداد زوج‌های دشمن را c و تعداد زوج‌های دوست را e بگیریم، c عددی فرد و e عددی زوج است. در این حالت‌ها، وقتی A یا B یا C با دوستان خود دعوا و با دشمنان خود آشتی کنند، یا عدد فرد c و عدد زوج e تغییر نمی‌کند و یا به ترتیب به عدد فرد c' و عدد زوج e' تبدیل می‌شوند و، به این ترتیب، هر گزسه نفر A و B و C ، نمی‌توانند با هم دوست شوند (چون عدد c نمی‌تواند برابر عدد زوج ۰ شود) که با شرط مسئله متناقض است.

شرحی که برای «رابطه‌های دوستی» بین سه شهروند A و B و C دادیم، به ما امکان می‌دهد تا، این رابطه‌ها را، برای تمامی جمعیت شهر، به این ترتیب توضیح دهیم: مردم شهر را می‌توان به دو گروه $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ تقسیم کرد، به نحوی که هر ساکن شهر یا به گروه اول و یا به گروه دوم تعلق دارد، ولی به طور هم‌زمان نمی‌تواند متعلق به هر دو گروه باشد. هر دو عضو یکی از گروه‌ها با هم دوست و هر دو عضو متعلق به گروه دیگر با هم دشمن‌اند. اکنون فرض کنید، به سه شهروند A و B و C ، شهروند D را اضافه کنیم. اگر A و B با هم دوست باشند، آن وقت اگر D دوست یکی از آن‌ها باشد، دوست دیگری هم خواهد بود و، بنابراین، D متعلق به همان گروهی است که A و B در آن هستند. اگر A و B دشمن باشند، آن‌گاه D تنها با یکی از آن‌ها می‌تواند دوست باشد (و حتماً تنها با یکی از آن‌ها). این استدلال نشان می‌دهد که می‌توان چهار شهروند A ، B ، C و D را، به زوج‌هایی متعلق به گروه‌های $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ تقسیم کرد (اگرچه ممکن است یکی از این گروه‌ها «لبریز» شود و این مربوط به حالتی است که هر چهار شهروند A ، B ، C و D با هم دوست باشند). با ادامه این روش، یعنی با اضافه کردن متوالی یک نفر به تعداد شهروندان، می‌توان امکان تقسیم همه ۱۰۰۰۰ نفر را به دو گروه $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ روشن کرد.

اکنون دیگر می‌توان حکم مسئله را، به سادگی ثابت کرد. اگر همه شهروندان با هم دوست باشند، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. ولی، اگر

هیچ کدام از دو گروه M و N «تنهی» نباشد، کافی است، هر روز، یکی از عضوهای گروه M ، گروه خود را ترك كند و به گروه N ملحق شود. اگر تعداد عضوهای گروه M برابر k باشد، آن وقت همه ساکنان شهر بعد از k روز با هم دوست خواهند شد. به این ترتیب، حداکثر بعد از ۵۰۰۰ روز (به تقریب ۱۴ سال)، همه ساکنان شهر با هم دوست می‌شوند (زیرا، دست کم یکی از گروه‌های M یا N ، بیش از ۵۰۰۰ عضو ندارد).

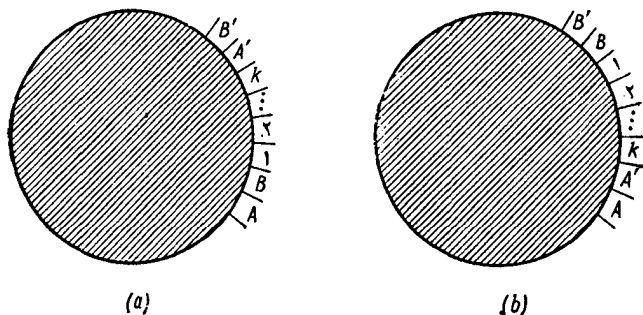
۱۱. هر قلعه را با يك نقطه و هر «جاده» را، که بین دو قلعه است، با پاره‌خط راستی نشان می‌دهیم (شکل ۴). تعداد این پاره‌خط‌های راست، که قلعه‌های ایالت را به هم وصل می‌کنند، متناهی است و ما آن را برابر n می‌گیریم. برای این که شوالیه در ایالت مسافرت کند، باید از جاده‌های بسیاری، و از هر کدام چند بار، بگذرد. اگر تعداد جاده‌هایی را که شوالیه عبور می‌کند برابر N بگیریم، و اگر N کمتر از $4n+1$ نباشد آن وقت، شوالیه باید، دست کم امتداد یکی از جاده‌ها، و مثلاً از قلعه A تا قلعه B را، دست کم ۵ بار طی کند؛ به جز این، دست کم سه بار طول این جاده را در يك جهت (و مثلاً از A به B) طی می‌کند. بنابراین، اگر BC و BD را دو جاده دیگر فرض کنیم که از قلعه B آغاز می‌شوند، آن وقت شوالیه، دست کم دوبار و در يك جهت به B می‌رسد (هر دو بار از A می‌آید). مثلاً



شکل ۴

این دوبار را بارهای i ام و j ام فرض کنید ($j > i$) و فرض کنید، مثلاً از B به C برود. از شرط مسأله روشن می‌شود که در بارهای i ام و j ام، نه تنها از يك قلعه (قلعه A) به B رسیده‌است، بلکه هر دوبار، از يك قلعه، به قلعه A رفته است (در شکل ۴، قلعه‌ای را که شوالیه، هر دوبار، از آن جا به A رفته است با P نشان داده‌ایم: وقتی شوالیه از B به C می‌رود، به معنای آن است که ضمن ترك B به‌چپ رفته است، بنابراین باید با ترك A به‌راست رفته باشد، یعنی از P به A آمده است) به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که مسیرهای شوالیه، که او را در بارهای i ام و j ام به B می‌رساند، برهم منطبق‌اند، مثلاً دوبار از يك قلعه به قلعه P می‌آید (که در شکل ۴، آن را با U نشان داده‌ایم) و غیره. به‌این ترتیب، اگر شوالیه، بعد از ترك قلعه خودش X ، برای این که در i امین بار به قلعه B برسد، از k قصر عبور کرده باشد، آن وقت قبل از آن که دوباره از k قلعه بگذرد تا برای بار j ام به قلعه B برسد، باید اول از قلعه X گذشته باشد و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۲. هر دو شوالیه‌ای را که با هم دشمن نباشند، دوست می‌نامیم. همه شوالیه‌ها را به‌دلخواه دور میز می‌نشانیم. فرض کنید، شوالیه A ، بعد از دشمن خودش B قرار گرفته باشد (برای روشنی مطلب، فرض می‌کنیم B در سمت راست A باشد). ثابت می‌کنیم، دو شوالیه A' و B' ، اولی دوست A و دومی دوست B ، وجود دارند، که یکی بعد از دیگری یعنی B' در سمت راست A' نشسته است (شکل ۵ - a). در واقع، تعداد دوستان A از n کمتر نیست. تعداد صندلی‌های سمت راست این n دوست A هم، برابر n است؛ در ضمن، تعداد دشمنان B از $n - ۱$ بیشتر نیست، بنابراین، دست کم، يك مورد پیدا می‌شود که، در آن، شوالیه B' (دوست B) در سمت راست شوالیه A' (دوست A) نشسته است. به همه شوالیه‌های از B تا A' ، که در سمت راست راست A نشسته‌اند، پیشنهاد می‌کنیم جاهای خود را طوری عوض کنند که، به ترتیب از A' تا B ، یعنی در جهت عکس قرار گیرند (شکل ۵ - b). به این ترتیب، A' در سمت راست دوست خود A ، و B' در



شکل ۵

سمت راست دوست خود B قرار می‌گیرند. در این صورت، تعداد زوج‌های دشمنی که پشت سر هم قرار گرفته بودند، دست کم یک واحد کمتر می‌شود (در حالتی که A' و B' با هم دشمن باشند، این کاهش برابر ۲ خواهد بود). اگر هرلین، با همین روش، کار خود را ادامه دهد، بعد از چند گام به منظور خود می‌رسد و می‌تواند شوالیه‌ها را طوری بنشانند که هر کس، در سمت راست خود، یکی از دوستان خود را داشته باشد.

۱۳. (a) سکه‌ها را به سه بخش تقسیم می‌کنیم؛ در دو بخش اول و دوم، هر کدام ۲۷ سکه و در بخش سوم، ۲۶ سکه. ابتدا دو بخش ۲۷ سکه‌ای را، با ترازو، با هم مقایسه می‌کنیم. اگر این دو بخش هم وزن باشند، سکه تقلبی در بخش ۲۶ سکه‌ای است، و اگر هم وزن نباشند، سکه تقلبی در بخش سبک‌تری است که ۲۷ سکه دارد. به این ترتیب، مسئله ما، به مسئله زیر منجر می‌شود: می‌دانیم در بین ۲۷ سکه، یک سکه تقلبی، که سبک‌تر از سکه سالم است، وجود دارد. چگونه می‌توان با سه بار استفاده از ترازو، سکه تقلبی را کشف کرد؟ در حالتی که سکه تقلبی بین ۲۶ سکه باشد، کافی است یک سکه سالم به آن اضافه کنیم، تا به همین مسئله منجر شود.

اکنون این ۲۷ سکه را، دوباره به سه بخش و در هر بخش ۹ سکه تقسیم می‌کنیم. دو بخش را با هم مقایسه می‌کنیم، اگر یکی از بخش‌ها سبک‌تر بود، سکه تقلبی در همان بخش است، و اگر این دو بخش هم وزن بودند،

سکه تقلبی در بین ۹ سکه بخش سوم است. ۹ سکه شامل سکه تقلبی را به سه بخش سه سکه‌ای تقسیم می‌کنیم، با مقایسه دو بخش، می‌توانیم متوجه شویم که، سکه تقلبی، در بین کدام سه سکه است! سرانجام با مقایسه دو سکه از بین این سه سکه، می‌توانیم سکه تقلبی را کشف کنیم.

(b) ثابت می‌کنیم، اگر k عددی طبیعی و با نابرابری $3^{k-1} < n \leq 3^k$ سازگار باشد، آن وقت می‌توان با k بار استفاده از ترازو، سکه تقلبی را از بین n سکه جدا کرد.

n سکه را به سه بخش تقسیم می‌کنیم، به نحوی که در بخش‌های اول و دوم 3^{k-1} سکه (یا کمتر) و در بخش سوم، حداکثر 3^{k-1} سکه وجود داشته باشد (این تقسیم ممکن است، زیرا $n \leq 3^k$). با مقایسه بخش‌های اول و دوم، معلوم می‌شود که، سکه تقلبی، در کدام یک از سه بخش است (حل مسأله ۱۳-a را ببینید). به این ترتیب، بعد از یکبار مقایسه به بخشی شامل 3^{k-1} سکه می‌رسیم که باید سکه تقلبی را در آن جا، پیدا کنیم (اگر این بخش، کمتر از 3^{k-1} سکه داشته باشد، آن قدر سکه سالم به آن اضافه می‌کنیم تا تعداد سکه‌ها، برابر 3^{k-1} شود). از همین روش برای 3^{k-1} سکه استفاده می‌کنیم و غیره. در هر گام، سکه‌ها را به سه بخش تقسیم و بخش شامل سکه تقلبی را مشخص می‌کنیم، روشن است که در گام k ام، سکه تقلبی کشف می‌شود.

اکنون باید ثابت کنیم که، اگر تعداد مقایسه‌ها (تعداد استفاده از ترازو) کمتر از k باشد، همیشه نمی‌توان سکه تقلبی را کشف کرد، یعنی ثابت می‌کنیم، بعد از $(k-1)$ بار مقایسه (با هر روشی که این مقایسه انجام شود)، ممکن است حالتی پیش آید که نتوانیم به سکه تقلبی برسیم.

بعد از هر مقایسه، سکه‌های باقی‌مانده به سه بخش تقسیم می‌شوند: دو بخش که آن‌ها را، به کمک ترازو، با هم مقایسه می‌کنیم و بخشی که با ترازو رابطه‌ای پیدا نمی‌کند. اگر بخش‌هایی را که در ترازو گذاشته‌ایم، به تعداد برابر سکه داشته باشند، و اگر این دو بخش هم وزن باشند، آن وقت سکه تقلبی را باید در بخش سوم جست‌وجو کرد. اگر یکی از دو بخشی که در کفه‌های ترازو گذاشته‌ایم سنگین‌تر باشد، و اگر تعداد سکه‌های دو بخش

یکی باشد، آن وقت سکه تقلبی در بخش سبک‌تر است. اگر تعداد مک‌ها در دو بخشی که در ترازو قرار می‌دهیم، برابر نباشند، و کفه با تعداد بیشتر سکه، سنگین‌تر باشد، آن وقت سکه تقلبی می‌تواند در هر يك از سه بخش باشد و، چنین آزمایشی، نمی‌تواند هیچ اطلاعی درباره سکه تقلبی به ما بدهد.

اکنون فرض کنید، در دنباله همه مقایسه‌ها، هر بار معلوم شود که سکه تقلبی در بخشی است که شامل تعداد بیشتری سکه است (یعنی نامساعدترین وضع پیش آید). در این صورت، بعد از هر مقایسه، تعداد سکه‌های بخش شامل سکه تقلبی از $\frac{1}{3}$ کمتر نمی‌شود (وقتی سکه‌ها را به بخش‌های مشخص تقسیم

می‌کنیم، دست کم در یکی از بخش‌ها، تعداد سکه‌ها کمتر از $\frac{1}{3}$ تعداد کل سکه‌ها نیست). در نتیجه بعد از $k-1$ بار مقایسه، در بخشی خواهد بود که، تعداد

سکه‌های آن، کمتر از $\frac{n}{3^{k-1}}$ نیست؛ و چون $n > 3^{k-1}$ ، بنابراین سکه تقلبی بعد از $(k-1)$ بار استفاده از ترازو، پیدا نمی‌شود.

یادداشت. پاسخ مسأله $۱۳-b$ را می‌توان به صورت کوتاه، به این ترتیب بیان کرد: حداقل تعداد مقایسه‌ها، برای کشف سکه تقلبی در n سکه برابر است با

$$\left[\log_3 \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] + 1$$

که در آن، نماد $[a]$ ، به معنای بخش درست عدد a است (صفحه ۴۵ را ببینید).

۱۴. دو مکعب دلخواه را انتخاب و، به کمک ترازو، با هم مقایسه می‌کنیم (مقایسه اول). دو حالت ممکن است پیش آید:

۱°. یکی از مکعب‌ها، سنگین‌تر از آب در آید. در این صورت، معلوم است که، از این دو مکعب، یکی آلومی نیومی و دیگری دورالیومی است. این دو مکعب را در يك کفه ترازو و در کفه دیگر، به ترتیب، هر يك از q جفت مکعب باقی مانده را (که به دلخواه و پشت سر هم انتخاب می‌کنیم)

قرار می‌دهیم. اگر این دو مکعب انتخابی سنگین تر باشند، هردو از دورایوم، اگر سبک تر باشند، هردو از آلومی نیوم و اگر با دو مکعب کفه دیگر هم وزن باشد، یکی از آلومی نیوم و دیگری از دورایوم ساخته شده است. به این ترتیب در حالت ۱°، می‌توان با ۱ بار استفاده از ترازو، تعداد مکعب‌های از جنس آلومی نیوم و تعداد مکعب‌های از جنس دورایوم را مشخص کرد.

۲° ضمن مقایسه اول، ترازو در تعادل بایستد. در این صورت، این دو مکعب، یا هردو از آلومی نیوم و یا هردو از دورایوم ساخته شده‌اند. این دو مکعب را در یک کفه ترازو می‌گذاریم. و، به ترتیب، ۹ جفت باقی مانده مکعب‌ها را با آن مقایسه می‌کنیم. فرض کنید، در k مقایسه اول، ترازو به حالت تعادل بایستد، در حالی که در $(k+1)$ امین مقایسه، تعادل ترازو به هم بخورد. (اگر $k=9$ ، آن وقت همه مکعب‌ها از یک جنس‌اند و حالت $k=0$ با حالت کلی تفاوتی ندارد). برای این که با موقعیت روشنی سروکار داشته باشیم، فرض می‌کنیم، $(k+1)$ امین جفت از مکعب‌ها، سنگین تر از دو مکعب اولیه باشد (در حالت سبک تر بودن جفت $(k+1)$ ام، شیوه استدلال فرق نمی‌کند). معنای این موقعیت آن است که، دو مکعب اولیه و همه k جفت مکعبی که قبل از آن مورد مقایسه قرار گرفته‌اند، از آلومی نیوم ساخته شده‌اند. به این ترتیب، با $k+2 = (k+1) + 1$ مقایسه، توانسته‌ایم $(k+1)$ جفت مکعب آلومی نیوم را مشخص کنیم. اکنون دو مکعب اخیر را که سنگین تر از آب درآمده‌اند با هم مقایسه می‌کنیم. اگر این دو مکعب هم وزن باشند، هر دوی آن از دورایوم و اگر هم وزن نباشند، آن که سنگین تر است از دورایوم و دیگری از آلومی نیوم ساخته شده است. در هر دو حالت، بعد از $(k+3)$ بار استفاده از ترازو، می‌توانیم دو مکعبی را پیدا کنیم که یکی از آلومی نیوم و دیگری از دورایوم ساخته شده باشد. با استفاده از این دو مکعب (و شبیه حالت ۱°) می‌توانیم با انجام $(n-k)$ مقایسه، تعداد مکعب‌های نوع‌های مختلف را، در بین $2k - 16 = 2(k+2) - 20$ مکعب باقی مانده پیدا کنیم. به این ترتیب، در حالت ۲°، تعداد مقایسه‌ها برابر است با

$$(k+3) + (n-k) = 11$$

۱۵. این سکه‌ها را به سه بخش و در هر بخش ۴ سکه، تقسیم می‌کنیم. ابتدا دو بخش را، به کمک ترازو، باهم مقایسه می‌کنیم. دو حالت پیش می‌آید. ۱° ترازو در تعادل می‌ایستد.

۲° یکی از دو بخش، سنگین‌تر از دیگری است.

هر یک از این دو بخش را، به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱° هم‌وزن بودن دو بخشی که برای مقایسه انتخاب کرده‌ایم، به معنای

آن است که سکهٔ تقلبی، در بخش سوم سکه‌هاست. سکه‌های بخش سوم را،

با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ نام‌گذاری می‌کنیم. برای مقایسهٔ دوم، سکه‌های

۱، ۲ و ۳ را در یک کفهٔ ترازو و سه سکه از ۸ سکهٔ سالم را در کفهٔ دیگر قرار

می‌دهیم. در این جا، دو حالت امکان دارد:

A. ترازو در تعادل می‌ایستد. روشن است که، در این حالت، سکهٔ ۴

تقلبی است. که اگر آن را با یک سکهٔ سالم مقایسه کنیم، سنگین‌تر یا سبک‌تر-

بودن آن روشن می‌شود.

B. ترازو در تعادل قرار نمی‌گیرد. در این حالت، سکهٔ تقلبی را باید بین

سه سکهٔ ۱، ۲ و ۳ جست‌وجو کرد. در ضمن، اگر کفهٔ مربوط به سکه‌های سالم،

سنگین‌تر باشد، این سکهٔ تقلبی سبک‌تر را از بین سکه‌های ۱، ۲ و ۳ جدا کنیم (حل

مسألهٔ ۱۳-a را ببینید). اگر کفهٔ شامل سکه‌های ۱، ۲ و ۳ سنگین‌تر باشد،

آن وقت سکهٔ تقلبی سنگین‌تر است. در این حالت هم، به‌سادگی می‌توانیم با

یک بار استفاده از ترازو، سکهٔ سنگین‌تر را پیدا کنیم.

۲° در مقایسهٔ اول، یکی از بخش‌های ۴ سکه‌ای، سنگین‌تر است، در

این صورت ۴ سکهٔ بخش سوم، سالم‌اند. چهار سکهٔ بخش سنگین‌تر را با عددهای

۱، ۲، ۳، ۴ شماره‌گذاری می‌کنیم. (اگر یکی از این سکه‌ها، سنگین‌تر از

دیگران باشد، همان سکهٔ سنگین‌تر، سکهٔ تقلبی است): چهار سکه واقع در

کفهٔ دیگر ترازو را ۱'، ۲'، ۳'، ۴' می‌نامیم (اگر یکی از این سکه‌ها،

سبک‌تر از بقیه باشد، همان سکهٔ سبک‌تر، سکهٔ تقلبی است). اکنون، سکه‌های

۱' و ۲' را در یک کفه و سکه‌های ۳، ۴ و ۲' را در کفهٔ دیگر ترازو می‌گذاریم.

(مقایسهٔ دوم). سه حالت امکان دارد:

A. ترازو به حالت تعادل است. در این صورت، یکی از سکه‌های $3'$ یا $4'$ تقلبی است. $3'$ را در یک کفه و $4'$ را در کفه دیگری می‌گذاریم (مقایسه سوم) سکه سبک‌تر، سکه تقلبی است.

B. کفه شامل سکه‌های 1 ، 2 و $1'$ سنگین‌تر است. در این حالت، سکه‌های 3 و 4 و $1'$ سالم‌اند، زیرا اگر یکی از سکه‌های 3 و 4 سنگین‌تر از بقیه و یا اگر سکه $1'$ سبک‌تر از بقیه باشد، آن وقت، در مقایسه دوم، کفه شامل سکه‌های 3 ، 4 و $2'$ سنگین‌تر می‌شد. به این ترتیب، سکه تقلبی، بین دو سکه 1 و 2 است (در این حالت، سکه تقلبی، سنگین‌تر از سکه سالم است). و یا سکه $2'$ تقلبی است (که در این صورت، سکه تقلبی سبک‌تر است)؛ در مقایسه سوم، سکه 1 را در یک کفه و سکه 2 را در کفه دیگر ترازو قرار می‌دهیم. اگر ترازو به حالت تعادل باشد. سکه $2'$ تقلبی است، و اگر یکی از دو کفه سنگین‌تر باشد، سکه سنگین‌تر تقلبی است.

C. کفه شامل سکه‌های 3 و 4 و $2'$ سنگین‌تر است؛ در این صورت، شبیه حالت قبل، می‌توان نتیجه گرفت که سکه‌های 1 و 2 و $2'$ سالم‌اند. در این حالت، یا سکه تقلبی سنگین‌تر و بین سکه‌های 3 و 4 است و یا، سکه تقلبی که سبک‌تر است، همان سکه $1'$ است. در مقایسه سوم، 3 را در یک کفه و 4 را در کفه دیگری می‌گذاریم. اگر ترازو در تعادل باشد، سکه $1'$ تقلبی است، و اگر ترازو در تعادل نباشد، سکه سنگین‌تر تقلبی است.

۱۶۰ a) کافی است حلقه سوم را از زنجیره جدا کنیم، زنجیره به سه بخش 1 ، 2 و 4 حلقه‌ای تقسیم می‌شود.

روز اول، حلقه تنها به مسافرخانه داده می‌شود. روز دوم باید حلقه روز قبل را پس گرفت و بخش 2 حلقه‌ای را به مسافرخانه تحویل داد. روز سوم حلقه تنها به مسافرخانه تحویل می‌شود. روز چهارم سه حلقه پس گرفته می‌شود و بخش چهار حلقه‌ای به صاحب مسافرخانه داده می‌شود. روزهای پنجم، ششم و هفتم، باید شبیه روزهای اول، دوم و سوم عمل کرد.

(b) با این مساله آغاز می‌کنیم: حداکثر تعداد حلقه‌های یک زنجیر (که آن را n می‌گیریم) چقدر باشد تا بتوانیم با جدا کردن k حلقه آن، روزانه

و هر روز يك حلقه را، از ۱ تا n ، پردازیم. برای حل مسأله، قبلاً باید روشن کنیم که، بهترین ترتیب جدا کردن k حلقه، کدام است! وقتی k حلقه را جدا کرده باشیم، طبیعی است که می‌توانیم، به هر تعداد از ۱ تا k ، با این k حلقه جدا شده، انتخاب کنیم (ولی اگر تکه‌ای از زنجیره که شامل $k+1$ حلقه یا کمتر در اختیار نداشته باشیم، نمی‌توانیم $k+1$ حلقه را انتخاب کنیم).

روشن است که اگر تکه‌ای شامل $k+1$ حلقه در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از k حلقه جدا شده، هر تعداد حلقه از ۱ تا $2k+1$ را انتخاب کنیم. برای امکان انتخاب $2(k+1) = 2k+2$ حلقه، باید زنجیره‌ای شامل $2(k+1)$ حلقه و یا به تعداد کمتر در اختیار داشته باشیم. روشن است که بهترین موقعیت، وقتی پیش می‌آید که زنجیره‌ای شامل $2(k+1)$ حلقه موجود باشد. در این صورت می‌توانیم، هر تعداد حلقه از ۱ تا $2k+3 = 2(k+1) + 2k+1$ حلقه را انتخاب کنیم. زنجیره بعدی مورد نیاز ما، باید شامل $4(k+1)$ حلقه باشد و غیره. اگر استدلال را به همین ترتیب ادامه دهیم، به سادگی روشن می‌شود که، بهترین موقعیت وقتی به دست می‌آید که، علاوه بر k حلقه جدا شده، زنجیره‌هایی در اختیار داشته باشیم که تعداد حلقه‌های آن‌ها، به ترتیب، چنین باشند:

$$k+1, 2(k+1), 4(k+1), 8(k+1), \dots, 2^k(k+1)$$

در چنین صورتی می‌توانیم از ۱ تا n حلقه، از يك زنجیر n حلقه‌ای انتخاب کنیم، به شرطی که

$$\begin{aligned} n &= k + [(k+1) + 2(k+1) + 4(k+1) + \dots + 2^k(k+1)] = \\ &= k + (2^{k+1} - 1)(k+1) = 2^{k+1}(k+1) - 1 \end{aligned}$$

به این ترتیب، برای $2^k \cdot k \leq n \leq 2^{k+1}(k+1) - 1$ ، کافی است k حلقه را جدا کنیم، ولی جدا کردن $k-1$ حلقه کافی نیست در حالت‌های خاص

$$k=1: 2 \leq n \leq 7 \text{ برای}$$

$$k=2: 8 \leq n \leq 23 \text{ برای}$$

برای $k=3: 24 \leq n \leq 63$

برای $k=4: 64 \leq n \leq 159$

برای $k=5: 160 \leq n \leq 383$

برای $k=6: 384 \leq n \leq 895$

برای $k=7: 896 \leq n \leq 2047$

می‌بینیم که، برای $n=2000$ ، کمترین تعداد حلقه‌ای که باید جدا شود، برابر است با ۷. این ۷ حلقه را باید طوری جدا کنیم که، علاوه بر آن‌ها، زنجیره‌هایی به ترتیب شامل ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶، ۵۱۲ و ۹۷۷ حلقه در اختیار داشته باشیم.

۰۱۷. S را ایستگاهی از مترو و T را دورترین ایستگاه به S می‌گیریم، به نحوی که در کوتاه‌ترین مسیر از S تا T ، تعداد ایستگاه‌های بین‌راه، از تعداد ایستگاه‌های بین S و هر ایستگاه دیگری، بیشتر باشد (یادست کم، کمتر نباشد). اکنون فرض کنید، ایستگاه T بسته باشد، در این صورت می‌توانیم از S به هر ایستگاه دیگر U (که بسته نیست) برویم، چون کوتاه‌ترین مسیر از S تا U ، از T نمی‌گذرد (اگر برای رسیدن از S به U ، ناچار باشیم از ایستگاه T بگذریم، به معنای آن است که فاصله بین S و U بیشتر از فاصله بین S و T است).

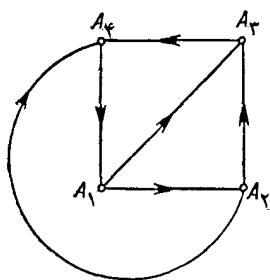
به این ترتیب، اگر U و V را دو ایستگاه دلخواه (و غیر از T) فرض کنیم، آن وقت می‌توانیم از یکی به دیگری برویم، بدون این که به ایستگاه T نیازی داشته باشیم. مثلاً، اگر U و V غیر از S باشند، می‌توانیم ابتدا از U به S و سپس از S به V برویم.

۰۱۸. حکم مسأله را، باروش استقرار ریاضی ثابت می‌کنیم. «چهارراه‌های» شهر «زورباگان» را در نظر می‌گیریم که، از هر يك از آن‌ها، بیش از دو خیابان آغاز می‌شود. اگر در این شهر، تنها دو «چهارراه» A و B وجود داشته باشد، حکم مسأله درست است: دست کم دو خیابان A و B را به هم وصل می‌کنند (اگر تنها يك خیابان وجود داشته باشد، آن وقت وقتی که رفت و آمد يك طرفه

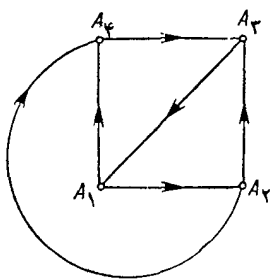
اعلام شود، مثلاً درجهت از A به B ، دیگر نمی‌توانیم خود را از B به A برسانیم). در واقع، اگر حرکت در یکی از خیابان‌ها را از A به B ، و در خیابان دیگر از B به A ، به صورت یک طرفه اعلام کنند، آن وقت می‌توان از هر «چهارراه» به «چهارراه» دیگر رفت.

اکنون فرض می‌کنیم، حکم مساله، برای شهری که تعداد «چهارراه‌های» آن بیشتر از n نیست، درست باشد؛ ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای شهری هم که $n+1$ «چهارراه» دارد، درست است. دو «چهارراه» مجاور A و B را (از بین این $n+1$ «چهارراه») در نظر می‌گیریم که به وسیله خیابان AB به هم مربوط‌اند. فرض کنید، رفت و آمد در خیابان AB ، برای مرمت، مثلاً از A به B یک طرفه باشد؛ چون بنابه فرض مساله می‌توان از B به A رسید، بنابراین باید «زنجیره‌ای» از خیابان‌ها (که شامل AB نیست) وجود داشته باشد که بتوان از طریق آن، از B به A رسید (می‌توان فرض کرد که، این «زنجیره» خیابان‌ها، خودش را قطع نمی‌کند، زیرا اگر «زنجیره» از «چهارراهی» مثل C ، دوبار عبور کند، می‌توان ردیف خیابان‌هایی را که از C آغاز و دوباره به C ختم می‌شوند، از «زنجیره» خود حذف کرد). به این ترتیب، «حلقه‌ای» S مانند وجود دارد که شبکه‌ای بسته از خیابان‌های شهر را تشکیل می‌دهد که با آغاز از A و عبور از «چهارراه»‌های بینابینی، دوباره به A می‌رسد. اکنون شهری فرضی را در نظر می‌گیریم که شامل همه «چهارراه‌های» حلقه S و یک «چهارراه» دیگر S از شهر «زورباگان» باشد. همه خیابان‌های این شهر فرضی، شامل خیابان‌های حلقه S و، در ضمن، خیابان‌هایی است که از S به چهارراه‌های S در شهر واقعی «زورباگان» می‌روند. تعداد چهارراه‌های این شهر فرضی، از $n+1$ کمتر است و در نتیجه، بنابه فرض استقرا، بایک طرفه شدن همه خیابان‌های آن، می‌توان از هر چهارراهی به هر چهارراه دیگر رفت. چون چهارراه S را به دلخواه انتخاب کردیم، بنابراین در شهر واقعی «زورباگان» هم، اگر همه خیابان‌ها یک طرفه اعلام شوند، رفت‌آمد از هر نقطه به نقطه دیگر ممکن خواهد بود.

۱۹. روشن است که، اگر تنها دو شهر در ایالات «دولفینا» وجود داشته



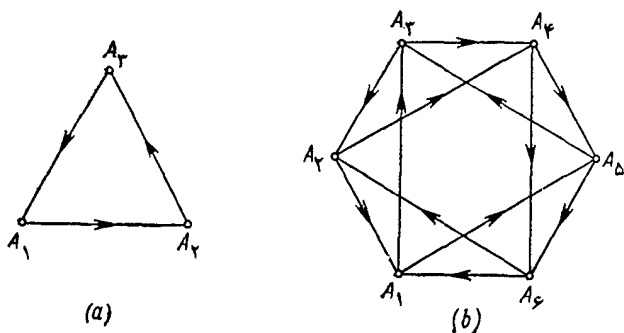
(a)



(b)

شکل ۶

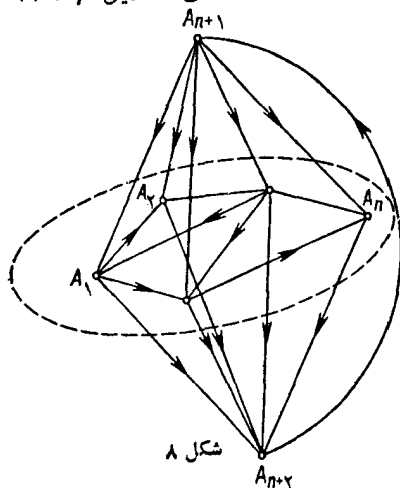
باشد و، درضمن، حرکت در جاده‌ای که این دوشهر را به هم وصل کرده است یک طرفه باشد، نمی‌توان از یکی از شهرها به سمت دیگری رفت. اکنون تعداد شهرهای ایالت را چهار می‌گیریم و آن‌ها را در رأس‌های A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 از یک چهارضلعی در نظر می‌گیریم (شکل ۶). روشن است که یا روی ضلع‌های این چهارضلعی می‌توان در یک جهت، مسیر محیط آن را پیمود (آن‌طور که در شکل ۶-ا می‌بینید)، و یا رأسی مثل A_1 وجود دارد، به نحوی که جهت حرکت روی دوجاده‌ای که آن را به دور رأس مجاور وصل می‌کند، در دو جهت مختلف است و، در نتیجه، نمی‌توان با آغاز از یک رأس، محیط چهارضلعی را «دور» زد (شکل ۶-ب). در حالت اول، رأس‌های چهارضلعی، به اصطلاح «حقوقی» برابر دارند و هر انتخابی برای جهت حرکت در روی قطرهای چهارضلعی، تفاوتی با هر انتخاب دیگر ندارد. اگر مثلاً موقعیتی را در نظر بگیریم که در شکل ۶-ا نشان داده شده است، نمی‌توانیم از شهر A_3 به شهر A_2 برویم، به شرطی که در بین راه، تنها از یک شهر دیگر گذشته باشیم. اکنون حالت دوم را در نظر می‌گیریم، وقتی که مثلاً در جاده‌های A_1A_2 و A_1A_4 ، جهت حرکت از شهر A_1 باشد. در این صورت، برای این که بتوانیم از A_2 و A_4 به A_1 برویم و شرط مسأله را هم رعایت کرده باشیم، ناچاریم جهت حرکت را در امتداد جاده‌های A_2A_3 ، A_4A_3 و A_3A_1 انتخاب کنیم، به نحوی که در شکل ۶-ب نشان داده شده است. ولی در این صورت، با توجه به تقارن، می‌توانیم حرکت در جاده A_2A_4 را به دلخواه انتخاب کنیم. در شکل ۶-ب، مسیر حرکت



شکل ۷

را از A_2 به A_4 در نظر گرفته‌ایم، ولی آن وقت برای رفتن از A_4 به A_2 ، ناچاریم از دو شهر بینابینی بگذریم. برای حالت‌های $n=3$ و $n=6$ ، به سادگی می‌توان جهت‌های حرکت را، به نحوی مشخص کرد که شرط‌های مسأله برقرار باشد (شکل ۷-ا و ۷-ب را ببینید؛ در شکل ۷-ب همه جاده‌ها را رسم نکرده‌ایم، ولی تصور آن‌ها کاملاً ساده است).

حالت کلی را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم، حکم مسأله برای n شهر درست باشد. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای $n+2$ شهر هم درست است. در واقع، فرض بر این است که، توانسته‌ایم جهت حرکت را بین جاده‌هایی که شهرهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ را دوبه‌دو به هم وصل می‌کنند، طوری انتخاب کنیم که بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر با عبور از جاده‌های یک طرفه طوری رسید که حداکثر از یک شهر بینابینی عبور کرده باشیم. (این، فرض استقراست). اکنون دو شهر A_{n+1} و A_{n+2} را در نظر می‌گیریم و، جاده‌های بین A_{n+1} و هر یک از شهرهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ را از طرف A_{n+1} به سمت هر یک از آن‌ها یک طرفه اعلام می‌کنیم، ولی در مورد شهر A_{n+2} ، جهت حرکت را از طرف هر یک از شهرهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ به طرف A_{n+2} می‌گیریم. (شکل ۸). این وضع، مارا قادر می‌سازد تا از شهر A_{n+1} به هر کدام از شهرهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، و از هر یک از شهرهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ به شهر A_{n+2} برویم، بدون این که ناچار باشیم از یک شهر بینابینی عبور کنیم. اکنون اگر جهت حرکت بین دو شهر A_{n+1} و A_{n+2} را، از A_{n+2} به طرف



شکل ۸

A_{n+1} بگیریم، برای رسیدن از A_{n+2} به A_{n+1} هم، نیاز به عبور از یک شهر بینابینی نداریم. اکنون روشن است که برای رسیدن از A_{n+1} به A_{n+2} می‌توان با واسطهٔ هر یک از شهرهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ رسید. همچنین، برای رسیدن از A_{n+2} به هر یک از شهرهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ و یا برای رسیدن از هر یک از شهرهای

$A_1, A_2, \dots, A_n$ به شهر A_{n+1} به بیش از یک شهر بینابینی نیاز نداریم (به ترتیب A_{n+1} و A_{n+2}). چون حکم مسأله، برای $n=3$ و $n=6$ درست است، بنابراین برای هر عدد فرد $n \geq 3$ و هر عدد زوج $n \geq 6$ درست است.

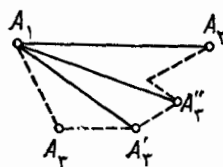
۲۵. مسأله رami توان، به صورت ریاضی، این طور بیان کرد: در صفحه‌ای ۱۰۵ نقطه وجود دارد. هر دو نقطه، یا به وسیلهٔ یک خط پیوسته و یا به وسیلهٔ یک خط نقطه چین به هم وصل شده‌اند. علاوه بر این، می‌دانیم، از هر نقطه می‌توان به وسیلهٔ زنجیره‌ای از خط‌های پیوسته و یا زنجیره‌ای از خط‌های نقطه چین، به هر نقطهٔ دیگر رسید. می‌خواهیم ثابت کنیم، بین این ۱۰۵ نقطه، چهار نقطه وجود دارد، به نحوی که از هر نقطهٔ این چهار نقطه، می‌توان با زنجیره‌ای از خط‌های پیوسته و هم با زنجیره‌ای از خط‌های نقطه چین، به هر یک از سه نقطهٔ دیگر رسید.

اثبات را با برهان خاف می‌دهیم. فرض را بر این می‌گیریم که، چنین چهار نقطه‌ای، در بین ۱۰۵ نقطه وجود ندارد و ثابت خواهیم کرد که، در این صورت، می‌توان دنباله‌ای نامتناهی از بین این ۱۰۵ نقطه انتخاب کرد که البته ممکن نیست.

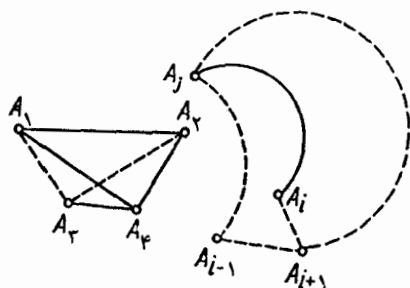
از دو نقطه دلخواه A_1 و A_2 آغاز می‌کنیم که به وسیلهٔ خطی پیوسته به هم مربوط‌اند. بنابر شرط مسأله، A_1 و A_2 را می‌توان با زنجیره‌ای از خط‌های نقطه چین هم، به یکدیگر وصل کرد. فرض می‌کنیم $A_1 A_3 A'_3 A''_3 \dots A_2$

کوتاه‌ترین این مسیر باشد، یعنی مسیری روی خط‌های نقطه‌چین، که شامل کمترین تعداد نقطه‌های بینابینی باشد. هردو نقطه از این زنجیره (یعنی هردو شهر) که پشت سرهم نباشند، باید به وسیله خط پیوسته‌ای به هم مربوط شده باشد، زیرا در غیر این صورت، می‌توانیم با حذف نقطه‌های بین این دو نقطه مسیر زنجیره خط‌های نقطه‌چین را کوتاه‌تر کنیم. بنابراین، اگر این زنجیره، بیش از یک نقطه بینابینی داشته باشد مثلاً از نقطه‌های A_1, A_2, A_3, A_4 بگذرد (A_3 می‌تواند منطبق بر A_2 باشد)، آن وقت نقطه‌های A_1, A_2, A_3 و A_3, A_4 همان چهار نقطه‌ای را تشکیل می‌دهند که در صورت مسأله خواسته شده است (شکل ۹-ا را ببینید)؛ و این، با فرض ما، مبنی بر این که چنین چهار نقطه‌ای وجود ندارد، متناقض است. بنابراین زنجیره شامل خط‌های نقطه‌چینی که A_1 و A_2 را به هم وصل می‌کند، شامل دو حلقه است: $A_1 A_3 A_2$.

اکنون نقطه‌های A_1 و A_2 را در نظر می‌گیریم (که به وسیله یک خط‌چین به یکدیگر وصل شده‌اند). با استدلالی شبیه استدلال فوق می‌توان نتیجه گرفت که زنجیره $A_1 A_3 A_2$ شامل دو حلقه از خط‌های پیوسته وجود دارد که A_1 را به A_2 می‌پیوندد. حالا ثابت می‌کنیم که A_3 با خط پیوسته‌ای به A_1 مربوط است. در واقع، اگر دو نقطه A_1 و A_3 با خط نقطه‌چین به هم وصل شده باشند، آن وقت A_1, A_2, A_3 و A_3, A_4 یک چهارتایی مورد نظر صورت مسأله را تشکیل می‌دهند که با فرض ما متناقض است (شکل ۹-ب را ببینید).



(a)



(b)

به این ترتیب، به چهار نقطه A_1, A_2, A_3 و A_4 رسیده‌ایم، به نحوی که A_2 به A_1 با خط پیوسته، A_3 به A_1 و A_2 با خط نقطه‌چین و A_4 به A_1 و A_2 و A_3 با خط پیوسته به هم مربوط‌اند. برای دنباله بحث، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم، به همان نحوی که قبلاً پیدا کردیم، نقطه‌های $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i$ چنان باشند که، هریک از نقطه‌های $A_3, A_4, \dots, A_i$ (با اندیس فرد) با همه نقطه‌های قبلی به وسیله خط‌های نقطه‌چین، و هریک از نقطه‌های $A_2, A_4, \dots$ (با اندیس زوج) با نقطه‌های قبلی به وسیله خط‌های پیوسته مربوط شده باشند و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، دنباله نقطه‌های $A_1, \dots, A_i$ می‌تواند ادامه پیدا کند. برای روشن بودن وضع، فرض می‌کنیم A_{i-1}, A_i خطی پیوسته باشد، A_{i-1}, A_i, A_{i+1} را کوتاه‌ترین زنجیره شامل خط‌های نقطه‌چین می‌گیریم که A_{i-1} را به A_i وصل کرده است. نقطه A_{i+1} بر هیچ‌یک از نقطه‌های $A_1, A_2, \dots, A_{i-2}$ (و البته، بر A_{i-1} یا A_i) منطبق نیست، زیرا هریک از نقطه‌های قبل از A_{i-1} ، با خط پیوسته، به یکی از نقطه‌های A_{i-1} و A_i و با خط نقطه‌چین به دیگری وصل شده است، در حالی که A_{i+1} با هر دوی آنها به وسیله خط نقطه‌چین مربوط است. از طرف دیگر، A_{i+1} با خط‌های نقطه‌چین به نقطه‌های $A_1, A_2, \dots, A_{i-2}$ (و همان‌طور به نقطه‌های A_{i-1} و A_i) مربوط است، زیرا اگر خط $A_j A_{i+1}$ ($j < i-1$) پیوسته باشد، آن وقت نقطه‌های $A_j, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}$ یک چهارتایی مورد نظر صورت مسأله را تشکیل می‌دهند که، بنا به فرض ما، نمی‌تواند وجود داشته باشد (شکل ۹-ب).

به این ترتیب، توانستیم یک نقطه دیگر به دنباله نقطه‌ها اضافه کنیم، یعنی دنباله

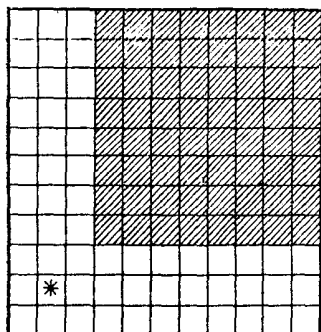
$$A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots$$

را می‌توان به‌طور نامتناهی ادامه داد.

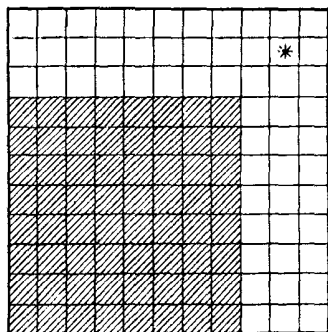
۲۱. برای این که اسب بتواند از خانه واقع در گوشه چپ و پایین صفحه شطرنج، خود را به گوشه راست و بالای صفحه (که روی هم ۶۴ خانه

دارد) برساند، به نحوی که از هر خانه درست يك بار عبور کند، باید ۳۶ حرکت انجام دهد. در هر حرکت، اگر اسب در خانه سیاه باشد، به خانه سفید می‌رود و اگر در خانه سفید باشد، به خانه سیاه می‌رود. بنابراین، وقتی که تعداد حرکت‌های اسب عددی زوج باشد، به خانه‌ای می‌رسد که همان رنگ خانه آغاز حرکت را دارد. ولی اگر تعداد حرکت‌های اسب عددی فرد باشد، خانه‌ای را اشغال می‌کند که رنگ آن با رنگ خانه آغاز حرکت فرق دارد. بنابراین، اسب نمی‌تواند با ۳۶ حرکت، خود را به خانه‌ای برساند که با خانه آغاز حرکت در روی يك قطر واقع است، زیرا همه خانه‌های واقع بر يك قطر هم‌رنگ‌اند.

۲۲. شاه می‌تواند این برنامه را برای حرکت‌های خود انتخاب کند: ابتدا خود را به گوشه چپ پایین برساند و، سپس، در امتداد قطری که این گوشه را به گوشه راست بالا وصل می‌کند، حرکت کند. شاه، بعد از نخستین حرکت، به خانه‌ای می‌رسد که در شکل ۱۵ - a با ستاره نشان داده شده است. اگر حرکت رخ‌های سیاه، به دنبال آخرین حرکت شاه باشد، دست کم یکی از رخ‌ها در بیرون مربع 997×997 می‌ماند (این مربع، در شکل سایه‌خورده است). سپس، در حرکت بعدی شاه، ممکن است در وضعی قرار گیرد که به وسیله رخ‌ها زده شود. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که، وقتی شاه ۹۹۸ حرکت



(a)



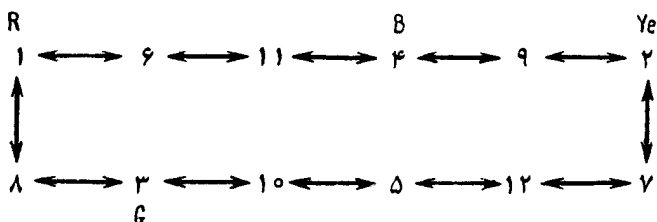
(b)

خود را در امتداد قطر مربع سایه خورده در شکل ۱۰ - a ادامه می‌دهد. رخ‌ها باید در داخل مربع سایه خورده ۹۹۷×۹۹۷ باشند. اگر ضمن حرکت شاه، دست کم یکی از رخ‌ها در سطر یا ستون خود باقی بماند، وقتی شاه از آن سطر یا آن ستون عبور می‌کند، در معرض خطر قرار می‌گیرد. بنابراین، اگر سیاه نخواهد شاه را بزند، ضمن حرکت شاه از موقعیت شکل ۱۰ - a به موقعیت شکل ۱۰ - b (شاه در این مدت، ۹۹۷ حرکت انجام می‌دهد) باید هریک از ۴۹۹ رخ، دست کم دو حرکت داشته باشد (در هر حرکت، یا سطر و یا ستون رخ عوض می‌شود، ولی نمی‌تواند ضمن یک حرکت، هم سطر و هم ستون خود را عوض کند) از آن‌جا که

$$۲ \times ۴۹۹ = ۹۹۸ > ۹۹۷$$

بنابراین، سیاه نمی‌تواند از سقوط شاه جلوگیری کند.

۲۳. مربع‌ها را شماره گذاری می‌کنیم (از ۱ تا ۱۲) و ترتیب آن‌ها را طوری عوض می‌کنیم که، مهره بتواند از هر مربع به مربع مجاور خود منتقل شود. مربع ۶ بعد از مربع ۱ قرار می‌گیرد (زیرا می‌توانیم مهره را در طول چهار خانه ۲، ۳، ۴ و ۵ حرکت دهیم و در خانه ۶ بنشانیم)؛ هم‌چنین مربع ۱۱ بعد از مربع ۶، مربع ۴ بعد از مربع ۱۱ و غیره قرار می‌گیرد به این ترتیب به طرح زیر برای ردیف کردن مربع‌ها می‌رسیم:



اکنون، در این ترتیب جدید مربع‌ها، مهره می‌تواند به خانه مجاور خود، در سمت راست یا سمت چپ، برود، به شرطی که این خانه اشغال نشده باشد. R, B, Ye و G را به ترتیب به معنای مهره‌های قرمز، آبی، زرد و سبز گرفته‌ایم.

روی این طرح، به روشنی دیده می‌شود که مهره‌ها برای جابه‌جایی خود، تنها از يك روش می‌توانند پیروی کنند: حرکت خود را در امتداد زنجیره‌ای از مربع‌ها، در این و یا آن جهت انجام دهند؛ هیچ مهره‌ای نمی‌تواند از دیگری جلوبیفتد، زیرا مهرهٔ اخیر سدره او می‌شود. به این ترتیب، اگر مهرهٔ R مربع ۴ را اشغال کند، مهرهٔ B باید به مربع ۲، مهرهٔ Ye به مربع ۳ و مهرهٔ G به مربع ۱ برود. اگر مهرهٔ R مربع ۲ را اشغال کند، آن وقت مهرهٔ B باید به مربع ۳، مهرهٔ Ye به مربع ۱ و مهرهٔ G به مربع ۴ برود. اگر مهرهٔ R مربع ۳ را اشغال کند، باید مهرهٔ B به مربع ۱، مهرهٔ Ye به مربع ۳ و مهرهٔ G به مربع ۲ برود.

۲۴. ابتدا قضیهٔ کمکی زیر را ثابت می‌کنیم: اگر در بین تعدادی دانشجو، درست n نفر ($n \geq 2$) با زبان انگلیسی، n نفر با زبان فرانسوی و n نفر با زبان آلمانی صحبت کنند (زبان‌های انگلیسی و فرانسوی و آلمانی را، به ترتیب، با نمادهای e و f و g نشان می‌دهیم)، آن وقت می‌توان گروهی از دانشجویان را تشکیل داد که، در آن، ۲ نفر به زبان انگلیسی، ۲ نفر به زبان فرانسوی و ۲ نفر به زبان آلمانی صحبت کنند. روشن است که از این قضیهٔ کمکی می‌توان حکم مسأله را نتیجه گرفت: بعد از تشکیل چنین گروهی، بین بقیهٔ دانشجویان، ۴۸ نفر با زبان انگلیسی، ۴۸ نفر با زبان فرانسوی و ۴۸ نفر با زبان آلمانی آشنا هستند. بنابراین، از بین این دانشجویان باقی مانده، می‌توان دوباره گروهی تشکیل داد که، در آن، ۲ نفر با زبان انگلیسی، ۲ نفر با زبان فرانسوی و ۲ نفر با زبان آلمانی آشنا باشند. بین بقیهٔ دانشجویان، برای آشنایی با هریک از این زبان‌ها ۴۶ نفر باقی می‌ماند که باز هم می‌توان از بین آن‌ها گروهی را درست کرد که، در آن، تعداد آشناهای به هریک از سه زبان، ۲ نفر باشد و غیره. از ترکیب پنج‌تا از این گروه‌های کوچک به نخستین گروهی می‌رسیم که، در آن، ۱۵ نفر به زبان انگلیسی، ۱۵ نفر به زبان فرانسوی و ۱۵ نفر به زبان آلمانی صحبت می‌کنند. به همین ترتیب می‌توان گروه‌های دیگر مورد نظر مسأله را ساخت (که هر کدام از آن‌ها، از ترکیب پنج گروه کوچک به دست می‌آیند).

برای اثبات قضیه کمکی، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. روشن است که قضیه، به‌ازای $n = 2$ درست است (دراین حالت، گروه مورد نظر، شامل همه دانشجویان است). اکنون فرض می‌کنیم، قضیه برای هر تعداد از دانشجویان که کمتر از n باشد ($n > 2$) درست است و ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، برای n دانشجو هم درست است. تعداد دانشجویانی را که تنها به زبان انگلیسی صحبت می‌کنند و با زبان‌های فرانسوی و آلمانی آشنایی ندارند با N_e ، تعداد دانشجویانی را که به دو زبان انگلیسی و فرانسوی صحبت می‌کنند، ولی با آلمانی آشنا نیستند با N_{ef} و غیره نشان می‌دهیم. علاوه بر آن، e (یا e' یا e'') را به معنای دانشجویی می‌گیریم که تنها با زبان انگلیسی صحبت می‌کند، ef یا $(ef)'$ را به معنای دانشجویی می‌گیریم که انگلیسی و فرانسوی می‌داند ولی با آلمانی آشنا نیست و غیره. اگر $N_e \neq 0$ ، $N_{ef} \neq 0$ ، $N_g \neq 0$ ، آن وقت سه دانشجوی e ، f و g را از مجموعه دانشجویان جدا می‌کنیم، دراین صورت به گروهی از دانشجویان می‌رسیم که، برای آن‌ها، حکم قضیه کمکی، بنابه فرض استقرا، درست است. به همین ترتیب اگر $N_{efg} \neq 0$ ، دانشجوی efg را جدا می‌کنیم و دوباره به گروهی از دانشجویان می‌رسیم که حکم قضیه کمکی، بنابه فرض استقرا، در مورد آن‌ها درست است. اگر $N_{ef} \neq 0$ ، $N_{eg} \neq 0$ و $N_{fg} \neq 0$ ، باز هم حکم قضیه کمکی درست است، زیرا سه دانشجوی ef ، eg و fg ، خود گروهی را تشکیل می‌دهند که مورد نظر ماست. سرانجام، اگر از N_{ef} ، N_{eg} و N_{fg} ، دو تا مخالف صفر و سومی برابر صفر باشد (و مثلاً N_{fg})، آن وقت عددهای N_g و N_f مخالف صفرند (زیرا در بین همه دانشجویان ef ، $(ef)'$ و غیره، تعداد دانشجویانی که زبان e را می‌دانند، از تعداد دانشجویان آشنا به زبان f و از تعداد دانشجویان آشنا به زبان g ، بیشتر است). بنابراین می‌توانیم دو دانشجوی ef و g را جدا کنیم و دوباره به گروهی از دانشجویان برسیم که، در آن، درست $n-1$ نفر انگلیسی، $n-1$ نفر فرانسوی و $n-1$ نفر آلمانی صحبت می‌کنند که، بنابه فرض استقرا، می‌توان گروه مورد نظر را از آن بیرون آورد. به همین ترتیب، اگر مثلاً تنها N_{ef} مخالف صفر باشد، ولی

$N_{fg} = N_{eg} = 0$ ، آن وقت روشن است که $N_g \neq 0$ و دوباره می‌توانیم دانشجویان ef و g را جدا کنیم و، سپس، از فرض استقرا استفاده کنیم (توجه به این نکته لازم است که برابری‌های $N_{ef} = N_{eg} = N_{fg} = 0$ و $(N_{efg} = 0)$ ، با این فرض متناقض است که، دست کم یکی از عددهای N_e ، N_f و N_g برابر صفر است).

یادداشت. روشن است که عددهای ۱۰ و ۵۰ در صورت مسأله اساسی نیستند: می‌توان با روشی مشابه ثابت کرد که، اگر در گروهی، درست n نفر با زبان انگلیسی، n نفر با زبان فرانسوی و n نفر با زبان آلمانی آشنا باشند، آن وقت با استفاده از گروه‌های کوچکتر (شبیه آن چه در حل مسأله دیدید)، این امکان به دست می‌آید که گروه‌هایی از دانشجویان را تشکیل می‌دهیم که، در هر کدام از آن‌ها، m نفر به زبان انگلیسی، m نفر به زبان فرانسوی و m نفر به زبان آلمانی صحبت کنند، به شرطی که m عددی زوج باشد و از n تجاوز نکنند. شرط زوج بودن عدد m ضروری است و نمی‌توان از آن چشم پوشید (سعی کنید، خودتان، این ضرورت را ثابت کنید؛ همچنین سعی کنید، مسأله‌ای را حل کنید که، در آن، به جای ۳ زبان، از تعداد دیگری زبان‌های مختلف استفاده شده باشد).

(۰۲۵ a) روشن است که کمترین مقدار «میانگین» برابر است با ۱؛ و این در حالتی پیش می‌آید که همه داوران، مقام اول را به یک ورزشکار بدهند. از طرف دیگر، ۵ ورزشکار یا بیشتر از ۵ ورزشکار نمی‌توانند به وسیله داوران مختلف به مقام اول برسند. در واقع، اگر این n ورزشکار ($n \geq 5$) بخواهند ۹ مقام اول را به وسیله نه داور بگیرند و

$$9n - 9 \geq 9 \times 5 - 9 = 36$$

مقام دیگر باقی می‌ماند (توجه کنید، تعداد کل مقام‌هایی که این ۹ داور می‌توانند بدهند، برابر است با $9n$). هیچ یک از این مقام‌های باقی مانده، بنا به شرط مسأله، نمی‌تواند از ۴ کمتر باشد و این ممکن نیست، زیرا تعداد کل امتیازهایی که به وسیله داوران، برای مقام‌های دوم تا چهارم داده می‌شود، برابر 9×3 ، یعنی ۲۷ است. بنابراین، تنها این می‌ماند که حالت‌هایی را بررسی کنیم که، در آن‌ها، مقام اول (به وسیله داوران) به ۲، ۳، ۴ ورزشکار داده شده است.

۱.۰ اگر داوران، مقام اول را تنها به دو ورزشکار داده باشند، آن وقت دست کم یکی از دو نفر، باید مقام اول را حداقل از پنج داور گرفته باشد. مقام‌هایی که به وسیله دیگر داوران به این ورزشکار داده شده است، بدتر از مقام چهارم نیست؛ بنابراین «میانگین» مقام این قهرمان، نمی‌تواند از $\frac{21}{3} = \frac{5 \times 1 + 4 \times 4}{9}$ بدتر باشد.

۲.۰ اگر داوران به سه نفر مقام اول را داده باشند، آن وقت این سه ورزشکار روی هم، از بین همه مقام‌های داوران، ۹ مقام اول را به خود اختصاص داده‌اند. از تعداد $18 = 9 - 3 \times 9$ مقام دیگر، هیچ کدام نباید بدتر از ۴ باشد. چون تنها ۹ داور می‌توانند ۹ مقام چهارم بدهند، بنابراین، از این ۱۸ مقام باقی مانده، می‌توان ۹ مقام را، سوم به حساب آورد. به این ترتیب، مجموع مقام‌هایی که به این ورزشکاران داده می‌شود از

$$9 \times 1 + 9 \times 4 + 9 \times 3 = 72$$

تجاوز نمی‌کند، یعنی مجموع مقام‌های دست کم یکی از آن‌ها از $24 = \frac{72}{3}$

تجاوز نمی‌کند و «میانگین» مقام او نمی‌تواند از $\frac{24}{3} = \frac{24}{3}$ بدتر باشد.

۳.۰ سرانجام، اگر داوران مقام اول را به ۴ نفر داده باشند. این چهار نفر روی هم ۹ مقام اول را از نه داور گرفته‌اند. همه مقام‌هایی که به وسیله ۹ داور، به این ۴ نفر داده شده، برابر $36 = 4 \times 9$ است؛ از ۲۷ مقام باقی مانده، هیچ کدام نمی‌تواند از ۴ بیشتر باشد. بنابراین نه داور، ممکن است ۹ مقام چهارم، ۹ مقام سوم و ۹ مقام دوم به این چهار نفر داده باشند. مجموع کل مقام‌های این ۴ نفر برابر

$$9 \times 1 + 9 \times 2 + 9 \times 3 + 9 \times 4 = 90$$

می‌شود و چون $4 \times 23 < 90$ ، بنابراین مجموع مقام‌های بهترین ورزشکار از ۲۲ تجاوز نمی‌کند و «میانگین» مقام او از $\frac{22}{3} < \frac{24}{3} = \frac{22}{3}$ بدتر نیست.

به این ترتیب، «میانگین» مقام بهترین ورزشکار نمی‌تواند بدتر از

$\frac{2}{3}$ باشد و تنها وقتی برابر $\frac{2}{3}$ می‌شود که سه نفر از بهترین ورزشکاران از سه داور مقام اول، از سه داور مقام سوم از سه داور مقام چهارم را گرفته باشند و، در این صورت، سه ورزشکار با هم به مقام قهرمانی می‌رسند. یادداشت. اگر در اثبات بالا، جای مقام k ام را با جای مقام $(k-1)$ ام عوض کنیم، معلوم می‌شود که «میانگین» مقام ورزشکار آخر (یعنی ورزشکاری که مقام بیستم را گرفته است)، نمی‌تواند از $\frac{1}{3}$ بهتر باشد (ولی می‌تواند برابر $\frac{1}{3}$ شود).

(b) روشن است بعد از هر دور بازی، نمره بهترین تنیس‌بازان باقی مانده کمتر نمی‌شود؛ همچنین روشن است، این عدد، نمی‌تواند بیش از ۲ واحد افزایش یابد (ولی می‌تواند به اندازه ۲ واحد افزایش یابد و این وقتی پیش می‌آید که، بهترین تنیس‌باز، بازی را به تنیس‌بازی که نمره او ۲ واحد بیشتر است، ببازد). چون $2^1 = 1024$ ، و چون بعد از هر دور بازی، تعداد شرکت‌کنندگان نصف می‌شود، بنابراین تعداد کل دورهای بازی برابر است با ۱۰. بعد از ۱۰ دور، تنها $2^0 = 1$ تنیس‌باز باقی می‌ماند که قهرمان مسابقه است. از آنجا که در هر دور بازی، ممکن است به نمره تنیس‌باز برنده ۲ واحد اضافه شود، به نظر می‌آید که تنیس‌باز با نمره ۲۱ می‌تواند برنده مسابقه باشد. ولی در عمل تنیس‌باز با نمره شایستگی ۲۱، نمی‌تواند پیروز شود.

درواقع، برای این که تنیس‌باز با نمره ۲۱ برنده مسابقه باشد، باید بعد از هر دور بازی، دو نفر از بهترین تنیس‌بازان مسابقه را ترك کنند؛ باید در دور اول بازی‌ها، نمره‌های ۱ و ۲، به ترتیب به نمره‌های ۳ و ۴ ببازند؛ در دور دوم، تنیس‌بازان ۳ و ۴، به ترتیب به ۵ و ۶ ببازند و غیره. این، به معنای آن است که در دور نیمه‌نهایی، باید شماره‌های ۱۷ و ۱۸ به ترتیب به تنیس‌بازان ۱۹ و ۲۰ ببازند و، بنابراین، بازی نهایی بین دو تنیس‌باز با نمره‌های ۱۹ و ۲۰ انجام می‌شود و یکی از آن‌ها (و نه تنیس‌باز با نمره ۲۱) قهرمان مسابقه می‌شود.

اکنون نشان می‌دهیم که، تنیس باز با نمره شایستگی ۲۰، می‌تواند قهرمان مسابقه باشد. درواقع، اگر تعداد تنیس‌بازان برابر $2 = 2^1$ باشد، برنده مسابقه می‌تواند کسی باشد که نمره شایستگی او برابر $2 \times 1 = 2$ است. اگر تعداد تنیس‌بازان $4 = 2^2$ باشد، برنده مسابقه می‌تواند با شماره $4 = 2 \times 2$ باشد (به این ترتیب که در دور اول بازی‌ها، نمره ۲، نمره ۱ را شکست دهد و نمره ۴ بر نمره ۳ پیروز شود و، سپس، در بازی بین ۲ و ۴، تنیس باز ۴ برنده شود). اگر تعداد تنیس‌بازان برابر $8 = 2^3$ باشد، آن وقت تنیس باز با نمره ۶ می‌تواند برنده باشد (فرض کنید، چهارتنیس باز ردیف اول در یک گروه باهم بازی کنند و، برنده این گروه، تنیس باز با نمره ۴ باشد؛ در گروه دیگر، تنیس باز با نمره ۶ می‌تواند تنیس باز با نمره ۵ را شکست دهد و، در بازی نهائی، ۶ بر ۴ پیروز شود). با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم، اگر 2^n تنیس باز در مسابقه‌های به شیوه المپیک شرکت کنند، آن وقت تنیس باز با نمره شایستگی $(2n)$ می‌تواند قهرمان مسابقه‌ها باشد. برای رسیدن به این هدف، کافی است در زیر گروه اول که شامل 2^{n-1} تنیس باز است، تنیس باز با نمره $(2n-2)$ برنده شود (که بنا به فرض استقرا ممکن است) و در زیر گروه دوم، تنیس باز با نمره $(2n)$ برنده باشد و، سپس، در دور نهائی، تنیس باز با نمره $(2n-2)$ از تنیس باز با نمره $(2n)$ شکست بخورد.

۲۶. N_i را تعداد مدال‌های آغاز روز i ام می‌گیریم ($i = 1, 2, \dots, n$) در ضمن N_i را برای $i > n$ ، طبق تعریف، برابر صفر فرض می‌کنیم. از صورت مسأله، روشن می‌شود که $N_1 = N$ ، $N_n = n$ و $N_{n+1} = 0$. در ضمن N_i و N_{i+1} با رابطه زیر به هم بستگی دارند:

$$N_{i+1} = N_i - i - \frac{1}{\gamma}(N_i - i) = \frac{\gamma}{\gamma}(N_i - i)$$

که از آنجا به دست می‌آید:

$$N_i = \frac{\gamma}{\gamma} N_{i+1} + i \quad (*)$$

با استفاده از (*) به ترتیب داریم:

$$N_n = n = \frac{V}{\epsilon} N_{i+1} + n,$$

$$N_{n-1} = \frac{V}{\epsilon} n + (n-1),$$

$$N_{n-2} = \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^2 n + \frac{V}{\epsilon}(n-1) + (n-2),$$

$$N_{n-3} = \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^3 n + \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^2 (n-1) + \frac{V}{\epsilon}(n-2) + (n-3),$$

.

$$N_i = \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-i} n + \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-i-1} (n-1) + \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-i-2} (n-2) + \dots + i$$

(دستور کلی را می‌توان، به سادگی و با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کرد). بنابراین

$$\begin{aligned} N = N_1 &= \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-1} \cdot n + \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-2} \cdot (n-1) + \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-3} \cdot (n-2) + \dots + \\ &+ 1 = n \left[\left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-1} + \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-2} + \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-3} + \dots + 1 \right] - \left[\left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-2} + \right. \\ &\left. + 2 \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-3} + \dots + (n-2) \frac{V}{\epsilon} + (n-1) \right] = n \cdot S_1 - S_2 \end{aligned}$$

(S_1 و S_2 را، به ترتیب، مجموع عبارت‌های واقع در گوشه‌ها گرفته‌ایم).
 S_1 با توجه به مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی، به سادگی به دست می‌آید:

$$S_1 = \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-1} + \left(\frac{V}{\epsilon}\right)^{n-2} + \dots + 1 = \frac{\left(\frac{V}{\epsilon}\right)^n - 1}{\frac{V}{\epsilon} - 1} = \epsilon \left[\left(\frac{V}{\epsilon}\right)^n - 1 \right]$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\epsilon} S_{\gamma} - S_{\gamma} &= \left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right)^{n-1} + \left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right)^{n-2} + \dots + \left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right) - (n-1) = \\ &= S_1 - n = \epsilon \left[\left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right)^n - 1 \right] - n \end{aligned}$$

که از آن جا، می‌توان مقدار S_{γ} را محاسبه کرد:

$$S_{\gamma} = \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right)^n - 1 \right] - n$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} N &= \epsilon \left[\left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right)^n - 1 \right] n - \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right)^n - 1 \right] + \epsilon n = \\ &= \epsilon(n-1) \left(\frac{\gamma}{\epsilon}\right)^n + \frac{1}{\epsilon} \quad (***) \end{aligned}$$

چون N عددی درست است، پس باید عدد $\frac{\gamma^n(n-1)}{\epsilon^{n-1}}$ عددی درست

باشد. چون γ^n نمی‌تواند مضربی از ϵ باشد، بنابراین $(n-1)$ باید بر ϵ^{n-1} بخش پذیر باشد؛ یعنی n مضربی از ϵ است. از طرف دیگر، روشن است که، به ازای هر $k \geq 2$ ، داریم:

$$\epsilon^k - \epsilon < \epsilon^{\epsilon^k - 1}$$

(چرا؟) یعنی $\epsilon^{\epsilon^k - 2} < \epsilon^k - 1$. بنابراین $n - \epsilon$ ، به ازای $n > \epsilon$ بر ϵ^{n-1} بخش پذیر نیست و باید داشته باشیم $n = \epsilon$. با در دست داشتن مقدار n ، با توجه به رابطه $(***)$ ، مقدار N به دست می‌آید: $N = \frac{1}{\epsilon}$.

۲۷. راه حل اول. تعداد گردوهائی را که هر يك از دوستان، هنگام صبح به دست آوردند، n می‌گیریم. بنابراین، تعداد گردوهای مانده در سبد، هنگام صبح برابر $5n + 1$ بوده است. آخرین نفری که، شب گردوها را تقسیم کرد، خودش به تعداد $\frac{5n+1}{4}$ گردو را برداشته است و روشن است که، تعداد

گردوها، قبل از این تقسیم، برابر $\frac{25n+9}{4} + 1 = 5 \times \frac{5n+1}{4}$ بوده است. به همین ترتیب، می‌توان محاسبه کرد که تعداد گردوها، قبل از آن که نفر چهارم آن‌ها را تقسیم کند، برابر بوده است با

$$5 \times \frac{1}{4} \times \frac{25n+9}{4} + 1 = \frac{125n+61}{16}$$

و تعداد گردوها قبل از تقسیم نفر سوم:

$$5 \times \frac{1}{4} \times \frac{125n+61}{16} + 1 = \frac{625n+369}{64}$$

و قبل از تقسیم نفر دوم:

$$5 \times \frac{1}{4} \times \frac{625n+369}{64} + 1 = \frac{3125n+2101}{256}$$

و قبل از تقسیم نفر اول، یعنی تعداد کل گردوها

$$\begin{aligned} N &= 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3125n+2101}{256} + 1 = \frac{15625n+11529}{1024} = \\ &= 15n+11 + \frac{265n+265}{1024} \end{aligned}$$

N عددی درست است، بنابراین باید عدد $265(n+1)$ بر 1024 بخش پذیر باشد و کوچکترین مقداری که برای n می‌توان در نظر گرفت، عدد 1023 است. بنابراین

$$N = 15 \times 1023 + 11 + 265 = 15621$$

راه حل دوم. این مسأله را می‌توان با روش ساده‌تری، و اغلب بدون محاسبه، حل کرد. برای این منظور، باید به شرط‌هایی توجه داشته باشیم که برای N ، تعداد کل گردوها، وجود دارد.

شرط اول مسأله این است که، برای بخش پذیر بودن تعداد کل گردوها

بر ۵، باید یکی از آن‌ها را کنار گذاشت، یعنی از تقسیم N بر ۵، به باقی مانده واحد می‌رسیم: $N = 5l + 1$. تفاضل دو عدد مجاور به صورت $5l + 1$ ، برابر ۵ یا ۵- است؛ یعنی اگر یکی از این گونه عددها را بشناسیم، می‌توانیم (با اضافه کردن مضرب‌هایی از ۵ به آن) بی‌نهایت عدد از این گونه را به دست آوریم.

شرط دوم مسأله این است که، اگر عدد $k = \frac{4}{5}(N - 1) = 4l$ بر ۵ تقسیم

شود، به باقی مانده واحد برسیم، یعنی $k = 5l_1 + 1$. این شرط هم‌ارز با آن است که، اگر l بر ۵ تقسیم شود، باقی مانده‌ای برابر ۴ داشته باشد، یعنی در تقسیم $N = 5l + 1$ بر ۲۵، باید باقی مانده‌ای برابر ۲۱ به دست آید. در این جا هم، اگر یکی از این گونه عددها را بشناسیم، با اضافه کردن مضربی از ۲۵ به آن، می‌توانیم بی‌نهایت عدد از این گونه پیدا کنیم.

شرط سوم مسأله می‌گوید که، وقتی عدد $k_1 = \frac{4}{5}(k - 1) = 4l_1$ بر ۵ تقسیم

شود، باقی مانده برابر واحد به دست می‌آید. با استفاده از این شرط، می‌توان مانده حاصل از تقسیم l_1 بر ۵، مانده‌های حاصل از تقسیم عددهای l و k بر ۲۵ و بالاخره مانده تقسیم عدد N بر ۱۲۵ را به دست آورد. اگر به همین ترتیب جلو برویم، با استفاده از شرط‌های مسأله، می‌توان باقی مانده تقسیم N بر عدد $5^6 = 15625$ را محاسبه کرد. تفاضل هر دو عدد مجاور از این گونه، برابر ۱۵۶۲۵ یا ۱۵۶۲۵- است. البته می‌توان باقی مانده تقسیم N بر ۵۶ را محاسبه کرد، ولی نیازی به این کار نیست. ما یکی از عددهای سازگار با همه شرط‌های مسأله را می‌شناسیم. این عدد برابر است با ۴-.

در واقع اگر ۴- را بر ۵ تقسیم کنیم به باقی مانده ۱+ و خارج قسمت ۱-

می‌رسیم بنابراین، اگر عدد ۱ را از ۴- کم کنیم و $\frac{4}{5}$ تفاضل حاصل را، که

بر ۵ بخش پذیر است، در نظر بگیریم، دوباره به همان عدد ۴- می‌رسیم. به همین ترتیب، در همه تقسیم‌های بعدی بر ۵، باقی مانده‌ای برابر ۱+ به دست

می‌آید. خود ۴ — را نمی‌توان به عنوان جواب مسأله در نظر گرفت، زیرا N عددی مثبت است. ولی می‌دانیم که می‌توان به این عدد مضربی از ۵۶ اضافه کرد. کوچکترین عدد وقتی به دست می‌آید که خود ۵۶ را به ۴ — اضافه کنیم:

$$-۴ + ۵۶ = -۴ + ۱۵۶۲۵ = ۱۵۶۲۱$$

۲۸. تعداد گوسفندان گله را n می‌گیریم. پس دو برادر بابت هر گوسفندی n روبل گرفته‌اند. در نتیجه، پول تمامی گله برابر $N = n^2$ می‌شود. اگر d را خارج قسمت تقسیم n بر ۱۰ و e را باقی‌مانده تقسیم بگیریم (در واقع، e ، رقم یکان عدد n است) داریم: $n = ۱۰d + e$ و

$$N = (۱۰d + e)^2 = ۱۰۰d^2 + ۲۰de + e^2$$

چون اول برادر بزرگتر ۱۰ روبل برداشته و سرآخر هم، همین برادر بزرگتر توانسته است ۱۰ روبل کامل را بردارد، بنابراین روشن است که خارج قسمت تقسیم N بر ۱۰ عددی است فرد. از طرف دیگر، عدد

$$۱۰۰d^2 + ۲۰de = ۲۰d(۵d + e)$$

بر ۲۰ بخش پذیر است و این به معنای آن است که از تقسیم $۱۰۰d^2 + ۲۰de$ بر ۱۰، عددی زوج به دست می‌آید. در نتیجه، باید خارج قسمت تقسیم عدد e^2 بر ۱۰، عددی فرد باشد. چون e عددی یک رقمی و مخالف صفر است، بنابراین e^2 تنها یکی از عددهای زیر است:

$$۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴، ۸۱$$

از بین این عددها، تنها دو عدد ۱۶ و ۳۶ در تقسیم بر ۱۰ به خارج قسمت فرد می‌رسند. بنابراین e^2 یا برابر ۱۶ و یا برابر ۳۶ است. هر دو عدد به ۶ ختم می‌شوند، یعنی برادر کوچکتر، بار آخر، فقط ۶ روبل (به جای ۱۰ روبل) برداشته است: برادر بزرگتر روی هم ۴ روبل بیش از برادر کوچکتر برداشت کرده است. به این ترتیب، برای این که تقسیم عادلانه باشد، برادر بزرگتر باید ۲ روبل به برادر کوچکتر خود بدهد. ارزش چاقو ۲ روبل بوده است. ۲۹. (a) در تقویم گرگوری (که در زمان ما معمول است)، هر سال

معمولی ۳۶۵ روز و هر سال کیسه ۳۶۶ روز است (در سال عادی، اسفند ۲۹ روز و در سال کیسه ۳۰ روز دارد و در مورد سال‌های فرنگی، ماه فوریه در سال کیسه ۲۹ روز دارد). سال‌های کیسه میلادی آن‌هایی هستند که بر ۴ بخش پذیرند، به جز سال‌هایی که بر ۱۰۰ بخش پذیر باشند، ولی بر ۴۰۰ بخش پذیر نباشند. مثلاً سال‌های ۱۸۰۰، ۱۹۰۰ و ۲۱۰۰ کیسه نیستند و ۳۶۵ روز دارند، در حالی که سال‌های ۱۹۸۸، ۱۹۹۲ و ۲۰۰۰، سال‌های کیسه‌اند. نخستین روز سال، در اول ژانویه است و، بنابراین، باید مشخص کنیم، کدام يك از دو روز شنبه یا یکشنبه، بیشتر مصادف با اول ژانویه می‌شود!

فاصله بین روزهای اول ژانویه ثابت نیست، ولی دارای تناوب‌اند و دوره تناوب آن برابر ۴۰۰ سال است. چهارصد سال، شامل تعداد درستی هفته است. در واقع، هر سال عادی شامل ۵۲ هفته به اضافه يك روز اضافی است. در بین هر چهار سال متوالی، یکی از سال‌ها کیسه است و، بنابراین، هر چهار سال متوالی شامل 52×4 هفته به اضافه ۵ روز است. چون در هر ۴۰۰ سال متوالی، سه سال وجود دارد که بر ۱۰۰ بخش پذیر و بر ۴۰۰ بخش ناپذیرند بنابراین، هر ۴۰۰ سال متوالی، شامل 52×400 هفته به اضافه $497 = 3 - 100 \times 5$ روز می‌شود که خود برابر ۷۱ هفته است؛ یعنی تعداد هفته‌های ۴۰۰ سال متوالی، عدد درستی است. بنابراین، کافی است روشن کنیم، در هر تناوب ۴۰۰ ساله، کدام يك از روزهای شنبه یا یکشنبه، بیشتر به اول ژانویه می‌افتد!

تناوب ۴۰۰ ساله از ۱۹۰۱ تا ۲۳۰۱ را در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم، اگر در يك تناوب ۲۸ ساله، هر چهارمین سال کیسه باشد (یعنی اگر این ۸ سال، شامل سالی نباشند که بر ۱۰۰ بخش پذیر و بر ۴۰۰ بخش ناپذیر باشد)، آن وقت این ۲۸ سال، شامل تعداد درستی از هفته‌هاست، زیرا هر چهار سال متوالی، شامل تعداد درستی از هفته‌ها به اضافه ۵ روز است و، بنابراین دوره‌ای از ۲۸ سال متوالی، شامل تعداد درستی از هفته‌ها به اضافه 5×7 یعنی ۳۵ روز می‌شود که خود ۵ هفته است. اکنون توجه می‌کنیم که، اول

ژانویه سال ۱۹۵۲، سه‌شنبه بوده است. چون هر سال عادی شامل تعداد درستی هفته به اضافه یک روز، و هر سال کبیسه شامل تعداد درستی هفته به اضافه دو روز است. اول ژانویه سال ۱۹۵۳ پنجشنبه (۱۹۵۲، سال کبیسه است)؛ اولین روز سال ۱۹۵۴ جمعه، اول ژانویه سال ۱۹۵۵ شنبه بوده است و غیره. به همین ترتیب، می‌توان روشن کرد که، روز اول سال ۱۹۵۱ دوشنبه، روز اول سال ۱۹۵۰ یکشنبه بوده است و غیره. با این شیوه کار، معلوم می‌شود که، در دوره ۲۸ ساله از سال ۱۹۲۹ تا سال ۱۹۵۶، هریک از ۷ روز هفته، به تساوی (و هر کدام ۴ بار) به اول ژانویه افتاده‌اند. وضع در مورد ۲۸ سال از ۱۹۰۱ تا ۱۹۲۸ هم به همین گونه است (تاکید می‌کنیم، اگر در دوره ۲۸ ساله، هر سال چهارم، کبیسه باشد، آن وقت این دوره شامل تعداد درستی هفته می‌شود و، بنابراین، توزیع روزهای هفته در اول ژانویه این سال‌ها، یکسان است). همین استدلال را می‌توان در مورد دوره‌های ۲۸ ساله از ۱۹۵۷ تا ۱۹۸۴، از ۱۹۸۵ تا ۲۰۱۲ (توجه کنید، سال ۲۰۰۰، سال کبیسه است)، از ۲۰۱۳ تا ۲۰۴۰، از ۲۰۴۱ تا ۲۰۶۸ و از ۲۰۶۹ تا ۲۰۹۶ تکرار کرد. بنابراین، در فاصله از سال ۱۹۰۱ تا سال ۲۰۹۶، نخستین روز سال (اول ژانویه)، با فراوانی یکسان، برای روزهای هفته اتفاق می‌افتد.

به این ترتیب، اول ژانویه سال ۲۰۹۷، همان‌روزی از هفته است که در اول ژانویه سال ۲۹۰۱، یا اول ژانویه سال ۱۹۲۹ بوده است، یعنی سه‌شنبه. اولین روز سال ۲۰۹۸ به چهارشنبه، اولین روز سال ۲۰۹۹ به پنجشنبه و اولین روز سال ۲۱۰۰ به جمعه می‌افتد. نخستین روز سال ۲۱۰۱ شنبه است (سال ۲۱۰۰ کبیسه نیست). تناوب بعدی ۲۸ ساله، با تناوب از سال ۱۹۰۱ تا ۱۹۲۸ تفاوت دارد؛ تناوب به جای سه‌شنبه، با روز شنبه آغاز می‌شود. در طول دوره‌های ۲۸ ساله از ۲۱۰۱ تا ۲۱۲۸، از ۲۱۲۹ تا ۲۱۵۶ و از ۲۱۵۷ تا ۲۱۸۴، روزهای هفته، به صورتی یکسان به اول ژانویه می‌افتند. ۲۱۸۵ با همان روزی از هفته آغاز می‌شود که سال ۲۱۰۱ آغاز شده بود، یعنی روز شنبه. از این‌جا، این امکان را پیدا می‌کنیم که روشن کنیم، چه‌روزی از هفته، به اول ژانویه سال‌های ۲۱۸۵ و ۲۲۰۱ می‌افتد. محاسبه‌ای ساده

نشان می‌دهد که در فاصله سال‌های از ۲۱۸۵ تا ۲۲۰۰، هریک از روزهای شنبه، دوشنبه، چهارشنبه، پنجشنبه و جمعه دوبار و هریک از روزهای یکشنبه و سه‌شنبه سه‌بار به اول ژانویه می‌افتند. اول ژانویه سال ۲۲۰۱ پنجشنبه است. در مدت $28 \times 3 = 84$ سال از ۲۲۰۱ تا ۲۲۸۴، روز اول ژانویه برای روزهای مختلف هفته، با فراوانی یکسان پیش می‌آید. اول ژانویه ۲۲۸۵، با اول ژانویه سال ۲۲۰۱، در یک روز هفته، یعنی پنجشنبه است.

به سادگی می‌توانیم به این نتیجه برسیم که، در فاصله از سال ۲۲۸۵ تا ۲۳۰۰، روز اول ژانویه به هر یک از روزهای شنبه، دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه و پنجشنبه دوبار و به هر یک از روزهای یکشنبه و جمعه سه‌بار می‌افتد. به این ترتیب، با توجه به دوره‌هایی که در طول آن‌ها، اول ژانویه، با فراوانی یکسان برای روزهای هفته اتفاق می‌افتد (و آن‌ها را کنار می‌گذاریم)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 2 = \text{دوشنبه}; & 6 &= 3 + 3 = \text{یکشنبه}; & 4 &= 2 + 2 = \text{شنبه}; \\ 5 &= 1 + 2 + 2 = \text{چهارشنبه}; & 6 &= 1 + 3 + 2 = \text{سه‌شنبه}; \\ 6 &= 1 + 2 + 3 = \text{جمعه}; & 5 &= 1 + 2 + 2 = \text{پنجشنبه}; \end{aligned}$$

به این ترتیب، روز اول ژانویه، به یکشنبه بیشتر می‌افتد تا شنبه.

(b) باروشی شبیه حالت (a) می‌توان محاسبه کرد که، در یک دوره ۴۰۰ ساله، برای سی‌امین روز ماه داریم (درمسأله، ماه‌های فرنگی در نظر گرفته شده است):

$$\begin{aligned} \text{شنبه: } 684 \text{ بار}; & \text{یکشنبه: } 687 \text{ بار}; & \text{دوشنبه: } 685 \text{ بار}; & \text{سه‌شنبه: } 685 \\ \text{بار}; & \text{چهارشنبه: } 687 \text{ بار}; & \text{پنجشنبه: } 684 \text{ بار}; & \text{جمعه: } 688 \text{ بار}. \end{aligned}$$

بنابراین، روز سی‌ام ماه، بیشتر به جمعه می‌افتد.

۳۰. به سادگی ثابت می‌شود، اگر رقم آخر عددی را حذف کنیم، نسبت عدد اصلی به عدد حاصل کمتر از ۱۰ نیست. اگر عددی به صفر ختم شده باشد بعد از حذف رقم سمت راست خود، ۱۰ بار کاهش پیدا می‌کند (یعنی به $\frac{1}{10}$).

خود تبدیل می‌شود) و، بنابراین، همه این گونه عددها، با شرط مسأله سازگارند.

اکنون فرض می‌کنیم، عدد طبیعی x ، با حذف رقم سمت راست آن،

بیش از ۱۰ بار کاهش پیدا کند (یعنی به کوچکتر از $\frac{1}{10}$ خود تبدیل شود).

میزان کاهش عدد را $10 + \alpha$ بار می‌گیریم ($\alpha \geq 1$). y را خارج قسمت عدد x بر ۱۰، و z را رقم یکان x فرض می‌کنیم: $x = 10y + z$. بعد از حذف رقم یکان x ، به عدد y می‌رسیم و، بنابراین، باید داشته باشیم:

$$x = (10 + a)y$$

یعنی

$$10y + z = (10 + a)y$$

که از آنجا به دست می‌آید: $z = ay$.

چون $z < 10$ ، پس $y < 10$ و $a < 10$. به این ترتیب عدد مورد نظر تنها شامل دو رقم است و، در ضمن، نمی‌تواند بیش از ۱۹ برابر عددی باشد که با حذف رقم آخر آن به دست می‌آید.

اگر بخواهیم با حذف رقم یکان، عدد مفروض ۱۱ بار کاهش پیدا کند، باید عددهای ۱۱، ۲۲، ۳۳، ۴۴، ۵۵، ۶۶، ۷۷، ۸۸ و ۹۹ را در نظر بگیریم. در واقع از برابری $10 + a = 11$ به دست می‌آید $a = 1$ و در نتیجه $z = ay = y$ و $x = 10y + z = 11y$ که، در آن، y می‌تواند هر یک از رقم‌های از ۱ تا ۹ باشد. به همین ترتیب می‌توان عددهایی را پیدا کرد که با

حذف رقم یکان آن‌ها، عدد مفروض به $\frac{1}{12}$ خود تبدیل شود؛ این عددها برابر

با ۱۲، ۲۴، ۳۶ و ۴۸. عددهایی که با حذف رقم یکان خود، ۱۳ بار کاهش پیدا می‌کنند چنین‌اند: ۱۳، ۲۶ و ۳۹. عددهای ۱۴ و ۲۸، با حذف رقم سمت راست خود، ۱۴ بار کاهش می‌یابند و عددهای ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸ و ۱۹ با حذف رقم یکان خود، به ترتیب، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸ و ۱۹ بار کاهش می‌یابند.

۳۱. a عدد مجهول را $(k+1)$ رقمی می‌گیریم. بنابراین می‌توان این عدد را به صورت $6 \times 10^k + y$ در نظر گرفت که، در آن، y عددی است k رقمی (که در ضمن، می‌تواند با چند صفر آغاز شده باشد). بنابراین به مسأله باید داشته باشیم:

$$6 \times 10^k + y = 25y \Rightarrow y = \frac{6 \times 10^k}{24}$$

اگر بخواهیم 6×10^k بر ۲۴ بخش پذیر باشد، k نمی‌تواند کوچکتر از ۲ باشد. به ازای $k \geq 2$ ، به دست می‌آید: $y = 25 \times 10^{k-2}$ ، یعنی عدد y به این صورت است:

$$y = \underbrace{2500 \dots 0}_{k-2}$$

و همهٔ عددهای مورد نظر مسأله، به صورت $\underbrace{62500 \dots 0}_n$ در می‌آیند که، در آن n می‌تواند برابر ۰، ۱، ۲، ... باشد.

b) عددی $k+1$ رقمی در نظر می‌گیریم که با رقم a آغاز شده باشد. اگر k رقم سمت راست عدد را با y نشان دهیم، با استدلالی شبیه مسأله ۳۱-a باید داشته باشیم:

$$y = \frac{a \cdot 10^k}{34}$$

روشن است که برای $a \leq 9$ و عدد طبیعی k ، نمی‌توان حالتی را پیدا کرد که عدد $a \cdot 10^k$ بر ۳۴ بخش پذیر باشد.

یادداشت. می‌توانیم با روشی مشابه، روشن کنیم که، اگر عددی با رقم a آغاز شده باشد، در چه حالتی b برابر عددی است که با حذف رقم a به دست می‌آید. تنها در حالتی این وضع امکان دارد که همهٔ عامل‌های اولی از $b-1$ که با ۲ و ۵ فرق دارند، عامل‌های اول عدد a هم باشند و، در ضمن، نمای این عامل‌ها در عدد a کمتر از نمای عامل‌های مشابه در عدد $b-1$ نباشد.

یعنی وقتی که کسر $\frac{a}{b-1}$ را بتوان به کسر دهدهی محدود تبدیل کرد (وقتی

که در تقسیم a بر $b-1$ ، تقسیم درجایی به پایان برسد). تنها در چنین صورتی می‌توان عددی را پیدا کرد که با رقم a آغاز شود و با حذف a ، درست b برابر عدد حاصل باشد. مثلاً اگر بخواهیم عددی را پیدا کنیم که با حذف رقم اول خود، ۱۵ برابر عدد حاصل باشد، باید این عدد با ۷ آغاز شده باشد، زیرا $2 \times 7 = 14 = 15 - 1$ ؛ ولی عددی را نمی‌توان پیدا کرد که با حذف رقم اول آن، ۸۵ برابر عدد حاصل باشد، زیرا $1 = 85 - 84$ و ۸۴ بر ۳ و ۷ بخش پذیر است و در ضمن، عددی یک رقمی وجود ندارد که بر ۳ و ۷ بخش پذیر باشد.

۰۳۲ a) قبل از همه ثابت می‌کنیم؛ اگر با حذف رقمی از عدد N ، به عددی طبیعی برابر $\frac{N}{9}$ برسیم، این رقم حذف شده، باید رقم اول یا رقم دوم (از سمت چپ) باشد. عدد N را $n+1$ رقمی و به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_n = N$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ ، رقم‌های عدد N ، از چپ به راستند. اگر رقمی غیر از a_0 یا a_1 را حذف کرده باشیم و عدد $\frac{N}{9}$ به دست آمده باشد، در این

صورت عدد $\frac{N}{9}$ دارای n رقم خواهد بود و با رقم‌های a_0 و a_1 آغاز شده است.

$$a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \dots = \frac{N}{9}$$

دوطرف این برابری را در ۱ ضرب و برابری مربوط به عدد N را از آن کم می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$A \cdot 10^{n-2} + B \cdot 10^{n-3} + \dots = \frac{N}{9}$$

که در آن، A ، B ، ... رقم‌هایی هستند، بنابراین $10^{n-1} < \frac{N}{9}$ ، این نابرابری نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا

$$\frac{N}{9} = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \dots \geq 10^{n-1}$$

می‌دانیم عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد؛ بنابراین، اگر هم عدد N و هم عدد حاصل از N با حذف يك رقم مضربی از ۹ باشند، به ناچار رقم حذف‌شده هم باید بر ۹ بخش‌پذیر، یعنی برابر ۰ یا برابر ۹ باشد بنابراین، در عدد مجهول، باید یکی از دو رقم اول یا دوم (از سمت چپ) برابر ۰ یا ۹ باشد و، در ضمن، همان رقم را حذف کنیم. ولی عدد N نمی‌تواند با ۰ آغاز شود؛ در ضمن، اگر اولین رقم برابر ۹ باشد، تعداد رقم‌های عدد $\frac{N}{9}$ با تعداد رقم‌های عدد N برابر می‌شود، در حالی که وقتی یکی از رقم‌های N را حذف می‌کنیم، تعداد رقم‌های آن يك واحد کمتر می‌شود. به این ترتیب، در عدد N ، نخستین رقم را هم نمی‌توان حذف کرد. اکنون، دومین رقم عدد N را برابر ۹ می‌گیریم. اگر با حذف این رقم، عدد حاصل برابر $\frac{N}{9}$ باشد، باید داشته باشیم:

$$N = a_0 \cdot 10^n + 9 \times 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n,$$

$$\frac{N}{9} = a_0 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n$$

اگر دوطرف برابری دوم را در ۱ ضرب و، سپس، برابری اول را از آن کم کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{N}{9} < 10^{n-1} \quad (a_2 \leq 9 \text{ زیرا})$$

که ممکن نیست. به این ترتیب، روشن می‌شود که، اگر بخواهیم با حذف يك

رقم N به عدد $\frac{N}{9}$ برسیم، تنها می‌توان حالتی را در نظر گرفت که، دومین رقم

عدد N ، برابر ۰ باشد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$\frac{N}{9} = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n$$

از این جا به دست می‌آید:

$$\frac{N}{9} = N - a_0 \cdot 10^n + a_0 \cdot 10^{n-1} = N - a_0 \cdot 10^{n-1} \cdot 9$$

و سرانجام

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{N}{9} = \frac{N}{9} - a_0 \cdot 10^{n-1}$$

یعنی، برای این که $\frac{N}{9}$ را بر ۹ تقسیم کنیم، کافی است رقم اول آن (در سمت

چپ) را حذف کنیم.

(b) در حالت (a) داریم:

$$\frac{N}{9} = N - a_0 \cdot 10^{n-1} \cdot 9$$

از همین برابری می‌توان N را به دست آورد:

$$N = \frac{a_0 \cdot 10^{n-1} \cdot 81}{8}$$

اکنون، اگر به جای a_0 ، رقم‌های ۱، ۲، ۳ و غیره را قرار دهیم، برای عدد N به دست می‌آید:

$$10125, 2025, 30375, 405, 50625, 6075, 70875$$

اگر در سمت راست هریک از این عددها، چند صفر (به تعداد دلخواه) قرار دهیم،

باز هم عدد حاصل با شرط‌های مسأله سازگار است (a_0 نمی‌تواند برابر ۸ یا ۹ باشد، زیرا در این حالت‌ها، دومین رقم عدد N برابر ۰ نمی‌شود).

۰۳۳. a فرض کنید، وقتی در عدد طبیعی N ، رقم سوم (از سمت چپ) را کم کنیم به $\frac{1}{m}$ خود تبدیل شود، در این صورت می‌توان نوشت:

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + a_3 \cdot 10^{n-3} + \dots + a_n,$$

$$10 \cdot \frac{N}{m} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n \cdot 10$$

به ازای $10 < m$ به دست می‌آید $\frac{(10-m)N}{m} < 10^{n-1}$ که ممکن

نیست، زیرا $\frac{10-m}{m} > \frac{1}{10}$ و $10^{n-1} \leq \frac{N}{10} = a_0 \cdot 10^{n-1} + \dots$ به ازای

$m > 11$ به دست می‌آید $\frac{(m-10)N}{m} < 10^{n-1}$ که باز هم ممکن نیست

(زیرا $\frac{m-10}{m} > \frac{1}{10}$). اگر $m = 11$ ، آن وقت $\frac{N}{11} < 10^{n-1}$ ، یعنی

تعداد رقم‌های عدد $\frac{N}{11} = \frac{N}{m}$ ، از تعداد رقم‌های عدد N ، ۲ واحد کمتر است

که با شرط مسأله نمی‌سازد.

به این ترتیب، تنها $m = 10$ می‌ماند. شرط مسأله، تنها برای عددهایی برقرار است که، همه رقم‌های آن به جز دو رقم اول سمت چپ، برابر صفر باشند (دو رقم اول را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد).

یادداشت. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که، اگر بخواهیم یک عدد طبیعی بر عددی که از حذف رقم k آن به دست می‌آید، بخش پذیر باشد، باید همه رقم‌های این عدد طبیعی، به جز $(k-1)$ رقم سمت چپ آن، برابر صفر باشند.

(b) شبیه حل مسأله ۳۲ می‌توانیم بنویسیم:

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\frac{N}{m} = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n$$

از این جا به دست می‌آید:

$$\frac{N}{m} = N - a_0 \cdot 10^n - a_1 \cdot 10^{n-1} + a_0 \cdot 10^{n-1}$$

با محاسبه‌های ساده‌ای، می‌توان از این برابری، N را به دست آورد:

$$N = \frac{(9a_0 + a_1) \cdot 10^{n-1} \cdot m}{m-1} \quad (*)$$

برابری $(*)$ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} - a_0 \cdot 10^{n-1} + \frac{9(a_0 + a_1) \cdot 10^{n-1}}{m-1}$$

از طرف دیگر، N عددی است $(n+1)$ رقمی که دو رقم اول آن a_0 و a_1 است:

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n$$

و می‌توانیم فرض کنیم که رقم‌های $a_2, \dots, a_n$ ، همه باهم، برابر صفر نیستند (زیرا، اگر همه این رقم‌ها برابر صفر باشند، مسئله ما منجر به حالتی می‌شود که عدد N دورقمی است و ما آن را در مسئله ۳۰ حل کرده‌ایم) به این ترتیب، باید داشته باشیم:

$$0 < -a_0 \cdot 10^{n-1} + \frac{(9a_0 + a_1) \cdot 10^{n-1}}{m-1} < 10^{n-1}$$

که با نابرابری‌های زیر هم‌ارزند:

$$a_0 < \frac{9a_0 + a_1}{m-1} < a_0 + 1 \quad (**)$$

بنابراین، سرانجام، به این نتیجه‌ها می‌رسیم. عدد طبیعی با دستور (*) بیان می‌شود و، در آن، $0 \leq a_0 \leq 9$ و $0 \leq a_1 \leq 9$ ؛ چون $m-1$ نسبت به هم اول اند، کسر $\frac{9a_0 + a_1}{m-1}$ قابل تبدیل به کسر دهدهی متناهی است، مقادیرهای a_0 ، a_1 و m باید در نابرابری‌های (**) صدق کنند؛ به جز این، برای مقادیرهای ممکن N ، باید عددهای دورقمی را هم که درمسأله ۳۰ به دست آورده‌ایم، اضافه کنیم.

تنها این باقی‌مانده است که همه مقادیرهای ممکن a_0 را مورد تحقیق قرار دهیم.

۱. $a_0 = 1$: از نابرابری‌های (**) نتیجه می‌شود:

$$1 < \frac{18}{m-1}, m-1 < 18; \quad \frac{9}{m-1} < 2, m-1 > 4$$

یعنی $4 < m-1 < 18$ اگر $m-1$ را به ترتیب، برابر ۵، ۶، ...، ۱۸ بگیریم، با انتخاب مقدار مناسب برای a_1 ، به این عددها برای N می‌رسیم:

$$N = 108; 105; 10125; 1125; 12375; 135; 14625; 1575;$$

$$16875; 121; 132; 143; 154; 165; 176; 187;$$

$$198; 1625; 195; 192; 180625; 19125$$

درضمن می‌توان درست‌تر است هر يك از این عددها، به هر تعداد صفر قرار داد. با همین روش، برای حالت‌های دیگر a_0 به دست می‌آید:

$$2. a_0 = 2$$

$$N = 2025; 21375; 225; 23625; 2475; 25875; 231; 242;$$

$$253; 264; 275; 286; 297; 2925$$

$$3. a_0 = 3$$

$$N = 30725; 315; 32625; 3375; 34875; 341; 352;$$

$$363; 374; 385; 396$$

$$:a_0 = 4.^{\circ}4$$

$$N = 405; 61625; 4275; 43875; 451; 462; 473; 484; 495$$

$$:a_0 = 5.^{\circ}5$$

$$N = 50625; 5175; 52875; 561; 572; 583; 594$$

$$:a_0 = 6.^{\circ}6$$

$$N = 6075; 61875; 671; 682; 693$$

$$:a_0 = 7.^{\circ}7$$

$$N = 781; 792$$

$$:a_0 = 8.^{\circ}8$$

$$N = 891$$

در حالت $a_0 = 9$ ، عددی برای N به دست نمی‌آید. با توجه به جواب‌های مسأله ۳۵، برای عدد N ، به تعداد ۱۰۴ جواب به دست می‌آید که، درست راست هریک از آن‌ها، به هر تعداد صفر هم می‌توان قرار داد.

(۰۳۴) ادامه حل اول. عددی n رقمی در نظر می‌گیریم که با رقم ۱ آغاز شده باشد و فرض می‌کنیم، وقتی این رقم را از سمت چپ به سمت راست ببریم، عدد X به دست آید. بنابر شرط مسأله داریم:

$$(1 \times 10^m + X) \cdot 3 = 10X + 1 \Rightarrow X = \frac{3 \times 10^m - 1}{7}$$

به کمک این برابری، می‌توان X را به دست آورد. برای این منظور، عدد 3×10^m ، یعنی ۳۰۰۰... را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و عمل تقسیم را تا آن جا ادامه می‌دهیم که، در باقی‌مانده تقسیم، عدد ۱ به دست آید:

$$\begin{array}{r}
 3000...0 \quad | \quad 7 \\
 \hline
 28 \quad | \quad 42857 \\
 \hline
 20 \\
 14 \\
 \hline
 60 \\
 56 \\
 \hline
 40 \\
 35 \\
 \hline
 50 \\
 49 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

به این ترتیب، کوچکترین عدد X برابر است با ۴۲۸۵۷ و، در نتیجه، کوچکترین عدد مورد نظر مسأله برابر ۱۴۲۸۵۷ می‌شود. ولی تقسیم بالا را می‌توان ادامه داد تا برای بار دوم، بار سوم و غیره، به باقی‌مانده واحد برسیم؛ بنابراین، جواب مسأله به این صورت است:

$$\underbrace{142857 \quad 142857 \quad \dots \quad 142857}_{k \text{ مرتبه}}$$

داده حل دوم. برای عدد مطلوب، رقم دوم را (از سمت چپ) x ، رقم سوم را y و غیره می‌نامیم. بنابراین، عدد مورد نظر مسأله به صورت $1x\overline{y...zt}$ درمی‌آید. با توجه به شرط مسأله، باید داشته باشیم:

$$1x\overline{y...zt} \times 3 = \overline{xy...zt}1$$

از این برابری روشن است که $t=7$ (در غیر این صورت، حاصل ضرب سمت چپ به رقم ۱ ختم نمی‌شود) رقم دهگان عدد (یعنی z) باید چنان باشد که، در نتیجه ضرب، رقم دهگان حاصل برابر ۷ شود. چون $3 \times 7 = 21$ ، بنابراین z را باید طوری انتخاب کرد که، ضمن ضرب آن در ۳، به عددی با رقم یکان ۵ برسد (که وقتی با ۲، که از ضرب 3×7 ، یعنی صدگان ۲۱ به آن اضافه می‌شود،

همان ۷ به دست آید؛ به این ترتیب $z = ۵$. اگر با همین روش، استدلال خود را ادامه دهیم، به تدریج همهٔ رقم‌های عدد به دست می‌آید (درجایی می‌توان متوقف شد که به رقم واحد برای سمت چپ عدد برسیم. کوچکترین عددی که از این راه به دست می‌آید ۴۲۸۵۶ است. اگر بعد از ظاهر شدن رقم واحد، کار خود را ادامه دهیم، معلوم می‌شود که عدد مطلوب را می‌توان هر عددی به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\underbrace{142857 \quad 142857 \quad 142857 \quad \dots \quad 142857}_{k \text{ مرتبه}}$$

(b) طبق شرط مسأله، وقتی رقم سمت چپ را به طرف راست عدد بیاوریم، اولاً تعداد رقم‌های عدد تغییر نمی‌کند، ثانیاً عدد حاصل سه برابر عدد مفروض می‌شود. بنابراین، رقم سمت چپ، تنها می‌تواند یکی از رقم‌های ۱، ۲ یا ۳ باشد.

ثابت می‌کنیم، این رقم، برابر ۳ هم نمی‌تواند باشد. در واقع باید داشته باشیم:

$$\begin{array}{r} 3xy\dots zt \times \\ 3 \\ \hline xy\dots zt3 \end{array}$$

روشن است که در این صورت، باید $x = ۹$ باشد، یعنی عدد اصلی با ۳۹ آغاز می‌شود، ولی در این صورت، سه برابر آن، یک رقم اضافی نسبت به عدد اصلی پیدا می‌کند، در حالی که تعداد رقم‌های دو عدد، باید با هم برابر باشند.

ولی عدد مطلوب، می‌تواند با ۲ آغاز شود خواننده می‌تواند باروشی شبیه حالت (a) ثابت کند که، کوچکترین این عددها، برابر است با ۲۸۵۷۱۴. همهٔ عددهایی از این گونه، به صورت زیرند:

$$\underbrace{285714 \quad 285714 \quad \dots \quad 285714}_{k \text{ مرتبه}}$$

۳۵. راه‌حل اول. X را عدد مطلوب می‌گیریم، یعنی

$$X = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 6}, \quad 4X = \overline{6 a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$$

$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 6)$ رقم‌های عدد X اند). چون 4×6 به ۴ ختم می‌شود، بنابراین $a_{n-1} = 4$ ، یعنی $X = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-2} 46}$. از این جایی می‌توان a_{n-2} را پیدا کرد 4×46 به دو رقم ۸۶ ختم می‌شود، بنابراین $a_{n-2} = 8$ و عدد به صورت $X = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-3} 846}$ در می‌آید از این جا، رقم قبل از ۸ پیدامی‌شود: $a_{n-3} = 3$ ؛ به همین ترتیب برای بقیه رقم‌ها. عمل را بایده‌تا آن جا ادامه داد که، رقم ۶، در $4X$ ظاهر شود، کوچکترین عددی که از این راه برای X به دست می‌آید، برابر است با $X = 153846$ و $4X = 615384$. راه‌حل دوم. چون رقم یکان عدد X برابر است با ۶، آن را می‌توان به صورت

$$X = 10x + 6$$

نوشت که، در آن، x عددی است که از X با حذف رقم ۶ به دست می‌آید. اگر x عددی m رقمی باشد، با توجه به صورت مسأله داریم:

$$4(10x + 6) = 6 \times 10^m + x$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$x = \frac{2(10^m - 4)}{13} \quad (*)$$

عدد $10^m - 4$ برابر است با ۶ یا ۹۶ یا ۹۹۶ یا ۹۹۹۶ ... از این این عددها، کوچکترین عددی که بر ۱۳ بخش پذیر باشد، ۹۹۹۹۶ است:

$$99996 = 13 \times 7692$$

یعنی به ازای $n = 5$. اگر این مقدار n را در $(*)$ قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$x = 153846, \quad X = 153846$$

۳۶. وقتی عددی را ۵ برابر کنیم و تعداد رقم‌های آن تغییر نکند،

به معنای آن است که، رقم سمت چپ عدد، نمی‌تواند چیزی جز واحد باشد. در ضمن، با انتقال این رقم برابر واحد، به سمت راست عدد، عددی به دست می‌آید که نمی‌تواند مضربی از ۵ باشد (هر مضرب ۵ باید به ۰ یا ۵ ختم شده باشد) به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که: عددی طبیعی وجود ندارد که با انتقال رقم اول آن به سمت راست، ۶ یا ۸ برابر شود.

۳۷. راه حل اول. چون از ضرب عدد مطلوب در ۲، به عددی با همان تعداد رقم‌ها می‌رسیم، بنابراین، چنین عددی نمی‌تواند با رقمی بزرگتر از ۴ آغاز شده باشد. در ضمن، اگر این رقم را به سمت عدد منتقل کنیم، باید به ۲ برابر عدد اصلی برسیم، یعنی عدد حاصل باید زوج باشد، یعنی عدد مطلوب باید با رقمی زوج آغاز شود: ۲ یا ۴.

اکنون فرض می‌کنیم عددی با رقم ۲ یا رقم ۴ آغاز شده باشد. اگر عددی را که از این رقم به دست می‌آید X بنامیم، آن وقت می‌توانیم شبیه راه حل مسأله ۳۴- عمل کنیم. باید داشته باشیم:

$$(2 \times 10^m + X) \times 2 = 10X + 2 \Rightarrow X = \frac{2 \times 10^m - 1}{4}$$

و یا (برای حالتی که عدد با رقم ۴ آغاز شده باشد):

$$(4 \times 10^m + X) \times 2 = 10X + 4 \Rightarrow X = \frac{2 \times 10^m - 1}{2}$$

روشن است که در هیچ کدام از این دو برابری، نمی‌توان عددی طبیعی برای X به دست آورد، زیرا در هر دو حالت، به صورت کسر عددی فرد و مخرج آن عددی زوج است.

راه حل دوم. ابتدا شبیه راه حل اول نتیجه می‌گیریم که عدد مطلوب، باید با ۲ یا ۴ آغاز شده باشد در این صورت، باید داشته باشیم:

$$\overline{2xy \dots zt} \times 2 = \overline{xy \dots zt2} \quad \text{یا} \quad \overline{4xy \dots zt} \times 2 = \overline{xy \dots zt4}$$

در برابری اول، روشن است که ۲، تنها می‌تواند برابر ۱ یا ۶ باشد

(زیرا باید از ضرب آن در ۲، به عددی برسیم که به ۲ ختم شود) ولی، اگر $z=1$ ، آن وقت عدد سمت راست برابری بر ۴ بخش پذیر و عدد سمت چپ آن بر ۴ بخش ناپذیر است؛ و اگر $z=6$ ، وضع برعکس می‌شود، یعنی سمت چپ برابری بر ۴ بخش پذیر و سمت راست آن بر ۴ بخش ناپذیر است. بنابراین عدد ما نمی‌تواند با رقم ۲ آغاز شده باشد.

به برابری دوم می‌پردازیم. در این جا، z می‌تواند برابر ۲ یا ۷ باشد. اگر $z=2$ ، به سادگی می‌توان کار را دنبال کرد و z را به دست آورد. $z=1$ یا $z=6$. اگر $z=1$ ، آن وقت عدد سمت چپ برابری بر ۸ بخش پذیر است، در حالی که عدد سمت راست (که به ۱۲۴ ختم شده است) بر ۸ بخش پذیر نیست. به ازای $z=6$ ، سمت راست برابری مضربی از ۸ است، در حالی که سمت چپ آن، مضرب ۸ نیست. به این ترتیب z نمی‌تواند برابر ۲ باشد. با همین روش می‌توان ثابت کرد که، رقم، z ، برابر ۷ هم نمی‌تواند باشد.

۰۳۸ (a) راه حل اول. عددی که با انتقال رقم سمت چپ آن به سمت راست، به ۷ برابر خود تبدیل شود، به ناچار باید با ۱ آغاز شده باشد (در غیر این صورت، ۷ برابر آن، یک رقم بیشتر از خودش خواهد داشت). عددی را که با حذف رقم ۱ (که در سمت چپ قرار دارد) به دست می‌آید X می‌نامیم و فرض می‌کنیم دارای m رقم باشد. باید داشته باشیم:

$$(1 \times 10^m + X) \times 7 = 10X + 1 \Rightarrow X = \frac{7 \times 10^m - 1}{3}$$

و روشن است که X نمی‌تواند عددی m رقمی باشد، زیرا همیشه داریم:

$$\frac{7 \times 10^m - 1}{3} > 10^m$$

با همین روش می‌توان ثابت کرد که، عددی طبیعی وجود ندارد که با انتقال رقم سمت چپ به طرف راست در آن به عددی برسیم که ۹ برابر عدد اصلی باشد.

راه حل دوم. شبیه راه حل اول نتیجه می‌گیریم که عدد مطلوب، تنها

می‌تواند با رقم ۱ آغاز شود در این صورت، باید داشته باشیم:

$$\overline{1xy \dots zt} \times 7 = \overline{xy \dots zt1}$$

باید $t \times 7$ به ۱ ختم شود، یعنی $t = 3$. به این ترتیب

$$\overline{1xy \dots z3} \times 7 = \overline{xy \dots z31}$$

چون $3 \times 7 = 21$ ؛ در ضمن چون باید حاصل ضرب عدد $z3 \times 7$ به ۳۱ ختم شود، بنابراین باید حاصل ضرب $z \times 7$ به ۱ ختم شود، یعنی $z = 3$ ، به همین ترتیب، می‌توان روشن کرد که هر رقم قبلی در عدد مطلوب باید برابر ۳ باشد و، به این ترتیب، هر گز به رقم ۱ (که باید در آغاز عدد باشد) نمی‌رسیم. بنابراین عددی وجود ندارد که با انتقال رقم آغاز به انتهای آن، به ۷ برابر خودش تبدیل شود.

به همین ترتیب، می‌توان در مورد عددی استدلال کرد که، با انتقال رقم اول به پایان آن، ۹ برابر شود.

(b) راه حل اول. از آن جا که باید تعداد رقم‌های چهار برابر عدد با تعداد رقم‌های خود عدد، یکی باشد، بنابراین، عدد مجهول نمی‌تواند با رقمی بزرگتر از ۲ آغاز شده باشد. از طرف دیگر، اگر عدد با ۱ آغاز شود، وقتی رقم ۱ را به پایان عدد ببریم، عددی فرد به دست می‌آید، در حالی که چهار برابر عدد مجهول، باید عددی زوج باشد. به این ترتیب، رقم اول عدد (در سمت چپ)، تنها ممکن است ۲ باشد در این صورت داریم:

$$(2 \times 10^m + X) \times 4 = 10X + 2 \Rightarrow X = \frac{8 \times 10^m - 1}{1}$$

(عدد مجهول را $m+1$ رقمی گرفته ایم). X باید m رقمی باشد، در حالی که

$$\frac{8 \times 10^m - 1}{1} > 10^m$$

راه حل دوم. شبیه راه حل اول نتیجه می‌گیریم که، عدد مجهول، تنها می‌تواند با ۲ آغاز شود:

$$\overline{2xy \dots zt} \times 4 = \overline{xy \dots zt2}$$

بلافاصله نتیجه می‌شود: $t = 3$ یا $t = 8$. اگر $t = 8$ ، آن وقت عدد سمت راست برابری به ۸۲ ختم شده است که بر ۴ بخش‌پذیر نیست. در حالت $t = 3$ داریم:

$$\overline{2xy \dots z3} \times 4 = \overline{xy \dots z32}$$

که از آن جا می‌توان نتیجه گرفت:

$$4 \times \overline{2xy \dots z0} = \overline{xy \dots z20}$$

و

$$\overline{2xy \dots z} \times 4 = \overline{xy \dots z2}$$

از این جا بلافاصله نتیجه می‌شود $z = 3$ (استدلال ابتدای این راه حل را ببینید). اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، برای رقم‌های دیگر هم، مرتباً، همین عدد ۳ به دست می‌آید و هرگز به رقم ۲ نمی‌رسیم.
۰۳۹. راه حل اول. بنابر فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$\overline{7xy \dots zt} \cdot \frac{1}{3} = \overline{xy \dots zt7}$$

و یا

$$\overline{xy \dots zt7} \times 3 = \overline{7xy \dots zt}$$

روشن است که $t = 1$. با در دست داشتن t می‌توانیم z را محاسبه کنیم: $z = 5$. به همین ترتیب، با حرکت از راست به چپ، رقم‌های عدد پشت سرهم به دست می‌آید. کار ۱ باید درجایی متوقف کرد که به رقم ۷ برسیم (به نحوی که، در ضمن، رقم بعدی نداشته باشد). عدد زیر به دست می‌آید:

$$7241379310344827586206896551$$

و این کوچکترین عددی است که با شرط‌های مسأله می‌سازد. با تکرار هرچند بار این عدد به دنبال هم، عددهای دیگری برای جواب به دست می‌آیند.

داده حل دوم. اگر عدد مجهول را $\overline{xyz...t}$ فرض کنیم، باید از تقسیم آن بر ۳، به عدد $xyz...t$ برسیم:

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline \overline{xyz...t} & xyz...t \end{array}$$

روشن است که $x=2$. اگر در مقسوم و خارج قسمت به جای x عدد ۲ را قرار دهیم، آن وقت می‌توانیم رقم دوم خارج قسمت، یعنی y را پیدا کنیم. با استفاده از رقم دوم خارج قسمت (که در مقسوم هم به جای y قرار می‌دهیم). می‌توانیم رقم سوم خارج قسمت، یعنی z را پیدا کنیم و غیره. عمل را باید تا جایی ادامه دهیم که، در خارج قسمت، رقم ۷ پیدا شود (و در ضمن، مقسوم بر ۳ بخش پذیر باشد). در این روش، هر رقم، به کمک رقم‌هایی که قبلاً پیدا شده‌اند، به صورتی منحصر به فرد به دست می‌آید. این روند محاسبه را می‌توان به صورت زیر نشان داد (در سطر اول رقم‌های مقسوم را نوشته ایم؛ در سطر دوم عددی آمده است که، در گام مربوط، باید بر ۳ تقسیم شود و، بالاخره، در سطر سوم، رقم‌های خارج قسمت را، که به ترتیب به دست می‌آیند، نوشته ایم):

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccccccc} 7 & 4 & 4 & 1 & 3 & 7 & 9 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 7 & 12 & 4 & 11 & 23 & 27 & 9 & 3 & 1 & 10 & 13 & 14 & 24 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 7 & 9 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccccccc} 8 & 2 & 7 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 6 & 8 & 9 & 6 & 5 & 5 & 1 \\ 8 & 22 & 17 & 25 & 18 & 6 & 2 & 20 & 26 & 28 & 19 & 16 & 15 & 5 & 21 \\ 2 & 7 & 5 & 8 & 6 & 2 & 0 & 6 & 8 & 9 & 6 & 5 & 5 & 1 & 7 \end{array} \right.$$

به این ترتیب، برای کوچکترین عدد جواب، به دست می‌آید (عددی ۲۸ رقمی):

$$7 \ 241 \ 379 \ 310 \ 344 \ 827 \ 586 \ 206 \ 896 \ 551$$

داده حل سوم. اگر شبیه مسأله ۳۴-a و با همان نمادها عمل کنیم، باید داشته باشیم:

$$(7 \times 10^m + X) \cdot \frac{1}{3} = 10X + 7 \Rightarrow X = \frac{7 \times 10^m - 21}{29}$$

باید عدد به صورت $70000\dots$ را بر ۲۹ تقسیم کرد و تا آن جا ادامه داد که در باقی مانده عدد ۲۱ به دست آید. از خواننده می‌خواهیم، با انجام این تقسیم، جواب را پیدا کند.

یادداشت. باروشی مشابه، می‌توانیم این مسئله را حل کنیم:

می‌خواهیم کوچکترین عددی را پیدا کنیم که، اگر رقم آغاز آن را، به انتهای عدد منتقل کنیم، به عددی سه برابر خودش تبدیل شود.

در این جا، عددهای ۲۸ رقمی را آورده‌ایم که با ۱، ۳، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ یا ۹ آغاز شده‌اند و اگر رقم اول را به پایان عدد ببریم عددی به دست می‌آید که $\frac{1}{3}$ عدد اصلی است (برای این که رقمی را کنار نگذاشته باشیم و

بتوانیم برای رقم‌های ۱ و ۲ در آغاز عدد، جواب پیدا کنیم، این قرارداد را پذیرفته‌ایم که عدد می‌تواند با ۰ آغاز شود):

۱	۰۳۴	۴۸۲	۷۵۸	۶۲۰	۶۸۹	۶۵۵	۱۷۲	۴۱۳	۷۹۳
۲	۰۶۸	۹۶۵	۵۱۷	۲۴۱	۳۷۹	۳۱۰	۳۴۴	۸۲۷	۵۸۶
۳	۱۰۳	۴۴۸	۲۷۵	۸۶۲	۰۶۸	۹۶۵	۵۱۷	۲۴۱	۳۷۹
۴	۱۳۷	۹۳۱	۰۳۴	۴۸۲	۷۵۸	۶۲۰	۶۸۹	۶۵۵	۱۷۲
۵	۱۷۲	۴۱۳	۷۹۳	۱۰۳	۴۴۸	۲۷۵	۸۶۲	۰۶۸	۹۶۵
۶	۲۰۶	۸۹۶	۵۵۱	۷۲۴	۱۳۷	۹۳۱	۰۳۴	۴۸۲	۷۵۸
۸	۲۷۵	۸۶۲	۰۶۸	۹۶۵	۵۱۷	۲۴۱	۳۷۹	۳۱۰	۳۴۴
۹	۳۱۰	۳۴۴	۸۲۷	۵۸۶	۲۰۶	۸۹۶	۵۵۱	۷۲۴	۱۳۷

با همین روش، مسئله زیر را هم می‌توانیم حل کنیم:

کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که رقم آغاز آن معلوم و برابر α است، و وقتی این رقم را از آغاز به انتهای عدد ببریم، عدد حاصل، l برابر

عدد مفروض باشد.

(۴۰. a) با توجه به شرط مسأله، باید داشته باشیم:

$$\overline{xy...zt} \times a = \overline{tz...yx}$$

که در آن، a برابر با یکی از عددهای ۲، ۳، ۵، ۶، ۷ و ۸ است.

به ازای $a = ۵$ ، x باید برابر ۱ باشد، در غیر این صورت تعداد رقم‌های عدد $\overline{xy...zt} \times ۵$ بیش از تعداد رقم‌های خود عدد $\overline{xy...zt}$ می‌شود ($x = ۰$) را کنار می‌گذاریم، زیرا در این حالت، به برابری $\overline{y...zt} = ۲ \times \overline{tz...y}$ می‌رسیم که به معنای حل مسأله ما به ازای $a = ۲$ است. ولی عدد $\overline{tz...y}$ ۵ بخش پذیر نیست. با همین روش، می‌توان ثابت کرد که a برابر ۶ یا ۸ هم نمی‌تواند باشد.

اگر $a = ۷$ ، آن گاه $x = ۱$. در این حالت باید داشته باشیم $t = ۳$ زیرا تنها از ضرب ۷ در رقم ۳، به عددی می‌رسیم که به ۱ ختم شده است ولی در این صورت روشن است که برابری $\overline{۱y...z۳} \times ۷ = \overline{۳z...y۱}$ نمی‌تواند برقرار باشد، چرا که، سمت چپ برابری، به طور آشکار، از سمت راست آن بزرگتر است.

اگر $a = ۲$ ، آن وقت x نمی‌تواند بزرگتر از ۴ باشد؛ و چون $\overline{tz...yx}$ زوج است، بنابراین، x باید برابر ۲ یا ۴ باشد به ازای $x = ۴$ ، رقم t تنها می‌تواند برابر ۸ یا ۹ باشد، ولی هیچ کدام از دو عدد $\overline{۴y...z۸} \times ۲$ یا $\overline{۴y...z۹} \times ۲$ نمی‌تواند به رقم ۴ ختم شود. اگر $x = ۲$ آن وقت t تنها می‌تواند برابر ۴ یا ۵ باشد، ولی از دو عدد $\overline{۲y...z۴} \times ۲$ و $\overline{۲y...z۵} \times ۲$ هیچ کدام به رقم ۲ ختم نمی‌شوند.

سرانجام اگر $a = ۳$ ، آن گاه رقم x نمی‌تواند بزرگتر از ۳ باشد. اگر $x = ۱$ ، آن وقت t باید برابر ۷ باشد. اگر $x = ۲$ ، آن وقت $t = ۴$ و اگر $x = ۳$ ، آن وقت $t = ۱$. ولی در حالت اول، عدد $\overline{tz...yx}$ از عدد $\overline{xy...zt} \times ۳$ بزرگتر و دو حالت دیگر از آن کوچکتر است.

(b) باید داشته باشیم:

$$\overline{xy...zt} \times ۴ = \overline{tz...yx}$$

روشن است که x باید زوج باشد؛ در ضمن چون تعداد رقم‌ها در عددهای دو طرف

برابری یکی است، بنابراین x می‌تواند برابر ۵ یا ۲ باشد.

$x = ۵$ می‌گیریم. اگر عدد مجهول برابر ۵ باشد، روشن است که با شرط مسأله می‌سازد. در بحث بعدی، قرار را بر این می‌گذاریم که عدد بتواند بایک یا چند صفر آغاز شود. داریم:

$$\overline{y \dots z t} \times 4 = \overline{t z \dots y 0}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود $t = ۵$ (زیرا $t < 4$) و $\overline{y \dots z} \times 4 = \overline{z \dots y}$. اکنون دوباره به همان وضع نخستین رسیده‌ایم که اگر استدلال خود را دنبال کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که باید همه رقم‌های عدد و، بنابراین خود عدد برابر صفر باشد.

به حالت $x = 2$ می‌پردازیم: $\overline{2 y \dots z t} \times 4 = \overline{t z \dots y 2}$

چون $2 \times 4 = 8$ ، پس t تنها می‌تواند برابر ۸ یا ۹ باشد؛ ولی چون حاصل ضرب $t \times 4$ به رقم ۲ ختم شده است، بنابراین $t = 8$: $\overline{2 y \dots z 8} \times 4 = \overline{8 z \dots y 2}$. چون $23 \times 4 > 90$ ، پس رقم y تنها می‌تواند برابر ۵، ۱ یا ۲ باشد، ولی رقم دهگان در حاصل ضرب $\overline{z 8} \times 4$ برای هر عدد z ، عددی فرد است، بنابراین $y = 1$ ، در ضمن z تنها می‌تواند برابر ۲ یا ۷ باشد (تا در رقم دهگان از حاصل ضرب $\overline{z 8} \times 4$ ، رقم ۱ به دست آید). چون $21 \times 4 > 72$ ، پس $z = 7$. به این ترتیب، عدد مورد نظر به صورت $\overline{21 \dots 7 8}$ است. خود عدد چهار رقمی ۲۱۷۸ با شرط مسأله سازگار است: $2187 \times 4 = 8721$ ، به حالتی می‌پردازیم که، تعداد رقم‌های عدد، بیشتر از ۴ باشد. باید داشته باشیم:

$$\overline{21uv \dots rs78} \times 4 = \overline{87sr \dots vu12}$$

که می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$48 \times 10^{k+2} + 312 \times \overline{uv \dots rs00} \times 4 = 87 + 10^{k+2} + 12 + \overline{sr \dots vu00}$$

و یا

$$\overline{uv \dots rs} \times 4 + 3 = \overline{3sr \dots vu}$$

چون حاصل ضرب عدد $\overline{uv \dots rs}$ در ۴، یک رقم بیشتر از خود این عدد دارد، و چون عدد حاصل ضرب با ۳ آغاز شده است، بنابراین u تنها می‌تواند برابر ۹، ۸ یا ۷ باشد؛ ولی روشن است که $\overline{3sr \dots vu}$ عددی است فرد،

یعنی u تنها می‌تواند برابر ۹ یا ۷ باشد. هریک از این دو مورد را، به طور جداگانه، بررسی می‌کنیم.

۱. $u = 9$. در این حالت داریم:

$$\overline{9v\dots rs} \times 4 + 3 = \overline{3sr\dots v9}$$

از این جابجایی می‌شود $s = 9$ (چون $s = 4$ قابل قبول نیست، زیرا عدد $\overline{34r\dots v9}$ به روشنی از عدد $\overline{9v\dots r4} \times 4 + 3$ کوچکتر است) و

$$\overline{9v\dots r9} \times 4 + 3 = \overline{39r\dots v9} \Rightarrow \overline{v\dots r} \times 4 + 3 = \overline{3r\dots v}$$

از عدد $\overline{uv\dots rs}$ با حذف رقم ۹ از آغاز و رقم ۹ از پایان، عددی به دست آمده که باید دارای همان ویژگی عدد $\overline{uv\dots rs}$ باشد. به این ترتیب $\overline{uv\dots rs}$ را می‌توان برابر ۹، ۹۹، ۹۹۹ و غیره گرفت؛ یعنی عددهای $\dots, 21999978, 21999978, 21999978, \dots$ با شرط مسأله سازگارند.

۲. $u = 7$. در این حالت، باید داشته باشیم:

$$\overline{7v\dots rs} \times 4 + 3 = \overline{3sr\dots v7}$$

در این جا، با استدلالی شبیه آنچه در ابتدای حل مسأله داشتیم، به سادگی به دست می‌آید: $s = 1$ ، $v = 8$ و $r = 2$ ، یعنی $\overline{uv\dots rs}$ به صورت $\overline{78\dots 21}$ درآمده است،

در می‌آید و، در ضمن، اگر عدد $\overline{xyuv\dots rszt}$ که $\frac{1}{4}$ مقلوب خودش است و

$\overline{uv} = 78$ و $\overline{rs} = 21$ ، یعنی عدد به صورت $\overline{2178\dots 2178}$ درآمده است،

اگر $\overline{uv}$ و $\overline{rs}$ را حذف کنیم، باز هم به عددی می‌رسیم که $\frac{1}{4}$ مقلوب خودش است.

است. به این ترتیب اگر عددی که $\frac{1}{4}$ مقلوب خودش است، با عددهای دنباله

$$(\ast) \quad \dots, \underbrace{2199\dots 978}_{\text{رقم } k}, \dots, 21978, 21978, 219978, \dots, 2178, 2178, \dots$$

متفاوت باشد، به صورت عددی است که ترکیب‌های یکسانی از عددهای متعلق به دنباله $(\ast)$ در آغاز و پایان آن قرار گیرند؛ در ضمن اگر این ترکیب‌های

یکسان، از آغاز و پایان عدد حذف شوند، باز هم به عددی می‌رسیم که $\frac{1}{4}$ مقلوب خودش است. مثلاً در عدد ۲۱۷۸۲۱۷۸ باید تمام رقم‌های عدد را حذف کرد و یا در عدد ۲۱۷۸۲۱۹۷۸۲۱۷۸ باید ۲۱۷۸ را از آغاز و انتهای عدد حذف کرد تا دوباره به عددی برسیم که $\frac{1}{4}$ مقلوب خود باشد. بنابراین، هر عددی که $\frac{1}{4}$ مقلوب خودش باشد، به یکی از دو صورت زیر است:

$$P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n P_{n-1} \dots P_2 P_1,$$

$$P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n P_n P_{n-1} \dots P_2 P_1$$

که در آن‌ها، $P_1, P_2, \dots, P_n$ ، عددهایی از دنباله (*) هستند به عنوان نمونه، می‌توان این عددها را در نظر گرفت:

$$2197821978; 21997882178219978;$$

$$21978021997800219978021978; 02199999780$$

آخرین عدد را وقتی می‌توان جوابی از این مسأله دانست که ۰ را به عنوان رقم اول عدد بپذیریم.

با همین روش می‌توان ثابت کرد، عددهایی را که $\frac{1}{9}$ مقلوب خودشان

باشند، باید از ترکیب عددهای دنباله زیر به دست آورد:

$$0; 1089; 10989; 109989; \dots; \underbrace{1099\dots989}_{k \text{ بار}}; \dots$$

۴۱. a) عدد مجهول را N ، عدد شامل سه رقم سمت چپ آن را p و

عدد شامل سه رقم سمت راست آن را q می‌نامیم. باید داشته باشیم

$$1000q + p = 6(1000p + q) = 6N$$

از این جا به دست می‌آید:

$$(1000q + p) - (1000p + q) = 999(q - p) = 5N$$

و بنابراین، عدد N باید مضربی از ۹۹۹ باشد.
از طرف دیگر، می‌توان نوشت:

$$p + q = (1000p + q) - 999p = N - 999p$$

یعنی $p + q$ هم بر ۹۹۹ بخش‌پذیر است؛ ولی p و q عددهایی سه‌رقمی‌اند و روشن است که نمی‌توانند، به‌طور هم‌زمان، برابر ۹۹۹ باشند، بنابراین

$$p + q = 999$$

اکنون دیگر به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$(1000p + q) + (1000q + p) = 1001(p + q) = 7N;$$

یعنی $7N = 999999$ و $N = 142857$.

(b) اگر شیهه مسأله ۴۱- a، عدد شامل چهار رقم سمت چپ را p و عدد شامل چهار رقم سمت راست را q بنامیم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$7N = 10001(p + q) = 99999999$$

و این برابری به‌ازای هیچ مقداری از N نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا ۹۹۹۹۹۹۹ بر ۷ بخش‌پذیر نیست.

۴۲. اگر x را عدد مجهول بگیریم، از آن‌جا که هر یک از عددهای $6x$ و $7x$ شش‌رقمی است، بنابراین، عدد x بارقم ۱ آغاز می‌شود و نتیجه می‌گیریم: (۱) رقم‌های اول (در سمت چپ)، در عددهای x ، $2x$ ، $3x$ ، $4x$ ، $5x$ و $6x$ با هم فرق دارند و، در نتیجه، همان شش‌رقمی هستند که در نمایش دهمی عدد x وجود دارند؛

(۲) همه رقم‌های عدد x ، با هم متمایزند.

مجموعه این رقم‌ها شامل صفر نیست و، بنابراین، رقم یکان x عددی فرد است (اگر رقم سمت راست x زوج باشد، آن‌وقت $5x$ به صفر ختم

می‌شود) و، درضمن، رقم‌یکان x عددی غیر از ۵ است (اگر رقم‌یکان x برابر ۵ باشد، آن وقت $۲x$ به‌صفر ختم می‌شود). به‌این ترتیب، رقم‌های یکان در عددهای x ، $۲x$ ، $۳x$ ، $۴x$ ، $۵x$ و $۶x$ با هم فرق دارند و همان مجموعه‌شش رقمی را تشکیل می‌دهند که در نمایش دهدهی عدد x وجود دارند، یعنی مجموعه رقم‌های یکان در این‌شش عدد، شامل واحد است. واحد، تنهایی تواند رقم سمت راست $۳x$ باشد، زیرا $۲x$ و $۴x$ و $۶x$ عددهایی زوج‌اند و $۵x$ هم به ۵ ختم می‌شود؛ ۷ تنها می‌تواند رقم‌یکان x باشد ($۲x$ و $۴x$ و $۶x$ عددهایی زوج‌اند، $۳x$ به‌واحد $۵x$ به‌۵ ختم می‌شود)، بنابراین عدد $۲x$ به ۴، عدد $۴x$ به ۸ و عدد $۶x$ به ۲ ختم می‌شود. چون رقم‌های آغاز این شش عدد، همان مجموعه رقم‌های یکان آن‌هاست، می‌توان نوشت:

$$x \times 1 = ۱****۷$$

$$x \times ۲ = ۲****۴$$

$$x \times ۳ = ۳****۱$$

$$x \times ۴ = ۵****۸$$

$$x \times ۵ = ۷****۵$$

$$x \times ۶ = ۸****۲$$

در این‌جا، هر ستاره به‌معنای یک رقم است.

در این‌جا، نه‌تنها هر سطر شامل ۶ رقم متفاوت ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ است، بلکه هر یک از ستون‌ها هم شامل همین شش رقم است. درواقع، مثلاً فرض می‌کنیم رقم سوم $۲x$ با رقم سوم $۵x$ برابر با a باشند (a را می‌توان هر یک از شش رقم، به‌جز دورقمی که در آغاز $۲x$ و $۵x$ است، در نظر گرفت). در این صورت، تفاضل $۳x = ۵x - ۲x$ ، عددی است شش رقمی که در رقم سوم آن، باید ۹ قرار گیرد، که نمی‌تواند درست باشد، زیرا نمایش دهدهی عدد $۳x$ تنها شامل رقم‌های ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ است.

به‌ستونی که قبلاً برای عددهای x ، $۲x$ ، $۳x$ ، $۴x$ و $۵x$ نوشته‌ایم

برمی‌گردیم. در هر ستون، درست راست برابری‌ها، مجموع رقم‌ها برابر است با

$$۱+۲+۴+۵+۷+۸=۲۷$$

و بنابراین از مجموع این ستون‌ها به دست می‌آید:

$$۲۱x = ۲۹۹۹۹۹۷ \Rightarrow x = ۱۴۲۸۵۷$$

و به سادگی می‌توان محاسبه کرد:

$$x = ۱۴۲۸۵۷$$

$$۲x = ۲۸۵۷۱۴$$

$$۳x = ۴۲۸۵۷۱$$

$$۴x = ۵۷۱۴۲۸$$

$$۵x = ۷۱۴۲۸۵$$

$$۶x = ۸۵۷۱۴۲$$

[این شش عدد، به ترتیب دوره‌های تناوب در تبدیل کسرهای $\frac{۱}{۷}$ ، $\frac{۲}{۷}$ ، $\frac{۳}{۷}$ ، $\frac{۴}{۷}$ ، $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۶}{۷}$ به کسرهای دهدهی هستند. م.]

۴۳. عدد مجهول را $N = \overline{xyz} = ۱۰۰x + ۱۰y + z$ می‌گیریم.

با تبدیل رقم‌های عدد N ، پنج عدد جدید به دست می‌آید:

$$N_1 = \overline{yxz} = ۱۰۰y + ۱۰x + z, \dots, N_5 = \overline{zyx} = ۱۰۰z + ۱۰y + x$$

باید مجموع $N + N_1 + \dots + N_5$ برابر $۶N$ باشد، یعنی

$$(۲ \times ۱۰۰ + ۲ + ۱۰ + ۲)(x + y + z) = ۶(۱۰۰x + ۱۰y + z)$$

(چون هر یک از رقم‌های عدد N ، در شش عدد N ، N_1 ، N_2 ، N_3 ، N_4 و N_5 ، دوبار در مرتبه یکان، دوبار در مرتبه دهگان، دوبار در مرتبه صدگان قرار می‌گیرد). به این ترتیب

$$37(x+y+z) = 100x + 10y + z$$

که از آن جا به دست می آید: $7x = 3y + 4z$ و یا $7(x-y) = 4(z-y)$.
 قدر مطلق تفاضل های $x-y$ و $z-y$ بیشتر از ۹ نیست. بنابراین، برابری
 اخیر تنها در یکی از حالت های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ z-y=0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x-y=4 \\ z-y=7 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x-y=-4 \\ z-y=-7 \end{cases}$$

اگر $z-y=7$ ، آن وقت x برابر ۹ یا ۸ یا ۷ می شود و اگر $z-y=-7$ ،
 برای z یکی از رقم های ۹، ۸ یا ۷ به دست می آید و اگر $z-y=-7$ ،
 آن وقت رقم y یکی از عددهای ۹، ۸ یا ۷ می تواند باشد. به این ترتیب، ۱۵
 مقدار ممکن برای عدد N پیدا می شود:

$$N = 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 405, \\ 518, 629, 370, 481, 592$$

($N=000$) را در نظر نگرفته ایم).

۴۴. روشن است که عددهای A و A' بایه ده رقمی باشند. فرض کنید:

$$A = \overline{a_1 a_2 \dots a_9 a_{10}}, \quad A' = \overline{a'_1 a'_2 \dots a'_9 a'_{10}}$$

عددهای A و A' را به صورت ستونی زیر هم می نویسیم و با هم جمع
 می کنیم. روشن است، برای این که مجموع این دو عدد برابر 10^9 می شود
 (عددی یازده رقمی که رقم آغاز آن واحد و ده رقم دیگر برابر ۰ باشد) که
 اندیسی مانند i وجود داشته باشد ($0 \leq i \leq 9$)، به نحوی که

$$a_1 + a'_1 = 0, a_2 + a'_2 = 0, \dots, a_i + a'_i = 0; \quad (*)$$

$$a_{i+1} + a'_{i+1} = 10, a_{i+2} + a'_{i+2} = 9, \dots, a_{10} + a'_{10} = 9$$

(اگر $i=9$ ، آن وقت مجموع هایی به صورت $a_{i+2} + a'_{i+2}, a_{i+3} + a'_{i+3}, \dots$
 وجود ندارند که با ۹ برابر باشند؛ و اگر $i=0$ ، آن وقت مجموع هایی از نوع
 $a_1 + a'_1, \dots, a_i + a'_i$ که برابر با صفر باشند، وجود ندارند.)

اگر همه برابری‌های (*) را باهم جمع کنیم، به دست آید:

$$(a_1 + a'_1) + (a_2 + a'_2) + \dots + (a_{10} + a'_{10}) = 10 + 9(9 - i)$$

چون رقم‌های $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ همان رقم‌های $a'_1, a'_2, \dots, a'_{10}$ (منتهی باردیف دیگری) هستند، بنابراین سمت راست برابری بالا، عددی است زوج برابر با $2(a_1 + \dots + a_{10})$ ؛ یعنی عدد $10 + 9(9 - i)$ عددی است زوج. از این جا روشن می‌شود که i باید فرد باشد، یعنی نمی‌تواند برابر ۰ شود ($i = 1$ یا $i = 3$ یا $i = 5, \dots$). به این ترتیب $a_1 + a'_1 = 0, a_1 = a'_1 = 0$ یعنی هم عدد A و هم عدد A' ، بر ۱۰ بخش پذیرند.

۴۵. عددهای M و N را به صورت ستونی زیر هم می‌نویسیم و باهم جمع می‌کنیم. اگر همه رقم‌های عدد $M + N$ فرد باشند، به معنای آن است که مجموع رقم‌های یکان در دو عدد، برابر عددی فرد است؛ چون دو عدد «مقلوب» یکدیگرند، مجموع دو رقم آغاز این عددها هم عددی فرد می‌شود و (از آن جا که همه رقم‌های مجموع فردند)، مجموع رقم‌های دوم عددها، و همچنین مجموع رقم‌های دهگان عددها، نباید از ۹ تجاوز کند. (چرا که اگر مجموع رقم‌های ستون دوم، از سمت چپ، بزرگتر یا برابر ۱۰ باشد، یک واحد به ستون آغازی رقم‌ها اضافه می‌شود و مجموع آن‌ها را زوج می‌کند). به این ترتیب، در روند عمل جمع، دو ستون اول و دو ستون آخر، تاثیری بر رقم‌های دیگر مجموع $M + N$ نمی‌گذارند. بنابراین، می‌توانیم این رقم‌ها را از عددهای M و N حذف و استدلال خود را درباره عددهای ۱۳ رقمی M_1 و N_1 ادامه دهیم. با همان روش، نتیجه می‌گیریم که، اگر مجموع $M_1 + N_1$ ، رقم‌هایی فرد داشته باشد، آن وقت، مجموع دو رقم یکان و دو رقم دهگان آن‌ها (و همچنین مجموع دو رقم در دو ستون آغازی) تاثیری بر مجموع رقم‌های دیگر دو عدد نمی‌گذارد. اگر این چهار رقم را از عددهای M_1 و N_1 حذف کنیم (دو رقم سمت چپ و دو رقم سمت راست در هر عدد)، به عددهای ۹ رقمی M_2 و N_2 می‌رسیم. از عددهای M_2 و N_2 می‌توانیم به عددهای M_3 و N_3 (۵ رقمی) و، سرانجام، به عددهای M_4 و N_4 (یک رقمی) عبور کنیم. این دو عدد یک رقمی، در واقع، همان رقم‌های

وسط در دو عدد M و N هستند و با هم برابرند و، در نتیجه، مجموع آنها نمی‌تواند عددی فرد باشد. به این ترتیب، در رقم‌های مجموع $M+N$ ، دست کم یک رقم زوج وجود دارد.

یادداشت: روشن است که، این استدلال را می‌توان برای هر دو عدد M و N که مقلوب یکدیگر و تعداد رقم‌های هر یک به صورت $4n+1$ باشد، به کار برد. در حالتی که تعداد رقم‌های عدد به صورت $4n+1$ نباشد، می‌توان عدد M را طوری در نظر گرفت که مجموع M با مقلوب خود، عددی باشد که همه رقم‌هایش فرد از آب در آیند، مثلاً برای عدد سه رقمی ۶۰۷ داریم:

$$607 + 706 = 1313$$

و یا برای عدد چهار رقمی ۴۳۲۵:

$$4325 + 5234 = 9559$$

(از خواننده می‌خواهیم، این حکم را ثابت کند.)

۴۶. (a) داریم: $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ ؛ از سه عدد متوالی، همیشه یکی، مضربی است از ۳ و، بنابراین، حاصل ضرب سه عدد متوالی، همیشه بر ۳ بخش پذیر است.

(b) داریم: $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. اگر عدد درست n ، به یکی از رقم‌های ۰، ۱، ۴، ۵، ۶ یا ۹ ختم شده باشد، آن وقت، یکی از سه عامل نخستین درست راست برابری بر ۵ بخش پذیر است. ولی اگر عدد n به یکی از رقم‌های ۲، ۳، ۷ یا ۸ ختم شده باشد، آن وقت عدد n^2 به یکی از دو رقم ۴ یا ۹ ختم می‌شود که، در نتیجه، n^2+1 بر ۵ بخش پذیر می‌شود. (c) داریم:

$$n^7 - n = n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$$

اگر n مضربی از ۷ باشد یا در تقسیم بر ۷ به یکی از باقی مانده‌های ۱ یا ۶ برسد، آن وقت یکی از سه عامل نخستین درست راست برابری بر ۷ بخش پذیر است اگر باقی مانده تقسیم n بر ۷ برابر ۲ باشد، باقی مانده تقسیم n^2 بر ۷ برابر ۴ و باقی مانده تقسیم n^2+n+1 بر ۷ برابر صفر می‌شود. اگر باقی مانده

تقسیم n بر ۷ برابر ۴ باشد، آن وقت بازهم عدد $n^2 + n + 1$ بر ۷ بخش پذیر است. به همین ترتیب، اگر باقی مانده تقسیم n بر ۷، برابر ۳ یا ۵ باشد، آن گاه عدد $n^2 - n + 1$ بر ۷ بخش پذیر می شود.

(d) داریم: $n^{11} - n = n(n-1)(n+1)(n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1)$

اگر n مضرب ۱۱ باشد و یا در تقسیم بر n به باقی مانده‌ای برابر ۱ یا ۱۰ برسد، یکی از سه عامل نخستین سمت راست برابری بر ۱۱ بخش پذیر می شود.

به سادگی می توان تحقیق کرد که اگر باقی مانده تقسیم n بر ۱۱ برابر ۲ یا ۹

(یعنی ± 2)، ۳ یا ۸ (یعنی ± 3)، ۴ یا ۷، (یعنی ± 4)، ۵ یا ۶ (یعنی

± 5) باشد، آن وقت $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$ بر ۱۱ بخش پذیر است؛ مثلاً

اگر باقی مانده تقسیم n بر ۱۱ را برابر ± 2 بگیریم، به ترتیب به دست می آید:

باقی مانده تقسیم n^2 بر ۱۱، برابر ۴؛

باقی مانده تقسیم n^4 بر ۱۱، برابر ۵؛

باقی مانده تقسیم n^6 بر ۱۱، برابر ۹؛

باقی مانده تقسیم n^8 بر ۱۱، برابر ۳.

و در نتیجه باقی مانده تقسیم $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$ بر ۱۱، برابر باقی مانده

تقسیم

$$3 + 9 + 5 + 4 + 1 = 22$$

بر ۱۱ می شود، یعنی بر ۱۱ بخش پذیر است.

(e) $n^{13} - n$ به این صورت قابل تجزیه است:

$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1)(n^4+n^2+1)$$

شبه حالت های قبل، در این جا، در حالت $n = 13k$ یا $n = 13k \pm 1$ ، یکی از

سه عامل نخستین بر ۱۳ بخش پذیر است. اگر $n = 13k \pm 5$ ، آن وقت $n^2 + 1$ ،

اگر $n = 13k \pm 2$ یا $n = 13k \pm 6$ ، آن وقت $n^4 - n^2 + 1$ و اگر

$n = 13k \pm 3$ یا $n = 13k \pm 4$ ، آن وقت $n^4 + n^2 + 1$ بر ۱۳ بخش پذیر

است.

(۴۷) $a^{2k} - b^{2k}$ همیشه بر $a + b$ بخش پذیر است، زیرا

$$a^{2k} - b^{2k} = (a^2)^k - (b^2)^k = (a^2 - b^2) \cdot A = (a + b)(a - b) \cdot A$$

(که A عبارتی است بر حسب a و b از درجه $(k-1)$). بنابراین

$$3^6n - 2^6n = 27^2n - 8^2n$$

بر $8+27$ ، یعنی ۳۵ بخش‌پذیر است.

(b) عبارت $n^5 - 5n^3 + 4n$ قابل تجزیه به عامل‌های خطی است:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

از بین چهار عدد درست متوالی، دست کم دو عدد زوج است که یکی بر ۲ و دیگری بر ۴ بخش‌پذیر است. از بین سه عدد درست متوالی، یکی بر ۳ بخش‌پذیر است و، سرانجام، از بین پنج عدد درست متوالی، یکی بر ۵ بخش‌پذیر است، بنابراین حاصل‌ضرب ۵ عدد درست متوالی بر $2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$ بخش‌پذیر می‌شود.

(c) داریم:

$$n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$$

برای این که عبارت مفروض بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، باید $(n+7)(n-4)$ مضربی از ۱۱ باشد. از آن جا که $(n+7) - (n-4) = 11$ ، بنابراین دو عامل $n+7$ و $n-4$ یا هردو بر ۱۱ بخش‌پذیرند و یا هردو بر ۱۱ بخش‌پذیر نیستند. در حالتی که هردو عدد $n+7$ و $n-4$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها، $(n+7)(n-4)$ ، بر ۱۲۱ بخش‌پذیر می‌شود و، در نتیجه، عدد $(n+7)(n-4) + 33$ نمی‌تواند بر ۱۲۱ بخش‌پذیر شود.

۰۴۸ (a) عدد ۵۶۷۸۶۷۳۰ را به ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$56786730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31 \times 61$$

باید ثابت کنیم، عدد مفروض، بر هر یک از این عامل‌ها، بخش‌پذیر است.

اگر هیچ کدام از دو عدد m و n زوج نباشند، تفاضل $m^6 - n^6$ عددی زوج می‌شود. بنابراین، عدد $mn(m^6 - n^6)$ در هر حال عددی است زوج (و بخش‌پذیر بر ۲).

از مسأله ۴۶ می‌توان نتیجه گرفت که، اگر k برابر با یکی از عددهای ۳، ۵، ۷، ۱۱ یا ۱۳ باشد و اگر n بر k بخش‌پذیر نباشد، آن وقت تفاضل

۱- n^{k-1} بر k بخش پذیر است. در حالت خاص، اگر هیچ کدام از دو عدد m و n بر ۳ بخش پذیر نباشند، آن وقت هریک از عددهای $m^{60} - 1 = (m^{30})^2 - 1$ و $n^{60} - 1 = (n^{30})^2 - 1$ و در نتیجه، تفاضل آن‌ها $m^{60} - n^{60}$ بر ۳ بخش پذیر خواهد شد. به این ترتیب، در هر حال، حاصل ضرب $mn(m^{60} - n^{60})$ بر ۳ بخش پذیر است. اکنون، اگر به این برابری‌ها توجه کنیم:

$$m^{60} - n^{60} = (m^{15})^4 - (n^{15})^4 = (m^{10})^6 - (n^{10})^6 = (m^6)^{10} - (n^6)^{10} = (m^6)^{10} - (n^6)^{10} = (m^5)^{12} - (n^5)^{12}$$

شبه استدلال بالا نتیجه می گیریم که، اگر هیچ کدام از دو عدد m و n بر ۵، ۷، ۱۱ یا ۱۳ بخش پذیر نباشند، آن وقت تفاضل $m^{60} - n^{60}$ بر این عددها بخش پذیر خواهد بود، یعنی در هر حال، عدد $mn(m^{60} - n^{60})$ بر هر یک از عددهای ۵، ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است.

با همین روش، می توان بخش پذیری $mn(m^{60} - n^{60})$ بر ۳۱ و ۶۱ را هم ثابت کرد (برای هر عدد درست n ، عدد $n^{31} - n$ مضربی از ۳۱ و عدد $n^{61} - n$ مضربی از ۶۱ است؛ مسأله ۳۴۰ و حل آن را ببینید).
(b) عبارت مفروض را می توان به صورت ضرب عبارت های خطی تجزیه کرد:

$$(m - 2n)(m - n)(m + n)(m + 2n)(m + 3n)$$

برای $n \neq 0$ ، همه این عامل ها با هم فرق دارند. اگر این حاصل ضرب بتواند برابر ۳۳ شود، به معنای آن است که باید بتوان ۳۳ را به ضرب ۵ عامل متفاوت تجزیه کرد، در حالی که عدد ۳۳ را به بیش از ضرب ۴ عامل نمی توان تجزیه کرد. [تجزیه عدد ۳۳ به ضرب ۴ عامل، به صورت های مختلف ممکن است، مثلاً $(-11) \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1)$ یا $(-3) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1)$ و غیره.]
برای $n = 0$ ، عبارت مفروض به صورت m^5 در می آید که، به ازای هیچ مقدار درست m ، برابر ۳۳، نمی شود. (۳۳، برابر توان پنجم هیچ عدد درستی نیست).

۰۴۹. چون $۱۹ \times ۱۷ = ۳۲۳$ ، بنابراین باید به دنبال شرطهایی باشیم

که، به ازای آن‌ها، عدد $۱ - ۳^n - ۱۶^n + ۲۰^n = N$ بر هر دو عدد ۱۷ و ۱۹ بخش پذیر باشد.

ابتدا n را عددی زوج می‌گیریم: $n = 2k$. روشن است که عدد $۳^n - ۱۶^n$ ، به ازای هر مقدار n ، بر $۱۷ = ۳ - ۲۰$ بخش پذیر است. در این حالت، عدد دیگر

$$۱۶^n - ۱ = ۱۶^{2k} - ۱$$

هم بر $۱ - ۱۶^۲$ یعنی بر $۱۷ = ۱ + ۱۶$ بخش پذیر است. به این ترتیب عدد N ، در این حالت، بر ۱۷ بخش پذیر است. از طرف دیگر، عدد $۲۰^n - ۱$ برای همه عددهای طبیعی n ، بر ۱۹ بخش پذیر است و عدد $۱۶^{2k} - ۳^{2k} = ۱۶^n - ۳^n$ هم بر عدد

$$۱۹ \times ۱۳ = (۱۶ - ۳)(۱۶ + ۳) = ۱۶^۲ - ۳^۲$$

بخش پذیر است. به این ترتیب، برای عددهای طبیعی و زوج n ، عدد N بر ۳۲۳ بخش پذیر است.

اکنون n را عددی فرد می‌گیریم: $n = 2k + ۱$. از طرف دیگر می‌دانیم، عدد $۱ - ۱۶^{2k}$ بر ۱۷ بخش پذیر است، بنابراین باقی مانده تقسیم ۱۶^{2k} بر ۱۷ برابر واحد است. پس در تقسیم $۱۶^{2k} \times ۱۶ = ۱۶^{2k+1}$ به ۱۷، باقی مانده‌ای برابر $۱۶ = ۱ \times ۱۶$ به دست می‌آید، یعنی عدد $۱ - ۱۶^{2k+1} = ۱۶^n - ۱$ بر ۱۷ بخش پذیر نیست (باقی مانده تقسیم آن بر ۱۷، برابر است با ۱۵)، به این ترتیب، عدد N ، برای عددهای فرد n بر ۱۷ و، در نتیجه، بر ۳۲۳ بخش پذیر نیست.

N ، تنها وقتی بر ۳۲۳ بخش پذیر است که n ، عددی زوج باشد.

۵۰. رقم یکان عدد n برابر است با یکی از عددهای

$$۹, ۸, ۷, ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰$$

بنابراین، رقم یکان $n^۲$ ، به ترتیب، یکی از این عددهاست:

$$۱, ۴, ۹, ۶, ۵, ۶, ۹, ۴, ۱, ۰$$

و رقم یکان عدد $n^2 + n$

$$0, 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, 8, 0$$

و رقم یکان عدد $n^2 + n + 1$

$$1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9, 1$$

بنابراین، عدد $n^2 + n + 1$ نمی‌تواند به ۰ یا ۵ ختم شود، یعنی نمی‌تواند مضربی از ۵ و، به‌طور طبیعی، مضربی از ۱۹۵۵ باشد.

۵۱. هر عدد درستی یا مضرب ۵ است و یا به یکی از صورت‌های $5k \pm 1$ یا $5k \pm 2$ است. اگر مضرب ۵ باشد، روشن است که توان صدم آن مضربی از $125 = 5^3$ خواهد بود. اکنون، با استفاده از دستوربسط دوجمله‌ای داریم:

$$(5k \pm 1)^{100} = (5k)^{100} \pm \dots + \frac{100 \times 99}{1 \times 2} (5k)^2 \pm 100 \times 5k + 1$$

در این جا، همه جمله‌ها، به‌جز جمله آخر مضربی از ۱۲۵ هستند و، بنابراین اگر عدد درستی به صورت $5k + 1$ یا $5k - 1$ باشد، باقی‌مانده توان صدم آن بر ۱۲۵ برابر واحد می‌شود. به همین ترتیب

$$(5k \pm 2)^{100} = (5k)^{100} \pm \dots + \frac{100 \times 99}{1 \times 2} (5k)^2 \pm 100 \times$$

$$\times 5k \cdot 2^{99} + 2^{100}$$

باز هم همه جمله‌ها، به‌جز جمله آخر، مضربی از ۱۲۵ هستند. برای عدد 2^{100}

$$2^{100} = 4^{50} = (5 - 1)^{50} = 5^{50} - \dots + \frac{50 \times 49}{1 \times 2} \times 5^2 - 50 \times 5 + 1$$

و روشن است که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۲۵ برابر با واحد است.

به این ترتیب، اگر عددی مضرب ۵ باشد، توان صدم آن بر ۱۲۵ بخش‌پذیر است و اگر مضرب ۵ نباشد، از تقسیم توان صدم آن بر ۱۲۵ به باقی‌مانده ۱ می‌رسیم.

۵۲. در واقع باید ثابت کنیم، اگر N و ۱۰ نسبت به هم اول باشند،

آن وقت عدد

$$N^{1^{\circ 1}} - N = N(N^{1^{\circ 0}} - 1)$$

مضربی از ۱۰۰۰ است. چون N نسبت به ۱۰ اول است، باید $N^{1^{\circ 0}} - 1$ مضربی از ۱۰۰۰ باشد. N عددی فرد است، بنابراین

$$N^{1^{\circ 0}} - 1 = (N^{5^{\circ}} + 1)(N^{25} + 1)(N^{25} - 1)$$

بر ۸ بخش پذیر است. علاوه بر آن، N مضربی از ۵ نیست، بنابراین، با توجه به مسأله قبل، عدد $N^{1^{\circ 0}} - 1$ بر ۱۲۵ بخش پذیر است. به این ترتیب $N^{1^{\circ 0}} - 1$ بر 8×125 یعنی ۱۰۰۰ بخش پذیر می شود.

$0.53N$ را عدد مجهول می گیریم. در این صورت باید $N^2 - N$ مضربی از ۱۰۰۰ باشد. چون $N^2 - N = (N - 1)N$ و، در ضمن، دو عدد N و $N - 1$ نسبت به هم اول اند، تنها وقتی $N^2 - N$ بر ۱۰۰۰ بخش پذیر است که از دو عدد N و $N - 1$ ، یکی بر ۸ و دیگری بر ۱۲۵ بخش پذیر باشد (N یا $N - 1$ نمی تواند مضربی از ۱۰۰۰ باشد، زیرا N عددی سه رقمی است).

اگر N مضربی از ۱۲۵ باشد، آن وقت $N - 1$ تنها وقتی می تواند مضرب ۸ باشد که داشته باشیم $N = 625$. همچنین، اگر $N - 1$ مضربی از ۱۲۵ باشد، آن وقت N تنها وقتی می تواند مضربی از ۸ باشد که داشته باشیم $N - 1 = 375$ ، یعنی $N = 376$.

اکنون عدد $N^{k-1} - 1$ را در نظر می گیریم. این عدد، برای هر عدد درست $k \geq 2$ ، بر $N - 1$ و، در نتیجه، عدد $N^k - N = N(N^{k-1} - 1)$ بر $N(N - 1)$ یعنی $N^2 - N$ بخش پذیر است. بنابراین، اگر $N^2 - N$ بر ۱۰۰۰ بخش پذیر باشد، آن وقت $N^k - N$ هم، به ازای هر عدد درست $k \geq 2$ بر ۱۰۰۰ بخش پذیر می شود، یعنی سه رقم سمت راست عدد N^k با عدد N برابر می شود. به این ترتیب، دو عدد ۶۲۵ و ۳۷۶ (و تنها همین دو عدد)، با شرطهای مسأله سازگارند.

۰۵۴ دو رقم سمت راست عدد $N^{2^{\circ}}$ را پیدامی کنیم. $N^{2^{\circ}}$ بر ۴ بخش پذیر است، زیرا N عددی زوج است، N بر ۵ بخش پذیر نیست (اگر N مضربی

از ۵ باشد، آن وقت بر ۱۰ بخش پذیر می‌شود)، بنابراین عدد N ، به یکی از صورت‌های $5k \pm 1$ یا $5k \pm 2$ است. باقی‌مانده تقسیم عدد

$$(5k \pm 1)^{20} = (5k)^{20} \pm 20(5k)^{19} + \dots + \frac{20 \times 19}{1 \times 2}(5k)^2 \pm \pm 20 \cdot 5k + 1$$

بر ۲۵ برابر واحد است؛ درحالی که باقی‌مانده تقسیم عدد

$$(5k \pm 2)^{20} = (5k)^{20} \pm 20(5k)^{19} \times 2 + \dots + \frac{20 \times 19}{1 \times 2}(5k)^2 \times 2^{18} \pm \pm 20 \cdot 5k \cdot 2^{19} + 2^{20}$$

بر ۲۵، برابر با باقی‌مانده عدد 2^{20} بر ۲۵ است. داریم:

$$2^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2 = (1025 - 1)^2$$

یعنی باز هم به باقی‌مانده‌ای برابر واحد می‌رسیم. به این ترتیب، در هر حال باقی‌مانده تقسیم عدد N^{20} بر ۲۵ برابر است با ۱. بنابراین، دو رقم آخر عدد N^{20} می‌تواند یکی از عددهای ۰۱، ۲۶، ۵۱، یا ۷۶ باشد. ولی می‌دانیم N^{20} بر ۴ بخش پذیر است، یعنی عدد N^{20} به دو رقم ۷۶ ختم می‌شود؛ یعنی رقم دهگان عدد N^{20} برابر است با ۷.

اکنون سه رقم سمت راست عدد N^{200} را پیدا می‌کنیم. N^{200} مضربی است از ۸ و، درضمن، چون N ۵ نسبت به هم اول‌اند، از تقسیم عدد N^{100} بر ۱۲۵ به باقی‌مانده واحد می‌رسیم. بنابراین، باقی‌مانده تقسیم N^{200} بر ۱۲۵ هم، برابر واحد است، زیرا

$$N^{200} = (N^{100})^2 = (125k + 1)^2 = 125^2 k^2 + 250k + 1$$

به این ترتیب، سه رقم سمت راست عدد N^{200} ، می‌تواند یکی از عددهای ۱۲۶، ۲۵۱، ۳۷۶، ۵۰۱، ۶۲۶، ۷۵۱ یا ۸۷۶ باشد، ولی N^{200} بر ۸ بخش پذیر است، بنابراین از بین این عددها، تنها ۳۷۶ قابل قبول است: رقم صدگان

عدد $N^{۲۰۰}$ برابر است با ۳.

یادداشت. به سادگی ثابت می شود که، نه تنها $N^{۲۰۰}$ ، بلکه $N^{۱۰۰}$ هم، به عدد سه رقمی ۳۷۶ ختم می شود.

۵۵. مجموع $۱ + ۲ + \dots + n$ برابر است با $\frac{1}{2}n(n+1)$. بنابراین

باید ثابت کنیم، اگر k عددی فرد باشد، آن وقت $S_k = ۱^k + ۲^k + \dots + n^k$ مضربی است از $\frac{1}{2}n(n+1)$.

باتوجه به این که $a^k + b^k$ ، به ازای عددهای فرد k ، بر $a+b$ بخش پذیر است، حالت های زیر را، به طور جداگانه، مورد بررسی قرار می دهیم.

$A \cdot n$ عددی زوج است. عدد S_k بر $n+1$ قابل بخش است، زیرا هر یک از مجموع های

$$۱^k + n^k, ۲^k + (n-۱)^k, ۳^k + (n-۲)^k, \dots, \left(\frac{n}{۲}\right)^k + \left(\frac{n}{۲}+۱\right)^k$$

بر عدد

$$۱+n=۲+(n-۱)=۳+(n-۲)=\dots=\frac{n}{۲}+\left(\frac{n}{۲}+۱\right)$$

بخش پذیر است. مجموع S_k بر $\frac{n}{۲}$ هم بخش پذیر است، زیرا هر یک از عبارت های

$$۱^k + (n-۱)^k, ۲^k + (n-۲)^k, ۳^k + (n-۳)^k, \dots, \left(\frac{n}{۲}-۱\right)^k + \left(\frac{n}{۲}+۱\right)^k, \left(\frac{n}{۲}\right)^k, n^k$$

بر $\frac{n}{۲}$ بخش پذیر است.

$B \cdot n$ عددی فرد است. در این حالت، S_k بر $\frac{n+1}{۲}$ بخش پذیر است،

زیرا هریک از عبارت‌های

$$1^k + n^k, 2^k + (n-1)^k, 3^k + (n-2)^k, \dots,$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+3}{2}\right)^k, \left(\frac{n+1}{2}\right)^k$$

بر $\frac{n+1}{2}$ بخش پذیر است. مجموع S_k بر n نیز بخش پذیر است، زیرا هریک

از عبارت‌های

$$1^k + (n-1)^k, 2^k + (n-2)^k, 3^k + (n-3)^k, \dots,$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+1}{2}\right)^k, n^k$$

بر n بخش پذیر است.

۵۶. فرض می‌کنیم:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

عدد M را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و آن را از عدد N کم می‌کنیم:

$$M = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \pm a_n$$

(رقم‌های عدد N را از راست به چپ، به ترتیب، با علامت‌های «+» و «-» در نظر گرفته ایم و، سپس، مجموع جبری آن‌ها را M نامیده ایم). تفاضل $N - M$ به این صورت در می‌آید:

$$N - M = a_1(10 + 1) + a_2(10^2 - 1) + a_3(10^3 + 1) + \dots + a_n(10^n \pm 1)$$

عدد $N - M$ بر ۱۱ بخش پذیر است، زیرا هریک از پرانتزهای سمت راست برابری، بر ۱۱ بخش پذیر است؛ در واقع، $10^k = (11 - 1)^k$ ، یعنی

اگر k عددی فرد باشد، باقی مانده تقسیم 10^k بر ۱۱ برابر ۱- و باقی مانده تقسیم $10^k + 1$ بر ۱۱ برابر صفر است؛ و اگر k عددی زوج باشد، باقی مانده تقسیم 10^k بر ۱۱ برابر ۱، و باقی مانده تقسیم $10^k - 1$ بر ۱۱ برابر صفر است. به این ترتیب، وقتی عدد N بر ۱۱ بخش پذیر است که عدد

$$M = (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)$$

مضربی از ۱۱ باشد.

۵۷. باقی مانده تقسیم ۱۵ بر ۷ برابر است با ۱. داریم:

$$15^2 = (7 \times 2 + 1)(7 \times 2 + 1) = 7n_1 + 1$$

یعنی در تقسیم 15^2 بر ۷ هم به باقی مانده واحد می رسیم. به همین ترتیب

$$15^3 = 15^2 \cdot 15 = (7n_1 + 1)(7 \times 2 + 1) = 7n_2 + 1$$

باقی مانده تقسیم 15^3 بر ۷ هم برابر واحد است، به همین ترتیب روشن می شود که باقی مانده تقسیم هر توانی از ۱۵ بر ۷، برابر است با ۱.

اکنون، اگر مجموع $1 + 2 + 3 + \dots + 14 = 105$ را از مجموع مفروض نمایش عدد کم کنیم، می توانیم نتیجه را به این صورت بنویسیم

$$13(15 - 1) + 12(15^2 - 1) + 11(15^3 - 1) + \dots + 2(15^{12} - 1) + 1(15^{13} - 1)$$

که بر ۷ بخش پذیر است. چون تفاضل دو عدد، یعنی ۱۰۵، مضربی است از ۷، بنابراین عدد مفروض بر ۷ بخش پذیر است.

۵۸. k را عددی n رقمی می گیریم. از بین عددهای $(n+2)$ رقمی

که با دو رقم ۱۰ آغاز می شوند، یعنی عددهای به صورت $10a_1a_2\dots a_n$ ،

دست کم یک عدد بخش پذیر بر k وجود دارد. فرض کنید $10b_1b_2\dots b_n$ بر k

بخش پذیر باشد، بنابراین با توجه به فرض مسأله باید عددهای $10b_1b_2\dots b_n$

و $10b_1b_2\dots b_n$ هم و، در نتیجه، تفاضل آن ها بر k بخش پذیر باشد. تفاضل

این دو عدد برابر است با ۹ که تنها بر ۱، ۳ و ۹ بخش پذیر است. حکم مسأله

ثابت شد.

۵۹. روشن است که

$$d = \underbrace{333 \dots 33}_{\text{رقم } 100} = 3 \times \underbrace{111 \dots 11}_{\text{رقم } 100} = 3n$$

بنابراین، باید k را طوری پیدا کنیم که عدد $N = \underbrace{111 \dots 11}_k$ بر n و بر ۳

بخش پذیر باشد (n مضرب ۳ نیست، زیرا مجموع رقم‌های آن برابر ۱۰۰ است که بر ۳ بخش پذیر نیست).

اگر k عددی به صورت $k = 100q + r$ ($0 \leq r < 100$) باشد، آن وقت روشن است که

$$N = \underbrace{111 \dots 11}_{\text{رقم } 100} \underbrace{00 \dots 00}_q + \underbrace{111 \dots 11}_r = M + R$$

که در آن

$$M = \underbrace{111 \dots 11}_{\text{رقم } 100} \underbrace{00 \dots 00}_q \quad R = \underbrace{111 \dots 11}_r$$

N وقتی بر n بخش پذیر است که R بر n بخش پذیر باشد (بخش پذیری M بر n روشن است)؛ ولی تعداد رقم‌های R کمتر از ۱۰۰ است و بنابراین باید داشته باشیم: $R = 0$ ، یعنی $r = 0$. به این ترتیب، k باید مضربی از ۱۰۰ باشد.

ولی $k = 100q$ باید در ضمن مضربی از ۳ باشد، و این، تنها وقتی ممکن است که q مضربی از ۳ باشد. بنابراین، کوچکترین عددی که برای N به دست می‌آید تا با شرط مسأله سازگار باشد، چنین است:

$$N = \underbrace{111 \dots 11}_{\text{رقم } 300}$$

۶۰. روشن است که a عددی است زوج، بنابراین کافی است ثابت کنیم،

حاصل ضرب $a.A$ مضربی است از ۳. رقم‌های یکان در دو عدد $2N = 2^{k+1}$ و $2a$ ، یکی است. بنابراین، با توجه به توان‌های متوالی ۲

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, \dots$$

نتیجه می‌گیریم که، رقم یکان در توان‌های متوالی ۲، به تناوب تکرار می‌شوند:

$$2, 4, 8, 6; 2, 4, 8, 6; 2, 4, 8, 6; \dots$$

از طرف دیگر، چون $N = 2^k$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، تنها می‌تواند به صورت $N = 3l + 1$ یا $N = 3l + 2$ باشد. اگر در تقسیم $N = 2^k$ بر ۳ به باقی‌مانده واحد برسیم، آن وقت در تقسیم $2N = 2^{k+1}$ بر ۳ به باقی‌مانده ۲ می‌رسیم؛ و اگر $N = 3k + 2$ باشد، آن وقت $2N = 2^{k+1}$ بر ۳ به باقی‌مانده ۱ می‌رسد. به این ترتیب، اگر توان‌های متوالی ۲ را بر ۳ تقسیم کنیم، برای باقی‌مانده‌های تقسیم، به دنباله متناوب زیر می‌رسیم:

$$2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$$

به این ترتیب، اگر رقم سمت راست عدد N برابر ۲ یا ۸ باشد ($a = 2$) یا $a = 8$)، آن وقت در تقسیم عدد N بر ۳ به باقی‌مانده ۲ می‌رسیم، و اگر $a = 4$ آن وقت باقی‌مانده تقسیم N بر ۳ برابر ۱ خواهد بود (حالت $a = 6$ برای بحث ما جالب نیست، زیرا در این حالت $a.A$ برابر $6A$ می‌شود و، در نتیجه، بر ۶ بخش‌پذیر است). بنابراین در هر سه حالت، عدد $N - a = 10A$ بر ۳ بخش‌پذیر است و، در نتیجه، A بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. به این ترتیب، برای همه مقادیر $k \geq 1$ ، حاصل ضرب $a.A$ مضربی از ۶ می‌شود (به ازای $k = 1, 2, 3$ ، عدد N یک رقمی است، یعنی $A = 0$ و، بنابراین $a.A = 0$ بر هر عددی بخش‌پذیر است).

۶۱. داریم: $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 26460$. بنابراین باید عدد

$$N = 27195^8 - 10887^8 + 10152^8$$

بر هر يك از عامل‌های ۲، ۳، ۵ و ۷ بخش پذیر باشد.

$$۰۱. \text{ داریم: } N = (۱۰۸۸۷^۸ - ۱۰۱۵۲^۸) = ۲۷۱۹۵ \text{ عدد}$$

بر ۵×۷^۲ بخش پذیر است ($۲۷۱۹۵ = ۳ \times ۵ \times ۷^۲ \times ۳۷$). از طرف دیگر مقدار داخل پرانتز بر تفاضل

$$۱۰۸۸۷ - ۱۰۱۵۲ = ۷۳۵ = ۳ \times ۵ \times ۷^۲$$

بخش پذیر است. بنابراین، عدد N ، بر ۵×۷^۲ بخش پذیر می‌شود.

$$۰۲. \text{ داریم: } N = (۲۷۱۹۵^۸ - ۱۰۸۸۷^۸) + ۱۰۱۵۲^۸ \text{ عدد}$$

بر $۲^۲ \times ۳^۳$ بخش پذیر است ($۱۰۱۵۲ = ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۴۷$)؛ همچنین تفاضل

$$۲۷۱۹۵ - ۱۰۸۸۷ = ۱۶۳۰۸ = ۲^۲ \times ۳^۳ \times ۱۵۱$$

نیز بر $۲^۲ \times ۳^۳$ بخش پذیر است. بنابراین، عدد N بر $۲^۲ \times ۳^۳$ بخش پذیر می‌شود.

۵×۷^۲ نسبت به عدد $۲^۲ \times ۳^۳$ اول است و، بنابراین، عدد N که بر هر دوی آن‌ها بخش پذیر است، بر حاصل ضربشان بخش پذیر می‌شود.
۰۳. داریم:

$$۱۱^{۱۰} - ۱ = (۱۱ - ۱)(۱۱^۹ + ۱۱^۸ + ۱۱^۷ + \dots + ۱۱ + ۱)$$

مقدار داخل پرانتز دوم در سمت راست برابری، مضربی است از ۱۰ (زیرا شامل ۱۰ جمله است که هر کدام از آن‌ها به واحد ختم شده‌اند)؛ بنابراین $۱۱^{۱۰} - ۱$ به صورت حاصل ضرب عدد ۱۰ در عدد دیگری که مضرب ۱۰ است درمی‌آید، یعنی بر ۱۰۰ بخش پذیر است.
۰۴. داریم:

$$۲۲۲۲۵۵۵۵ + ۵۵۵۵۲۲۲۲ = (۲۲۲۲۵۵۵۵ + ۴۵۵۵۵) + \\ + (۵۵۵۵۲۲۲۲ - ۴۲۲۲۲) - (۴۵۵۵۵ - ۴۲۲۲۲)$$

در سمت راست برابری، پرانتز اول بر $۲۲۲۲ + ۴$ ، یعنی ۲۲۲۶ بخش پذیر است. چون $۲۲۲۶ = ۷ \times ۳۱۸$ ، بنابراین پرانتز اول بر ۷ بخش پذیر است. پرانتز دوم بر $۵۵۵۵ - ۴$ ، یعنی بر $۵۵۵۱ = ۷ \times ۷۹۳$ ، و، بنابراین، بر ۷

بخش پذیر است. پرائتز سوم را به این صورت می نویسیم:

$$۴۵۵۵۵ - ۴۲۲۲۲ = ۴۲۲۲۲(۴۳۳۳ - ۱) = ۴۲۲۲۲(۶۴۱۱۱ - ۱)$$

که بر $۱ - ۶۴$ ، یعنی $۹ \times ۷ = ۶۳$ و بنابراین بر ۷ بخش پذیر است.

۶۴. از روش استقرای ریاضی استفاده می کنیم.

عدد $\overline{aaa}$ بر ۳ بخش پذیر است، زیرا مجموع رقم های آن، $3a$ ، بر ۳ بخش پذیر است. اکنون فرض می کنیم، حکم مسأله، برای هر عددی که دارای 3^n رقم مشابه باشد، درست باشد و ثابت می کنیم، در این صورت، برای عدد شامل 3^{n+1} رقم مشابه هم درست است. عدد 3^{n+1} رقمی را که دارای رقم های مساوی a باشد، می توان این طور نوشت:

$$\underbrace{aa \dots a}_{\text{رقم } 3^n} \underbrace{aa \dots a}_{\text{رقم } 3^n} \underbrace{aa \dots a}_{\text{رقم } 3^n} = \underbrace{aa \dots a}_{\text{رقم } 3^n} \times \underbrace{100 \dots 0}_{\text{رقم } 3^n} \underbrace{100 \dots 01}_{\text{رقم } 3^n}$$

بنابر فرض استقرا، عامل سمت راست برابری، بر 3^n بخش پذیر است؛ عامل دوم هم (که مجموع رقم های آن برابر ۳ شده است) بر ۳ بخش پذیر است و، بنابراین، حاصل ضرب آن ها بر 3^{n+1} بخش پذیر می شود.

۶۵. ابتدا توجه می کنیم که عدد $۹۹۹۹۹۹۹ = ۱۰^۹ - ۱$ ، بر ۷ بخش پذیر است (درواقع داریم: $۹۹۹۹۹۹۹ = ۷ \times ۱۴۲۸۵۷$). از این جا نتیجه می شود که باقی مانده تقسیم ۱۰^N بر ۷ برابر است با باقی مانده تقسیم ۱۰^r بر ۷ که، در آن، عبارت است از باقی مانده تقسیم N بر ۶. در واقع، اگر $N = ۶k + r$ ، آن وقت عدد

$$۱۰^N - ۱۰^r = ۱۰^{۶k+r} - ۱۰^r = ۱۰^r(۱۰^{۶k} - ۱) =$$

$$= ۱۰^r(۱۰^۶ - ۱)(۱۰^{۶k-۶} + ۱۰^{۶k-۱۲} + \dots + ۱۰^۶ + ۱)$$

بر ۷ بخش پذیر است. از طرف دیگر، باقی مانده تقسیم هر توانی از ۱۰ بر ۶ برابر ۴ است، زیرا عدد $۹۹ \dots ۹۶ = ۱۰^n - ۴$ هم بر ۲ بخش پذیر است و $\underbrace{۹۹ \dots ۹۶}_{\text{رقم } 2n - 1}$

هم بر ۳. به این ترتیب، باقی مانده تقسیم هر عددی به صورت (۱۰^k) بر ۶

برابراست با باقی‌مانده تقسیم $۱۰^۴$ بر ۶ (یعنی برابر ۴). به این ترتیب از تقسیم هر توانی از ۱۰ بر ۷، به همان باقی‌مانده‌ای می‌رسیم که از تقسیم $۱۰^۴$ بر ۷ به دست می‌آید و داریم:

$$\underbrace{۱۰^۴ + ۱۰^۴ + \dots + ۱۰^۴}_{۱۰ \text{ جمله}} = ۱۰^۵ = ۱۰۰۰۰۰ = ۷ \times ۱۴۲۸۵ + ۵$$

یعنی باقی‌مانده‌ای که به دنبال آن بودیم، برابر ۵ است.
۶۶. a) هر توان زوجی از ۹ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$۹^{2n} = ۸۱^n = \underbrace{۸۱ \times ۸۱ \times ۸۱ \times \dots \times ۸۱}_{n \text{ بار}}$$

بنابراین، حاصل هر توان زوجی از ۹، عددی است که به ۱ ختم می‌شود. هر توان فردی از ۹، مثل ۹^{2n+1} را می‌توان به صورت ۹×۸۱^n نوشت و، بنابراین، حاصل آن، عددی است که به ۹ ختم می‌شود. $۹^۹$ عددی فرد است و، بنابراین، در $۹^۹$ ، عدد ۹ به توانی فرد رسیده است، یعنی رقم یکان آن برابر است با ۹.

به عدد $۲(۳^۴)$ می‌پردازیم. عددی را در نظر می‌گیریم که به ۶ ختم شده باشد چنین عددی به هر توانی برسد، عدد حاصل توان، باز هم به ۶ ختم می‌شود. بنابراین رقم یکان عدد ۱۶^n برابر است با ۶. همچنین اگر توان، عدد ۲، مضربی از ۴ باشد، باز هم حاصل توان به ۶ ختم می‌شود، زیرا $۱۶^n = ۲^{4n}$. به این نکته هم اشاره کنیم که $۳^۴ - ۱$ بر $۳ + ۱$ یعنی ۴ بخش پذیر است، یعنی عدد $۲(۳^۴ - ۱)$ ، اگر در دستگاه دهدهی نوشته شود، رقم یکانی برابر ۵ خواهد داشت. اکنون دیگر روشن است که عدد

$$۲(۳^۴) = ۲ \times ۲(۳^۴ - ۱)$$

به رقم ۲ ختم می‌شود (زیرا حاصل ضرب دو عددی است که یکی به ۲ و دیگری به ۶ ختم شده است).

b) در واقع باید باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد $۲^{۹۹۹}$ بر ۱۰۰ را

پیدا کنیم.

ابتدا روشن می‌کنیم که، باقی‌مانده تقسیم 2^{1000} بر ۲۵ برابر است با ۱. درواقع، داریم: $1025 = 1 + 2^{10}$ که بر ۲۵ قابل بخش است؛ از این جا $(2^{10} - 1)(2^{10} + 1) = 2^{20} - 1$ بر ۲۵ بخش پذیر می‌شود. در ضمن $1 - (2^{20})^{50} = 2^{1000}$ بر $2^{20} - 1$ بخش پذیر است. به این ترتیب، دو رقم سمت راست عدد 2^{1000} می‌تواند برابر ۰۱، ۲۶، ۵۱ یا ۷۶ باشد. چون بخش پذیری 2^{1000} بر ۴ واضح است، باید از بین این امکان‌ها، آن‌را در نظر بگیریم که بر ۴ بخش پذیر باشد، یعنی ۷۶.

عدد ۲۹۹۹ برابر است با خارج قسمت تقسیم 2^{1000} بر ۲ و، بنابراین دو رقم سمت راست آن می‌تواند برابر ۳۸ یا ۸۸ شود (زیرا $\frac{76}{2} = 38$ و $\frac{176}{2} = 88$) ولی 2^{999} بر ۴ بخش پذیر است، یعنی دو رقم سمت راست آن، برابر است با ۸۸.

اکنون باقی‌مانده تقسیم عدد 3^{999} را بر ۱۰۰ پیدا می‌کنیم. در حل مسئله ۶۶-a دیدیم که هر توان زوجی از ۹ به رقم ۱ و هر توان فردی از ۹ به رقم ۹ ختم می‌شود. با استفاده از این نکته، می‌توانیم باقی‌مانده تقسیم $1 + 95$ را بر ۱۰۰ پیدا کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} 95 + 1 &= (9 + 1)(9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1) = \\ &= 10(9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1) \end{aligned}$$

هریک از عددهای ۹۴، ۹۲، ۹ و ۱ به ۱ و هر کدام از عددهای ۹۳ و ۹ به ۹ ختم می‌شوند، بنابراین مجموع $1 + 9^2 + 9^4$ به ۳ و مجموع $9 + 9^3$ به ۸ و، سرانجام، عدد $1 + 9 - 9^2 + 9^3 - 9^4$ به ۵ ختم می‌شود. بنابراین، باقی‌مانده تقسیم عدد $1 + 95$ بر ۱۰۰ برابر است با ۵۰. و این، به معنای آن است که عدد $(95 - 1)(95 + 1) = 91^2 - 1$ بر ۱۰۰ بخش پذیر است. از طرف دیگر چون $1 - (9^{10})^{50} = 9^{500} - 1 = 3^{1000} - 1$ بر $9^{10} - 1$ بخش پذیر است، بنابراین $3^{1000} - 1$ بر ۱۰۰ بخش پذیر می‌شود؛ یعنی عدد 3^{1000} به دو رقم

۵۱ ختم می‌شود. به‌جزاین، $۳^{۱۰۰۰}$ بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین، اگر ۵۱ را از سمت راست عدد $۳^{۱۰۰۰}$ حذف کنیم، به عددی می‌رسیم. (همان تعداد صدهای درست عدد $۳^{۱۰۰۰}$) که در تقسیم بر ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ پیدا می‌کند. می‌بینیم که دو رقم سمت راست عدد $۳: ۳^{۱۰۰۰} = ۳۹۹۹$ باید برابر دورقم سمت راست عدد حاصل از تقسیم ۲۰۱ بر ۳، یعنی ۶۷ باشد.

(c) باید باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد $(۱۴^{۱۴})(۲ \times ۷)$ بر ۱۰۵ را پیدا کنیم. برای این منظور، باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم دو عدد $(۱۴^{۱۴})$ و $۲(۱۴^{۱۴})$ را به‌طور جداگانه محاسبه می‌کنیم.

عدد $۲۴۰۵ = ۷^۴ - ۱$ بر ۱۰۵ قابل بخش است. در نتیجه، اگر n مضربی از ۴ باشد، آن وقت عدد $۷^n - ۱$ بخش‌پذیر است و به ۵۵ ختم می‌شود (زیرا عدد $۷^{۴k} - ۱$ یا $(۷^۴)^k - ۱$ بر $۷^۴ - ۱$ بخش‌پذیر است). علاوه بر این، $۲۱۴ \cdot ۷^{۱۴} = ۱۴^{۱۴}$ مضربی است از ۴؛ در نتیجه عدد، $۱ - (۱۴^{۱۴})$ بر ۱۰۵ بخش‌پذیر است، یعنی عدد $(۱۴^{۱۴})$ به ۵۱ ختم می‌شود.

ضمن حل مسأله ۶۵-b دیدیم که عدد $۱ - ۲^{۲۰}$ بر ۲۵ بخش‌پذیر است، در نتیجه، اگر n مضربی از ۲۰ باشد، آن وقت $۲^n - ۱$ مضربی از ۲۵ می‌شود. بینیم، باقی‌مانده تقسیم عدد $۱۴^{۱۴}$ بر ۲۵ چقدر است؟ داریم $۲۱۴ \cdot ۷^{۱۴} = ۱۴^{۱۴}$ ؛ $۲^{۱۲} \cdot ۷^{۱۴} = ۲^{۱۴}$. چون عدد $۱ - (۲^۴)^۳ = ۱ - ۲^{۱۲}$ بر ۱۵، $۱ - ۲^{۱۲}$ بخش‌پذیر است بنابراین عدد $۲(۲^{۱۲} - ۱)$ مضربی است از ۲۰، یعنی اگر $۲^{۱۲} \cdot ۷^{۱۴} = ۲^{۱۴}$ را بر ۲۰ تقسیم کنیم، به باقی‌مانده‌ای برابر ۴ می‌رسیم. از طرف دیگر، $۷^{۱۴} = ۴۹ \times ۷^{۱۲}$ ؛ چون باقی‌مانده تقسیم $۷^{۱۲}$ بر ۲۰ برابر واحد است (زیرا ۱۲ مضربی است از ۴ و، بنابراین، $۱ - ۷^{۱۲}$ بر ۱۰۵ بخش‌پذیر است)، باقی‌مانده تقسیم عدد $۷^{۱۲} \times ۴۹$ بر ۲۰ برابر است با باقی‌مانده تقسیم ۴۹ بر ۲۰، یعنی ۹. به این ترتیب، باقی‌مانده تقسیم عدد $۲۱۴ \cdot ۷^{۱۴} = ۱۴^{۱۴}$ بر ۲۰، برابر با باقی‌مانده تقسیم $۳۶ = ۹ \times ۴$ بر ۲۰، یعنی ۱۶، یعنی $۱۶ + ۲۰k = ۱۴^{۱۴}$. از این جا نتیجه می‌شود که باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد

$$2(14^{14}) = 216.2204 \text{ و } 216 = 65536$$

بر ۲۵، با هم برابرند؛ و این به معنای آن است که دو رقم سمت راست عدد $2(14^{14})$ می تواند یکی از عددهای ۱۱، ۳۶، ۶۱ یا ۸۶ باشد، ولی عدد $2(14^{14})$ مضربی است از ۴ و، بنابراین، دو رقم سمت راست آن برابر ۳۶ است.

عدد $7(14^{14})$ به ۵۱ و عدد $2(14^{14})$ به ۳۶ ختم می شود و، بنابراین حاصل ضرب آنها، یعنی $14(14^{14})$ هم به دو رقم ۳۶ ختم خواهد شد.

۰۶۷ a روشن است که هر دو عدد 99^9 و 99^{99} به رقم ۹ ختم می شوند (حل مسئله ۶۶-a را ببینید). از طرف دیگر، با توجه به دستور بسط دوجمله ای داریم:

$$A = 99^9 = (10 - 1)^9 = 10^9 - C_9^1 10^{9-1} + C_9^2 10^{9-2} - \dots + C_9^9 10 - 1;$$

$$B = 99^{99} = (10 - 1)^{99} = 10^{99} - C_{99}^1 10^{99-1} + C_{99}^2 10^{99-2} - \dots + C_{99}^{99} 10 - 1$$

که در آنها $a = 99$ و $b = 99^9$. بنابراین دو رقم سمت راست عددهای مورد نظر، به ترتیب بر دو رقم سمت راست عددهای زیر منطبق اند:

$$C_a^1 \cdot 10 - 1 = 10a - 1, \quad C_b^1 \cdot 10 - 1 = 10b - 1$$

در ضمن، هر دو عدد $a = 99$ و $b = 99^9$ به ۹ ختم می شوند، بنابراین دو رقم سمت راست، در عددهای $10a$ و $10b$ برابر ۹۰ و دو رقم سمت راست در عددهای A و B برابر ۸۹ می شود.

(b) شبیه راه حل مسئله ۶۷-a، می توانیم شش رقم سمت راست دو عدد مورد نظر را پیدا کنیم (با این تفاوت که در آن جامبنای کار را بر $10 - 1 = 9$ قرار دادیم، ولی در این جا، باید کار را بر مبنای $10 - 1 = 9$ قرار دهیم) و نتیجه بگیریم که شش رقم سمت راست در دو عدد ما، بر هم منطبق اند. این

روش راه‌حل، اگر چه دشوار نیست، با محاسبه‌هایی طولانی سروکار دارد، چرا که در این جا، به جای دورقم، باید شش رقم سمت راست را در دو عدد پیدا کنیم. به همین مناسبت، در این جا، از روش دیگری برای حل استفاده می‌کنیم.

باید ثابت کنیم، شش رقم سمت راست عددهای $A = 7^a$ و $B = 7^b$ برهم

منطبق اند که در آن جا، $a = 7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ و $b = 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$. به این ترتیب، باید ثابت کنیم تفاضل

$$A - B = 7^a - 7^b = 7^b(7^{a-b} - 1)$$

بر عدد $26.56 = 10000000$ بخش پذیر است و این، به معنای آن است که باید ثابت کنیم، عدد

$$D = 7^d - 1, (d = a - b)$$

بر 26.56 بخش پذیر است (زیرا، هر توانی از ۷، بر ۲ یا ۵ بخش پذیر نیست). به این ترتیب، مسأله به این جا منجر می‌شود که بینیم عدد $D = 7^d - 1$ (برای عددهای طبیعی d) بر چه توان‌هایی از ۲ و ۵ بخش پذیر است! بخش پذیری عدد D را بر 2^a ($a \geq 6$) و 5^b ، به طور جداگانه، مورد بررسی قرار می‌دهیم. $10^9 = 7^c - 1$ می‌گیریم که، در آن، $c = 2^p \cdot q$ ، عددی فرد است). در این حالت، باید ثابت کنیم $C = 2^a \cdot p$ که، در آن، P عددی است فرد و نمای α_p (که تنها به p بستگی دارد و وابسته به q نیست)، در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$\alpha_p = \alpha_{p-1} + 1, (p > 1) \quad (*)$$

چون عدد $48 = 7^2 - 1 = 7(2^1) - 1 = 16 = 2^4$ بخش پذیر و بر 2^5 بخش ناپذیر است، بنابراین $\alpha_1 = 4$ و با توجه به $(*)$ به سادگی نتیجه می‌شود:

$$\alpha_p = p + 3, (p \geq 1)$$

به این ترتیب، اگر بزرگترین نمای توانی از عدد ۲، که عدد c بر آن

بخش پذیر است برابر $1 \leq p$ باشد؛ آن وقت بزرگترین نمای α_p برای توانی از ۲، که عدد $1 - 7^p = C$ بر آن بخش پذیر باشد، برابر $3 + p$ است (به ازای $p = 0$ داریم $\alpha_0 = 1$ ، زیرا عدد $1 - 7^0$ ، یعنی ۶، بر ۲ بخش پذیر است و بر توان بزرگتری از ۲ بخش پذیر نیست).

ابتدا ثابت می کنیم که، عدد α_p ، به q بستگی ندارد. این مطلب از رابطه زیر نتیجه می شود:

$$7^{(2^{p \cdot q})} - 1 = (7^{2^p})^q - 1 =$$

$$= [7^{2^p} - 1][7^{(2^p)^{q-1}} + [7^{(2^p)}]^{q-2} + [7^{(2^p)}]^{q-3} + \dots + 1]$$

در داخل آکولاد، تعداد جمله ها برابر q ، یعنی عددی فرد است، در ضمن، هر جمله هم عددی فرد است؛ بنابراین مجموع آن ها هم، عددی فرد می شود؛

بنابراین، عدد $7^{2^p q} - 1$ بر همان توانی از ۲ بخش پذیر است که عدد $7^{2^p} - 1$ بر آن بخش پذیر باشد. به این ترتیب، از این جا به بعد می توانیم فرض کنیم

$q = 1$ ، یعنی می توانیم به جای عدد $1 - 7^{2^p q} = C$ ، عدد $1 - 7^{2^p} = C_p$ را در نظر بگیریم.

اکنون، تنها این می ماند که از دستور زیر استفاده کنیم:

$$C_p = 7^{2^p} - 1 = (7^{2^{p-1}})^2 - 1 =$$

$$= [7^{2^{p-1}} - 1][7^{2^{p-1}} + 1] = C_{p-1} \cdot C'$$

باقی مانده تقسیم ۷ بر ۴ برابر ۱ - و، بنابراین، از تقسیم 7^m بر ۴، در حالت فرد بودن m ، به باقی مانده ۱ - و، در حالت زوج بودن m ، به باقی مانده

$1 +$ می رسیم. در نتیجه، از تقسیم عدد $7^{2^n} + 1$ (و یا حتی $7^{2^n} - 1$) بر ۴، باقی مانده ای برابر ۲ به دست می آید (به ازای هر عدد طبیعی n)، یعنی

$7^{2^n} + 1$ و $7^{2^n} - 1$ بر ۲ بخش پذیر و بر 2^2 بخش ناپذیرند. به این ترتیب، در

برابری $C_p = C_{p-1} \cdot C'$ ، عدد C_{p-1} بر 2^{p-1} و عدد C' بر ۲ (و نه توان

بیشتری از ۲) بخش‌پذیرند، یعنی C_p بر 2^p بخش‌پذیر می‌شود که به معنای درستی رابطه (*) است روشن است که، به ازای $p=1$ ، با حالتی خاص روبه‌رو می‌شویم، زیرا در این حالت، $C' = 2^2 + 1 = 8$ نه تنها بر ۲، بلکه بر 2^3 بخش‌پذیر است (این، تنها موردی است که، در آن، عدد ۷ به توان عددی فرد رسیده است: $2^0 = 1$).

بنابراین، برای این که بتوانیم α را در دستور Q ، $D = 2^d - 1 = 2^\alpha$ محاسبه کنیم، باید ببینیم که عدد

$$d = a - b = 2^a - 2^b = 2^b (2^{d_1} - 1)$$

برچه توانی از ۲ بخش‌پذیر است که، در آن،

$$d_1 = a_1 - b_1 \text{ و } b_1 = 2^y \text{ و } a_1 = 2^{y^y}$$

و می‌دانیم که، برای این منظور، لازم و کافی است توانی از ۲ را پیدا کنیم، به نحوی که نمای

$$d_1 = a_1 - b_1 = 2^{a_1} - 2^{b_1} = 2^{b_1} (2^{d_2} - 1)$$

بر آن بخش‌پذیر باشد؛ در این جا $a_2 = 2^{y^y}$ ، $b_2 = y$ و

$$d_2 = a_2 - b_2 = 2^{a_2} - 2^{b_2} = 2^{b_2} (2^{d_3} - 1)$$

(که در آن $a_3 = 2^{y^y}$ ، $b_3 = 1$ و $d_3 = 2^y - 1$). عددی فرد است و، بنابراین، $d_3 = 2^y - 1$ ، تنها بر $2^1 = 2$ بخش‌پذیر است. نتیجه می‌گیریم که عدد $2^{d_2} - 1$ بر $2^4 = 2^{a_1}$ و، سپس، $d_2 = 2^{b_1} (2^{d_3} - 1)$ بر 2^4 بخش‌پذیر است و این، به معنای آن است که عدد $2^{d_2} - 1$ بر $2^{a_2} = 2^{y^y}$ بخش‌پذیر است. از این جا نتیجه می‌شود که عدد $d_1 = 2^{b_1} (2^{d_2} - 1)$ بر 2^y و، بنابراین، عدد $2^{d_1} - 1$ بر $2^{y^y} = 2^{a_1}$ بخش‌پذیر است؛ یعنی $d = 2^{b_1} (2^{d_1} - 1)$ هم بر 2^{1^0} بخش‌پذیر می‌شود و این به معنای آن است که عدد $D = 2^d - 1$ بر $2^{1^0} = 2^{1^3}$ بخش‌پذیر است.

۰۲. برای بخش‌پذیری عدد $C = 2^c - 1$ (که در این جا فرض می‌کنیم

$c = 5^r$) بتوان‌های عدد ۵، می‌توان شبیه بالا عمل کرد. با وجود این تصریح می‌کنیم که، در این حالت، عدد s (که بر ۵ بخش‌پذیر نیست) بر 2^2 یا توان بالاتری از ۲) بخش‌پذیر است، زیرا اگر s عددی فرد باشد و یا عددی زوج که بر ۴ بخش‌پذیر نیست، آن وقت به نتیجه‌های دیگری می‌رسیم. وقتی که داشته باشیم $s = 4s_1$ ، یعنی $c = 5^{4s_1}$ ، اگر بزرگترین نمای ۵ را β_r فرض کنیم، به نحوی که C بر 5^{β_r} بخش‌پذیر باشد؛ آن وقت β_r تنها به نمای r در دستور c بستگی دارد، یعنی β_r مستقل از s_1 است و، مثل قبل، رابطه بازگشتی زیر برقرار است:

$$\beta_r = \beta_{r-1} + 1 \quad (**)$$

که کاملاً با (*) شبیه است. چون $(\gamma^2 - 1)(\gamma^2 + 1) = \gamma^4 - 1$ بر عدد $5^2 = 25$ بخش‌پذیر است، بنابراین $\beta_0 = 2$ و از رابطه (**) نتیجه می‌شود که، برای هر $r \geq 0$ داریم:

$$\beta_r = r + 2$$

در نتیجه، اگر c در عبارت $C = \gamma^c - 1$ مضربی از ۴ باشد و اگر بزرگترین نمای ۵ که، به ازای آن، عدد c بر آن بخش‌پذیر شود برابر r باشد، آن وقت بزرگترین نمای ۵ از β_r ، به نحوی که C بر آن بخش‌پذیر باشد، برابر $r + 2$ می‌شود.

برای اثبات مستقل بودن β_r از s_1 ، کافی است از دستور زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} C = \gamma^c - 1 &= \gamma^{5^{4s_1}} - 1 = (\gamma^{5^{4s_1}})^{s_1} - 1 = \\ &= [\gamma^{5^{4s_1}} - 1] \{ [\gamma^{5^{4s_1}}]^{s_1-1} + [\gamma^{5^{4s_1}}]^{s_1-2} + \dots + \gamma^{5^{4s_1}} + 1 \} \end{aligned}$$

توان باقی‌مانده تقسیم $\gamma^4 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \times 50 + 1$ بر ۵ برابر است با ۱، پس باقی‌مانده تقسیم $(\gamma^4)^n$ بر γ^4 ، به ازای هر عدد طبیعی n ، برابر واحد است. عبارت داخل آکولاد درست راست برابری اخیر، شامل s_1 جمله است و از تقسیم هریک از آن‌ها بر ۵، باقی‌مانده ۱ به دست می‌آید، بنابراین

مجموع آن‌ها بر ۵ بخش پذیر نیست، چرا که s_1 بر ۵ بخش پذیر نیست. به این ترتیب، از تقسیم دو عدد $C = 75^{r-1} - 1$ و $E_r = 75^r - 1$ بر ۵، به يك باقی مانده می‌رسیم به همین مناسبت می‌توانیم، در ادامه کار فرض کنیم $s_1 = 1$ ، یعنی می‌توانیم به جای عدد C ، عدد E_r را قرار دهیم. سپس داریم:

$$\begin{aligned} E_r &= 75^r - 1 = (75^{r-1} \cdot 4) - 1 = \\ &= (75^{r-1} \cdot 4 - 1) \{ (75^{r-1} \cdot 4)^4 + (75^{r-1} \cdot 4)^3 + \\ &\quad + (75^{r-1} \cdot 4)^2 + 75^{r-1} \cdot 4 + 1 \} = E_{r-1} \cdot E' \end{aligned}$$

قبل از هر چیز، از این برابری مشخص می‌شود که E_r بر E_{r-1} قابل بخش است، یعنی توانی از ۵، که E_r بر آن بخش پذیر است، نمائی کمتر از توانی از ۵ که E_{r-1} بر آن بخش پذیر است، ندارد. به زبان دیگر، داریم:

$$\beta_r \geq \beta_{r-1} \text{ و چون } \beta_0 = 2, \text{ پس}$$

$$2 = \beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots$$

به این ترتیب، عدد $E_{r-1} = 75^{r-1} - 1$ ، به ازای همه مقادیر $r \geq 1$ ، بر ۲۵ بخش پذیر است، یعنی باقی مانده تقسیم عدد $e_{r-1} = e = 75^{r-1} - 1$ بر ۲۵، برابر واحد می‌شود و، همچنین، باقی مانده حاصل از تقسیم e^k (هر توانی از e) بر ۲۵، برابر است با ۱. چون عبارت E' واقع در داخل آکولاد (در دستور E_r)، برابر است با مجموع $1 + e + e^2 + e^3 + e^4$ ، از تقسیم E' بر ۲۵ به باقی مانده‌ای برابر ۵ می‌رسیم؛ یعنی E' بر 5^1 بخش پذیر، ولی بر 5^2 بخش ناپذیر است. بنابراین چه گفته شد و بنا بر دستور $E_r = E_{r-1} \cdot E'$ ، دستور $(**) (**) نتیجه می‌شود.$

اکنون به عدد $D = 7^d - 1$ بر می‌گردیم که، در آن: $D = 7^d - 1$. همان طور که دیدیم، عدد d بر ۴ بخش پذیر است (حتی بر عدد $1024 = 2^{10}$ هم قابل بخش است)، بنابراین، تنها این باقی می‌ماند که توانی از عدد ۵ را

پیدا کنیم که عدد

$$d = 7^{a_1} - 7^{b_1} = 7^{b_1}(7^{d_1} - 1), \quad (d_1 = a_1 - b_1)$$

بر آن بخش پذیر باشد (پایان ۱°، در حل همین مساله را ببینید). چون d_1 مضرب ۴ (و حتی مضرب ۲۷) است، مساله منجر به پیدا کردن نمائی از توان ۵ می شود، به نحوی که عدد

$$d_1 = a_1 - b_1 = 7^{a_2} - 7^{b_2} = 7^{b_2}(7^{d_2} - 1)$$

بر آن بخش پذیر باشد. در این جا

$$d_2 = a_2 - b_2 = 7^{a_3} - 7^{b_3} = 7^{b_3}(7^{d_3} - 1)$$

بر ۴ (و حتی بر ۲۴) بخش پذیر است و $d_3 = 7^7 - 1$ می دانیم، d_3 بر ۲ بخش پذیر و بر ۴ بخش ناپذیر است، یعنی $d_3 = 2f$ که، در آن، f عددی است فرد؛ بنابراین عدد

$$7^{d_2} - 1 = 49^f - 1 = (50 - 1)^f - 1$$

بر ۵ بخش پذیر نیست (باقی مانده تقسیم این عدد بر ۵، برابر است با ۲ - و یا به زبان دیگر ۳ +). از طرف دیگر، عدد $7^{d_2} - 1$ و همچنین $d_2 = 7^{b_3}(7^{d_3} - 1)$ بر ۴ بخش پذیر است، یعنی عدد $7^{d_2} - 1$ بر $5^{\beta_0} = 5^2$ ، و نه توان بالاتری از ۵، بخش پذیر است. بنابراین $d_1 = 7^{b_2}(7^{d_2} - 1)$ بر 5^2 و $d = 7^{b_1}(7^{d_1} - 1)$ بر $5^4 = 5^2 \cdot 5^2$ ، و سرانجام، عددهای $D = 7^d - 1$ و $A - B = 7^b \cdot D$ بر $5^6 = 5^2 \cdot 5^4$ و بخش پذیر است.

و این استدلال، حل مساله را به پایان می رساند.

یادداشت. روشن است که با استدلال مشابهی می توان ثابت کرد که، عددهای A_n و A_{n+2} که، به ترتیب، به کمک ترکیبی از n و $n+2$ رقم ۷ درست شده اند (در مسأله ما، برای عددهای A و B ، $n=4$ گرفته شده است؛ عدد A ترکیبی از ۶ رقم برابر ۷ و عدد B ترکیبی از ۴ رقم ۷ بود)، درست راست خود $(2n-2)$ رقم یکسان دارند. به خواننده توصیه می کنیم تلاش کند، رقم های یکسان سمت راست را، در عددهای A_n و A_m (که به ترتیب،

با ترکیبی از m و n رقم ۷ درست شده‌اند) پیدا کند. طبیعی است که، در آغاز کار، باید از حالتی شروع کرد که تفاضل $n - m$ خیلی بزرگ نباشد.

۶۸. a اگر رقم یکان عددی برابر a و رقم یکان عدد دیگری برابر b باشد، آن وقت رقم یکان حاصل ضرب این دو عدد، همان رقم یکان عدد ab است. با استفاده از این قضیه، می‌توانیم مساله را حل کنیم. عمل به‌توان رساندن را پشت‌سرهم انجام می‌دهیم و تنها به رقم‌های یکان عددهای حاصل توجه می‌کنیم: $۷^۲$ به رقم ۹، $۷^۲ = ۷^۲ \times ۷$ به رقم ۳، $۷^۳ = ۷^۳ \times ۷$ به رقم ۱ و، $۷^۴ = ۷^۴ \times ۷$ به رقم ۳ ختم می‌شود.

اگر همین روش را ادامه دهیم، معلوم می‌شود که رقم یکان عدد $(۷^۷)^۷$ برابر است با ۷ در واقع، $(۷^۷)^۲$ به رقم ۹، عدد $(۷^۷)^۳$ به رقم ۷، عدد $(۷^۷)^۴$ به رقم ۱ و $(۷^۷)^۵$ به رقم ۷ ختم می‌شود. بنابراین، رقم سمت راست $((۷^۷)^۷)^۷$ همان رقم سمت راست عدد $۷^۷$ یعنی ۳ و رقم یکان عدد $((((۷^۷)^۷)^۷)^۷)^۷$ برابر ۷ است و غیره.

به این ترتیب، اگر تعداد عددهای ۷ که در توان قرار گرفته‌اند زوج باشد، عدد حاصل به ۷ و اگر این تعداد فرد باشد، عدد حاصل به ۳ ختم می‌شود. چون ۱۰۰۰ عدد زوج است، بنابراین، عدد مفروض، به رقم ۷ ختم می‌شود.

اکنون دو عدد را در نظر می‌گیریم که درست است یکی عدد دورقمی A و درست است دیگری عدد دورقمی B قرار گرفته باشد. روشن است که حاصل ضرب این دو عدد به همان دورقمی ختم می‌شود که حاصل ضرب AB به آن‌ها ختم شده است. مثل قبل عمل می‌کنیم، تنها با این تفاوت که در این جا، دورقم سمت راست حاصل ضرب‌ها را در نظر می‌گیریم. دورقم سمت راست در عدد $۷^۷$ ، عدد ۴۳، در عدد $(۷^۷)^۷$ ، یعنی در عدد $۴۳^۷$ ، عدد ۵۷ به دست می‌آید. در این جا هم، اگر به روش خود ادامه دهیم، معلوم می‌شود که، اگر تعداد توان‌های ۷، عددی فرد باشد، عدد

حاصل به ۴۳ ختم می شود و اگر تعداد هفت هایی که در توان قرار دارند، زوج باشد، عدد حاصل به ۵۷ ختم می شود. دورقم سمت راست عدد مفروض ۵۷ است. (b) از همان روشی استفاده می کنیم که در (a) به کار بردیم. عدد $۷^۴$ به رقم ۱ ختم می شود، بنابراین رقم سمت راست هر عدد به صورت $۷^k = (۷^۴)^k$ برابر است با ۱. همچنین، رقم یکان در عدد $۷^{۴k+۱}$ که در آن، ۱ می تواند برابر ۵، ۱، ۲، یا ۳ باشد، همان رقم یکان در عدد ۷^1 است. بنابراین، مساله به این جا منجر می شود که باقی مانده نمای عدد ۷ را ۴ پیدا کنیم. این نما، خود توانی از عدد ۷ و عددی بسیار بزرگ است. عدد ۷ در تقسیم بر ۴ باقی مانده ای برابر ۱ — دارد؛ بنابراین به سادگی روشن می شود که، در تقسیم بر ۴، هر توان فردی از ۷ به باقی مانده ۱ — و هر توان زوجی از ۷ به باقی مانده ۱ — می رسد (باقی مانده تقسیم $۷^۲$ ، $۷^۴$ ، $۷^۶$ ، ... بر ۴ برابر ۱ — و باقی مانده تقسیم ۷^1 ، $۷^۳$ ، $۷^۵$ ، ... بر ۴ برابر ۱ — است). ۷ عددی فرد است و به هر توانی برسد، باز هم عددی فرد به دست می آید و، بنابراین تمامی عدد مفروض به صورت $۷^{۴k+۲}$ است (اگر در تقسیم عددی بر ۴، به باقی مانده ۱ — برسیم، به معنای آن است که باقی مانده تقسیم برابر ۳ شده است). رقم سمت راست این عدد، همان رقم سمت راست عدد $۷^۲$ ، یعنی ۳ است.

چون عدد $۷^۴$ به دورقم ۵۱ ختم می شود، بنابراین، دورقم سمت راست عدد $۷^{۴k+۱}$ بر دو رقم سمت راست عدد ۷^1 منطبق است. به این ترتیب، برای پیدا کردن دورقم سمت راست عدد مفروض، کافی است دورقم سمت راست عدد $۷^۲$ را پیدا کنیم که برابر است با ۴۳.

۶۹. پشت سرهم، این عددها را در نظر می گیریم:

$$1^0 \cdot z_1 = 9$$

$$2^0 \cdot z_2 = 9^{z_1} = (10 - 1)^{z_1} = 10^{z_1} - C_{z_1}^1 \cdot 10^{z_1-1} + \dots$$

$$\dots + C_{z_1}^1 \cdot 10 - 1$$

در سمت راست این برابری، همه جمله ها، به جز دو جمله آخر، بر ۱۰۰

بخش پذیرند، بنابراین دورقم سمت راست عدد z_2 برابر است با

$$C_{z_1}^1 \cdot 10 - 1 = 9 \times 10 - 1 = 89$$

$$\begin{aligned} 3^\circ. \quad z_2 = 9^{z_1} &= (10 - 1)^{z_1} = 10^{z_1} - C_{z_1}^1 \cdot 10^{z_1-1} + \dots \\ &\dots - C_{z_1}^2 \cdot 10^2 + C_{z_1}^1 \cdot 10 - 1 \end{aligned}$$

عدد z_2 به دو رقم ۸۹ ختم می‌شود، در نتیجه، دو رقم سمت راست عدد $C_{z_1}^1 = z_2$ برابر است با ۸۹ و آخرین رقم عدد

$$C_{z_1}^2 = \frac{z_1(z_1 - 1)}{1 \times 2} = \frac{\dots 89 \times \dots 88}{1 \times 2}$$

(نقطه‌ها معرف رقم‌های دیگر عددند)، برابر است با ۶. در نتیجه سه رقم سمت راست عدد z_3 ، بر سه رقم سمت راست عدد $289 - 600 + 890 - 1 = 289$ منطبق است.

$$\begin{aligned} 4^\circ. \quad z_3 = 9^{z_2} &= (10 - 1)^{z_2} = 10^{z_2} - C_{z_2}^1 \cdot 10^{z_2-1} + \dots \\ &\dots + C_{z_2}^2 \cdot 10^2 - C_{z_2}^3 \cdot 10^3 + C_{z_2}^1 \cdot 10 - 1 \end{aligned}$$

چون z_3 به عدد سه رقمی ۲۸۹ ختم می‌شود، بنابراین سه رقم سمت راست عدد $C_{z_2}^1 = z_3$ برابر است با ۲۸۹. عدد

$$C_{z_2}^2 = \frac{z_2(z_2 - 1)}{1 \times 2} = \frac{\dots 289 \times \dots 288}{1 \times 2}$$

به ۱۶ ختم می‌شود؛ و رقم سمت راست عدد

$$C_{z_2}^3 = \frac{z_2(z_2 - 1)(z_2 - 2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{\dots 289 \times \dots 288 \times \dots 287}{1 \times 2 \times 3}$$

برابر است با ۴. بنابراین چهار رقم سمت راست در عدد z_4 چنین می‌شود:

$$4000 - 1600 + 2890 - 1 = 5289$$

$$\begin{aligned} 5^\circ. \quad z_4 = 9^{z_3} &= (10 - 1)^{z_3} = 10^{z_3} - C_{z_3}^1 \cdot 10^{z_3-1} + \dots - \\ &- C_{z_3}^4 \cdot 10^4 + C_{z_3}^3 \cdot 10^3 - C_{z_3}^2 \cdot 10^2 + C_{z_3}^1 \cdot 10 - 1 \end{aligned}$$

z_4 به عدد چهار رقمی ۵۲۸۹ ختم می‌شود، بنابراین چهار رقم سمت راست

عدد $C'_{z_4} = z_4$ عبارت است از ۵۲۸۹. عدد

$$C_{z_4}^2 = \frac{z_4(z_4 - 1)}{1 \times 2} = \frac{\dots 5289 \times \dots 5288}{1 \times 2}$$

به سه رقم ۱۱۶ ختم می شود. دورقم سمت راست در عدد

$$C_{z_4}^3 = \frac{z_4(z_4 - 1)(z_4 - 2)}{1 \times 2} = \frac{\dots 5289 \times \dots 5288 \times \dots 5287}{1 \times 2 \times 3}$$

برابر است با ۶۴ و، سرانجام، رقم سمت راست عدد

$$C_{z_4}^4 = \frac{z_4(z_4 - 1)(z_4 - 2)(z_4 - 3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{\dots 5289 \times \dots 5288 \times \dots 5287 \times \dots 5286}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

برابر است با ۶. به این ترتیب، ۵ رقم سمت راست در عدد z_5 چنین می شود:

$$-60000 + 64000 - 116000 + 52890 - 1 = 45289$$

میس، از منطبق بودن چهار رقم سمت راست عدد z_5 بر چهار رقم سمت راست عدد z_4 ، نتیجه می گیریم که پنج رقم سمت راست عدد $z_5 = 9^{z_4}$ بر پنج رقم سمت راست عدد $z_4 = 9^{z_3} = (10 - 1)^{z_3}$ منطبق است. با همین روش، می توان ثابت کرد که پنج رقم سمت راست در همه عددهای دنباله

$$z_5, z_6 = 9^{z_5}, z_7 = 9^{z_6}, \dots, z_{1000} = 9^{z_{999}}, z_{1001} = 9^{z_{1000}}$$

یکسان است، یعنی همه این عددها به عدد پنج رقمی ۴۵۲۸۹ ختم می شوند؛ و عدد z_{1001} همان عدد N است.

۷۰. ابتدا، باقی مانده های حاصل از تقسیم هریک از عددهای 5^n و n^5 بر ۱۳ را، به ازای چند مقدار اولیه n ($n = 0, 1, 2, \dots$) پیدا می کنیم از عددهای 5^n آغاز می کنیم، به این جدول می رسم:

n	۰	۱	۲	۳	۴	...
عدد 5^n	۱	۵	۲۵	۱۲۵	۶۲۵	...
باقی مانده تقسیم 5^n بر ۱۳	۱	۵	-۱	-۵	۱	...

(در این جدول، باقی‌مانده ۱- را به جای ۱۲ و باقی‌مانده ۵- را به جای ۸ گذاشتیم؛ این وضع، به محاسبه باقی‌مانده‌های دیگر کمک می‌کند: اگر باقی‌مانده تقسیم ۵ⁿ بر ۱۳ برابر ۱- باشد، یعنی اگر $5^n = 13k - 1$ ، 5^k عددی درست است)، آن وقت، از تقسیم عدد

$$5^{n+1} = 5^n \cdot 5 = (13k - 1) \cdot 5 = 13(5k) - 5$$

بر ۱۳، به باقی‌مانده ۵- می‌رسیم. به همین ترتیب، اگر باقی‌مانده حاصل از تقسیم ۵^m بر ۱۳، برابر ۵- باشد، یعنی اگر $5^m = 13l - 5$ ، آن وقت، باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد

$$5^{m+1} = 5^m \cdot 5 = (13l - 5) \cdot 5 = 13(5l) - 25 = 13(5l - 2) + 1$$

بر ۱۳، برابر ۱ می‌شود.)

نیازی به ادامه جدول نیست. چون $5^4 = 13q + 1$ ، بنابراین باقی‌مانده تقسیم عدد $5^5 = (13q + 1) \times 5$ بر ۱۳ برابر ۵ و، به همین ترتیب، باقی‌مانده تقسیم عدد

$$5^6 = 5^4 \cdot 5^2 = (13q + 1) \cdot 5^2$$

بر ۱۳، برابر باقی‌مانده تقسیم ۵^۳ بر ۱۳، یعنی ۱- می‌شود و غیره. به این ترتیب، در دنباله این باقی‌مانده‌ها، عددهای ۱، ۵، ۱- و ۵- مرتباً تکرار می‌شوند، یعنی دنباله‌ای است متناوب با دوره تناوب (۵-، ۱-، ۵، ۱-).

اکنون، با همین روش به سراغ باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم 5^n بر ۱۳ می‌رویم و، این باقی‌مانده‌ها را، به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ محاسبه می‌کنیم. از تقسیم عدد

$$(13p + r)^5 = \underbrace{(13p + r)(13p + r) \dots (13p + r)}_{5 \text{ بار}}$$

۵ بار

بر ۱۳، به همان باقی‌مانده تقسیم 5^r بر ۱۳ می‌رسیم. بنابراین کافی است خود را به مقدارهای

$$n = 0, 1, 2, \dots, 12$$

محدود کنیم. اگر عدد n برابر 5 یا اگر باقی مانده تقسیم n بر 13 برابر 5 ، و اگر باقی مانده تقسیم عدد n^2 بر 13 برابر 4 باشد، آن وقت از تقسیم دو عدد $n^5 = n^2 \cdot n^2 \cdot n^1$ بر 13 ، به یک باقی مانده می رسیم. و این، به ما کمک می کند تا باقی مانده تقسیم n^5 بر 13 را، وقتی که n برابر 4 ، 5 یا 6 است، با سادگی بیشتری پیدا کنیم سرانجام، به این نکته توجه می کنیم که، اگر باقی مانده حاصل از تقسیم عدد n^5 بر 13 را برابر u بگیریم، آن وقت باقی مانده حاصل از تقسیم عدد

$$(13-n)^5 = \underbrace{(13-n)(13-n)\dots(13-n)}_{5 \text{ بار}}$$

بر 13 ، برابر باقی مانده تقسیم $(-n)^5$ بر 13 ، یعنی برابر $-u$ می شود که می توان آن را به صورت $13-u$ هم نوشت. حالا دیگر می توانیم جدول مربوط به باقی مانده های حاصل از تقسیم n^5 بر 13 را تنظیم کنیم:

n	0	1	2	3	4	5
n^5	0	1	32	243		
n^2					16	25
باقی مانده تقسیم n^2 بر 13					3	-1
باقی مانده تقسیم n^5 بر 13	0	1	6	-4	-3	5
					$t.t.s = 3 \times 3 \times 4$	$(-1)(-1).5$

n	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	...
n^5								
n^2	۳۶							
باقی مانده تقسیم n^2 بر ۱۳	-۳							
باقی مانده تقسیم n^5 بر ۱۳	۲ $1.1.5 =$ $= (-3)(-3)6$	-۲	-۵	۳	۴	-۶	-۱	...

در این جا، برای نوشتن باقی مانده‌های حاصل از تقسیم n^5 بر ۱۳، از این نکته استفاده کرده‌ایم که از تقسیم n^5 و $(n-13)^5$ بر ۱۳، باقی مانده‌هایی قرینه هم به دست می‌آید. وقتی n را بزرگتر از ۱۲ بگیریم، برای باقی مانده‌های حاصل از تقسیم n^5 بر ۱۳، دنباله‌ای متناوب به دست می‌آید، با دوره تناوب

$$۱ - ۶ - ۴ - ۵ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۱ - ۶ - ۵$$

می‌بینیم، در جدول اول، دوره تناوب دنباله باقی مانده‌ها شامل ۴ عدد است، در حالی که در جدول دوم، «دوره تناوب» دنباله باقی مانده‌ها، شامل ۱۳ عدد است. بنابراین، «دوره تناوب» دنباله باقی مانده‌ها در تقسیم عدد $n^5 + 5^*$ بر ۱۳، شامل $52 = 4 \times 13$ عدد می‌شود، یعنی اگر ۵۲ واحد به مقدار مفروض n اضافه کنیم، باقی مانده حاصل از تقسیم عدد $n^5 + 5^*$ بر ۱۳، تغییر نمی‌کند.

روشن است که، در جدول دوم، می‌توانیم خود را تنها به ستون‌هایی محدود کنیم که متناظر با باقی مانده‌های $1 \pm$ و $5 \pm$ هستند، زیرا در جدول

اول، تنها با باقی مانده های ۱، ۵، ۱- و ۵- سروکار داریم. اگر n را از ۰ تا ۵۱ در نظر بگیریم، باقی مانده ۱، متناظر با

$$n=1, n=1+13=14, n=1+2 \times 13=27,$$

$$n=1+3 \times 13=40$$

است. از بین این چهار عدد ۱، ۱۴، ۲۷ و ۴۰، تنها عدد ۱۴ به صورت $2x+4$ است و، در جدول اول، عدد $n=14$ ، متناظر با باقی مانده ۱- است. به این ترتیب $n=14$ با شرط مسأله سازگار است، یعنی عدد $5^{14}+14^5$ بر ۱۳ بخش پذیر است. به همین ترتیب، در جدول دوم، باقی مانده ۱-، متناظر با این عددها برای n است.

$$n=12, n=12+13=25, n=12+2 \times 13=38,$$

$$n=12+3 \times 13=51$$

از بین چهار عدد ۱۲، ۲۵، ۳۸ و ۵۱، تنها عدد ۱۲ مضربی است از ۴ و باقی مانده متناظر با $n=12$ در جدول اول، برابر با واحد است. به این ترتیب عدد $5^{12}+12^5$ هم بر ۱۳ بخش پذیر است. در جدول دوم، باقی مانده ۵، متناظر با این مقدارهای n است:

$$5, 5+13=18, 5+2 \times 13=31, 5+3 \times 13=44$$

و باقی مانده ۵-، متناظر با این مقدارهای n :

$$8, 8+13=21, 8+2 \times 13=34, 8+3 \times 13=47$$

در بین چهار عدد ۵، ۱۸، ۳۱ و ۴۴، تنها عدد ۳۱ به صورت $4z+3$ است، به نحوی که از تقسیم عدد $5^{31}=5^{4z+3}$ بر ۱۳ به باقی مانده ۵- برسیم؛ همچنین از بین چهار عدد ۸، ۲۱، ۳۴ و ۴۷، تنها ۲۱ به صورت $4t+1$ است که به ازای آن، باقی مانده تقسیم 5^{21} بر ۱۳ برابر ۵ می شود. به این ترتیب عددهای $5^{31}+31^5$ و $5^{21}+21^5$ هم، با شرط مسأله سازگارند (یعنی مضربی از ۱۳ هستند).

در فاصله از $n = 0$ تا $n = 52$ ، تنها چهار عدد طبیعی

$$n = 12, 14, 21, 31$$

با شرط مسأله می‌سازند. صورت کلی عددهای سازگار با شرط مسأله را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$n = 52m + 12, n = 52m + 14, n = 52m + 21, n = 52m + 31$$

که در آن‌ها $m = 0, 1, 2, \dots$

اکنون دیگر روشن است که، کوچکترین مقدار n که با شرط مسأله سازگار

باشد، برابر است با $n = 12$.

۷۱. روشن است که، دورقم سمت راست در عددهای $n^2, n^3, \dots, (n)$ ،

عددی است درست و غیرمنفی)، تنها به دو رقم سمت راست عدد n بستگی دارد. این مطلب را می‌توان از قاعده ضرب ستونی، به سادگی نتیجه گرفت. از طرف دیگر، اگر دو رقم سمت راست عدد غیرمنفی متوالی را در نظر بگیریم، به ناچار، این دورقم (ولو با ترتیب دیگری) چنین اند:

$$00, 01, 02, \dots, 98, 99$$

به این ترتیب، مسأله مفروض، منجر به محاسبه دورقم سمت راست عددی می‌شود که از مجموع زیر به دست می‌آید:

$$N_a = 0^a + 1^a + 2^a + \dots + 99^a$$

$a = 4$. اگر $n = 10x + y$ ، عددی دورقمی باشد، آن‌گاه

$$n^4 = (10x + y)^4 = 10^4 \cdot x^4 + 4 \cdot 10^3 x^3 y + 6 \cdot 10^2 x^2 y^2 + 4 \cdot 10 x y^3 + y^4$$

و دورقم سمت راست عدد n^4 ، تنها به جمله آخر این مجموع بستگی دارد. (هریک از جمله‌های دیگر، بر ۱۰۰۰ بخش پذیرند)، بنابراین، باید دورقم سمت راست عددهای برابر با مجموع‌های زیر را به دست آوریم:

$$\sum_x \sum_y 4 \times 10 x y^3, \sum_x \sum_y x^0 y^4 = 10 \sum_y y^4$$

که در آن‌ها، x و y ، مستقل از هم، می‌توانند مقادیرهای از ۰ تا ۹ را قبول کنند. (در مجموع دوم، اگر قرار دهیم $۰^\circ = ۰$ ، آن وقت

$$\sum_x x^\circ = ۰^\circ + ۱^\circ + \dots + ۹^\circ = ۱۰$$

اکنون، برای هر مقدار ثابت y ، مجموع اول را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_x ۴ \times ۱۰ x y^۳ = ۴ \times ۱۰ (۰ + ۱ + ۲ + \dots + ۹) y^۳ = ۱۸۰۰ y^۳$$

که به دورقم صفر ختم می‌شود، بنابراین $\sum_x \sum_y ۴ \times ۱۰ x y^۳$ هم به دو رقم برابر صفر ختم می‌شود. در نتیجه، این دو رقم، در دو رقم سمت راست عدد $N_۴$ اثری نمی‌گذارد. به این ترتیب، مسأله به این‌جا منجر می‌شود که دورقم سمت راست را، در عدد زیر پیدا کنیم:

$$۱۰ \sum_y y^۴ = ۱۰ (۰^۴ + ۱^۴ + ۲^۴ + \dots + ۹^۴) = ۱۰ S_۴$$

این برابری نشان می‌دهد که، کافی است رقم سمت راست را در عدد $S_۴$ به دست آوریم:

رقم‌های سمت راست عددهای y ، $y^۲$ و $y^۴$ را، در جدول زیر نوشته‌ایم:

y	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$y^۲$	۰	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۴	۱
$y^۴$	۰	۱	۶	۱	۶	۵	۶	۱	۶	۱

یعنی رقم سمت راست عدد $S_۴$ بر رقم سمت راست مجموع زیر منطبق است:

$$۰ + ۱ + ۶ + ۱ + ۶ + \dots + ۱ = ۴(۱ + ۶) + ۵ = ۳۳$$

در نتیجه، دو رقم سمت راست عدد $N_۴$ و، همچنین، دورقم سمت راست عدد مورد نظر مسأله، برابر است با ۳۰.

$\alpha = ۸$ (b). با روشی کاملاً شبیه حالت قبل، نتیجه می‌گیریم که دورقم سمت راست در مجموع $N_۸$ (و بنابراین، دورقم سمت راست در عدد مورد نظر

مسأله) بر دورقم سمت راست عدد S_8 ۱۰ منطبق است که در آن

$$S_8 = 0^8 + 1^8 + 2^8 + \dots + 9^8$$

از جدولی که در بالا نوشتیم، نتیجه می‌شود که عددهای r^4 و $y^4 = (y^4)^k$ (یک رقم است) در رقم‌های سمت راست خود برابرند. به این ترتیب، در حالت $\alpha = 8$ ، دورقم سمت راست عدد مورد نظر، همان دو رقم سمت راست در حالت $\alpha = 4$ است، یعنی ۳۰. یادداشت. به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که، اگر α مضربی از ۴ باشد، یعنی برای

$$\alpha = 4, 8, 12, 16, \dots$$

همیشه دورقم سمت راست عدد، برابر ۳۰ می‌شود.

۰۷۲. N مجموعی است از ۱۰۰۰ جمله متوالی یک تصاعد هندسی،

بنابراین

$$N = \frac{50^{1000} - 1}{50 - 1} = \frac{50^{1000} - 1}{49}$$

عدد $\frac{1}{49}$ می‌تواند به عدد دهدهی متناوب تبدیل شود که دوره تناوب آن شامل

۴۲ رقم است:

$$\frac{1}{49} =$$

$$= 0 / (020408163265306122448979591836734693877551)$$

اگر عدد داخل پرانتز را، که یک دوره تناوب است، با P نشان دهیم، داریم:

$$\frac{1}{49} = 0 / (P)$$

از بین مضرب‌های ۴۲، عدد $24 \times 42 = 1008$ ، نسبت به هر عدد

دیگری به ۱۰۰۰ نزدیک تر است. بنابراین

$$\frac{10^{1008}}{49} = 10^{1008} \cdot \underbrace{\frac{1}{49}}_{\text{۲۴ بار}} = PP \dots P / P \dots$$

بنابراین، کسر $M = \frac{10^{1008} - 1}{49}$ را می توان به این صورت نوشت:

$$M = \frac{10^{1008} - 1}{49} = 10^{1008} \times \frac{1}{49} - \frac{1}{49} = PP \dots P$$

۲۴ بار

این عدد شامل ۱۰۰۸ رقم است که به ۲۴ گروه ۴۲ رقمی (و هر گروه برابر P) تقسیم شده است (در واقع، عدد M بیش از ۱۰۰۷ رقم ندارد، زیرا عدد P با صفر آغاز می شود).

اکنون، تفاضل M از N را به دست می آوریم:

$$N - M = \frac{5^{1000} \cdot 10^{1000} - 1}{49} - \frac{10^{1008} - 1}{49} = \frac{5^{1000} - 10^8}{49} \cdot 10^{1000}$$

چون $N - M$ عددی است درست و چون 10^{1000} و ۴۹ نسبت به هم اول اند،

باید عدد $5^{1000} - 10^8$ بر عدد ۴۹ بخش پذیر باشد؛ یعنی $x = \frac{5^{1000} - 10^8}{49}$

عددی است درست و عدد $N - M = 10^{1000} x$ به هزار رقم برابر صفر ختم می شود و این، به معنای آن است که دو عدد N و M در هزار رقم سمت راست خود، بر هم منطبق اند. به این ترتیب، هزار رقم سمت راست عدد N چنین است:

$$\underbrace{pPP \dots P}_{\text{۲۳ بار}}$$

که در آن، P یک دوره تناوب عدد $\frac{1}{49}$ ، و عدد p عددی است ۳۴ رقمی

که شامل ۳۴ رقم سمت راست عدد P است.

$M = 10A + a \cdot 73$ می‌گیریم. فرض می‌کنیم M ، عددی $6n$ رقمی باشد، در این صورت، اگر رقم‌های اول و آخر M را باهم عوض کنیم به عدد $A \cdot 10^{6n-1} + a$ می‌رسیم. عدد اخیر را N می‌نامیم و عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$M - 3N = (10A + a) - (3 \times 10^{6n-1} \cdot a + 3A) = 7A - (3 \times 10^{6n-1} - 1)a$$

با توجه به شرط مسأله، M مضربی است از ۷؛ روشن است که $7A$ هم بر ۷ بخش پذیر است. بنابراین، اگر عدد $3 \times 10^{6n-1} - 1$ و، در نتیجه، عدد $a(3 \times 10^{6n-1} - 1)$ مضرب ۷ باشد، آن وقت $3N$ و، در نتیجه N مضرب ۷ خواهد بود.

از تقسیم عدد ۱۰ بر ۷ به باقی‌مانده ۳ می‌رسیم، بنابراین باقی‌مانده تقسیم عدد 10^2 بر ۷، برابر است با باقی‌مانده تقسیم عدد $3 \times 3 = 9$ بر ۷، یعنی ۲؛ به همین ترتیب، برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم 10^3 بر ۷، باید باقی‌مانده تقسیم $3 \times 2 = 6$ بر ۷ را به دست آورد (که همان ۶ می‌شود)؛ باقی‌مانده تقسیم $10^3 \times 10^3 = 10^6$ بر ۷، برابر است با باقی‌مانده تقسیم عدد $6 \times 6 = 36$ بر ۷، یعنی ۱. بنابراین عدد $10^6 = 10^3 \times 10^3$ را می‌توان به صورت $7k + 1$ نوشت؛ و چون باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد $10^5 = 10^3 \times 10^2$ بر ۷ برابر است با باقی‌مانده تقسیم عدد $2 \times 6 = 12$ بر ۷، یعنی ۵، پس عدد $10^5 = 10^3 \times 10^2$ را می‌توان به صورت $7l + 5$ نوشت. از این جا

$$\begin{aligned} 10^{6n-1} &= 10^{6n-6} \times 10^5 = (10^6)^{n-1} \times 10^5 = \\ &= \underbrace{(7k+1)(7k+1) \dots (7k+1)}_{(n-1) \text{ بار}} \cdot (7l+5) = 7K+5 \end{aligned}$$

یعنی در تقسیم عدد 10^{6n-1} بر ۷، به باقی‌مانده‌ای برابر ۵ می‌رسیم. در این صورت، باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد $3 \times 10^{6n-1}$ بر ۷، برابر است با

باقی مانده حاصل از تقسیم عدد $15 = 3 \times 5$ بر ۷، یعنی ۱. به این ترتیب عدد $1 - 10^6 \times 3$ بر ۷ بخش پذیر است. همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم.

۷۴. برای این که بدانیم، يك عدد به چند صفر ختم می شود، باید ببینیم، این عدد، بر چه توانی از ۱۰ بخش پذیر است! عدد ۱۰ برابر است با 2×5 . در حاصل ضرب عددهای از ۱ تا ۱۰۰، توان عدد ۲ از توان عدد ۵ بزرگتر است. بنابراین برای این که بالاترین توان ۱۰ را در حاصل ضرب $100 \times \dots \times 2 \times 1$ پیدا کنیم (نمای این توان برابر است با تعداد صفرهای سمت راست عدد $100!$)، کافی است بزرگترین توان ۵ را در این حاصل ضرب به دست آوریم.

از بین عددهای از ۱ تا ۱۰۰، ۲۰ عدد مضرب ۵ وجود دارد که، در میان آن ها، چهار عدد (۲۵، ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰) بر ۲۵ بخش پذیرند، یعنی مضربی از 5^2 هستند. به این ترتیب، تعداد پنج هایی که در $100!$ وجود دارد برابر است با ۲۴ یعنی عدد $100!$ ، درست به ۲۴ رقم برابر صفر، ختم می شود.

۷۵. (۱) حل اول. برای a و b). ابتدا به حل a می پردازیم.

n عدد طبیعی متوالی به صورت $1+t, 2+t, \dots, n+t$ را در نظر می گیریم. می توانیم عدد m ، بزرگترین نما از توان عدد اول p در عدد $n!$ و عددی، بزرگترین نما از توان p در حاصل ضرب $(1+t)(2+t)\dots(n+t)$ را پیدا کنیم.

تعداد عضوهایی از دنباله عددهای ۱، ۲، ...، n را که شامل توان هایی از p باشند، که نمائی از ۱ کوچکتر ندارند، برابر m_1 ، تعداد عضوهایی که در هر يك از آن ها، نمای p از ۲ کمتر نیست با m_2 و غیره نشان می دهیم. بنابراین در $n!$ ، برای عدد اول p ، توانی به دست می آید که نمای آن برابر است با $m = m_1 + m_2 + \dots$.

به همین ترتیب، در دنباله عددهای $1+t, 2+t, \dots, n+t$ ، تعداد عضوهایی را که بر p^2 بخش پذیرند با s_1 ، تعداد عضوهایی را که بر p^3

بخش‌پذیرند با s_1 و غیره نشان می‌دهیم. بنابراین نمای توانی از p که، حاصل ضرب $(t+1)\dots(t+n)$ بر آن بخش‌پذیر است، برابر $s = s_1 + s_2 + \dots$ می‌شود.

تعداد عضوهایی از دنبالهٔ عددهای $t+1, \dots, t+n$ که بر p بخش‌پذیرند، از m_1 کمتر نیست. در واقع، در میان عددهای $t+1, \dots, t+n$ عددهای $t+p, t+2p, \dots, t+m_1p$ وجود دارند؛ در ضمن، در هر فاصلهٔ بین دو عدد $t+kp$ و $t+(k+1)p$ ($k=0, 1, 2, \dots, m_1-1$)، دست کم یک عدد وجود دارد که بر p بخش‌پذیر است. در نتیجه $s_1 \geq m_1$. به همین ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که $s_2 \geq m_2$ و غیره. بنابراین $s \geq m$. این نتیجه‌گیری، به معنای آن است که، هر کدام از عامل‌های اول عدد $n!$ در عدد $(t+1)\dots(t+n)$ وجود دارد و، در ضمن، نمای هر یک از این عامل‌های اول در حاصل ضرب $(t+1)\dots(t+n)$ کمتر از نمای متناظر آن در عدد $n!$ نیست؛ یعنی عدد $(t+1)\dots(t+n)$ بر عدد $n!$ بخش‌پذیر است. (b) حاصل ضرب a عامل نخستین در $n!$ برابر است با $a!$ ؛ حاصل ضرب b عامل بعدی (b عاملی که بعد از a عامل نخستین در $n!$ آمده است) بر $b!$ بخش‌پذیر است (این را در a ثابت کردیم)؛ حاصل ضرب c عامل بعدی (c عاملی که بعد از $b+a$ عامل نخستین در عدد $n!$ وجود دارد) بر $c!$ بخش‌پذیر است و غیره. از آن‌جا که $a+b+c+\dots+k < n$ ، بنابراین $n!$ بر حاصل ضرب $k!c!b!a!$ بخش‌پذیر است.

(۱۰ حل دوم برای a) (b). از حل مسألهٔ (b) آغاز می‌کنیم. همان‌طور که دیدیم، نمای m برای توان هر کدام از عامل‌های p موجود در $a!$ برابر است با $m = m_1 + m_2 + \dots$ که، در آن، m_1 عبارت است از تعداد عضوهای متعلق به دنبالهٔ $1, 2, \dots, a$ که مضربی از p هستند، m_2 معرف تعداد عضوهای از دنباله است که مضرب p^2 هستند و غیره. به‌جز این می‌دانیم که تعداد عضوهای مضرب p در این دنباله برابر است با $\left[\frac{a}{p}\right]$ ، تعداد

عضوهای مضرب p^2 برابر $\left[\frac{a}{p^2}\right]$ و غیره است که، در آن‌ها، $\left[\frac{a}{p}\right]$ ،

$\left[\frac{a}{p^2}\right]$ ، ... به معنای بخش درست عددهای $\frac{a}{p}$ و $\frac{a}{p^2}$... هستند (صفحه‌های

$$۴۴ \text{ و } ۴۵ \text{ را ببینید). بنابراین } m = \left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{a}{p^2}\right] + \dots$$

p را عدد اول دلخواهی می‌گیریم. اگر فرض کنیم صورت کسر بر p^α بخش پذیر است، باید داشته باشیم:

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots$$

و اگر فرض کنیم، مخرج کسر بر p^β بخش پذیر است، آن وقت

$$\beta = \left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{a}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{b}{p}\right] + \left[\frac{b}{p^2}\right] + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \dots$$

چون $n \geq a + b + \dots + k$ ، با توجه به مسئله ۲۰۱، (۱)، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots &\geq \left(\left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{b}{p}\right] + \dots\right) + \\ &+ \left(\left[\frac{a}{p^2}\right] + \left[\frac{b}{p^2}\right] + \dots\right) + \dots \end{aligned}$$

و این به معنای آن است که $\alpha \geq \beta$ ؛ یعنی کسر مفروض، عددی درست است.

اکنون به مسئله (a) می‌پردازیم. برای این منظور، هم حاصل ضرب

$(t+1) \dots (t+n)$ و هم $n!$ را در $1 \times 2 \times \dots \times t(t-1) \dots$ ضرب می‌کنیم.

مسئله منجر به این می‌شود که ثابت کنیم، کسر زیر عددی درست است:

$$\frac{(t+n) \dots (t+1)t(t-1) \dots 1}{n!t(t-1) \dots 1} = \frac{(n+t)!}{n!t!} = \frac{(t+1) \dots (t+n)}{n!}$$

و این روشن است، چرا که درست بودن حاصل این کسر را اندکی قبل ثابت کردیم.

(c) عبارت $(n!)$ به معنای حاصل ضرب $n!$ عدد درست و مثبت نخستین است. این $n!$ عدد را می‌توان به $(n-1)!$ گروه تقسیم کرد، به نحوی که هر کدام از گروه‌ها، شامل n عدد درست متوالی باشد. حاصل ضرب عددهای هر گروه بر $n!$ بخش پذیر است (همین مسأله، a) را ببینید) و، بنابراین، حاصل ضرب $(n-1)!$ گروه بر $n!(n-1)!$ بخش پذیر می‌شود.

(d) تصاعد حسابی را به این صورت می‌گیریم:

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$$

ابتدا ثابت می‌کنیم، عددی مانند k وجود دارد، به نحوی که در تقسیم $k.d$ بر $n!$ ، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ به دست آید. $(n!-1)$ عدد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$d, 2d, 3d, \dots, (n-1)d$$

هیچ کدام از این عددها بر $n!$ بخش پذیر نیست (d و $n!$ را نسبت به هم اول گرفته‌ایم). از طرف دیگر، دو عدد به صورت pd و qd وجود ندارند، به نحوی که با فرض درست بودن p و q و در ضمن $p < n!$ و $q < n!$ ، از تقسیم بر $n!$ به باقی‌مانده‌های برابر برسند، زیرا اگر باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم pd و qd بر $n!$ برابر باشند، آن وقت باید عدد $pd - qd = (p-q)d$ بر $n!$ بخش پذیر باشد. به این ترتیب، از تقسیم این $(n!-1)$ عدد بر $n!$ ، به $(n!-1)$ باقی‌مانده مختلف می‌رسیم و، در نتیجه، یکی از این باقی‌مانده‌ها به ناچار برابر ۱ می‌شود و ما آن را kd می‌نامیم.

اگر $k.a$ را با A نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$ka = A$$

$$k(a+d) = A + kd = (A+1) + r.n!$$

$$k(a+2d) = A + 2kd = (A+2) + 2r.n!$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k[a+(n-1)d] = A + (n-1)kd = [A+(n-1)] + (n-1)r.n!$$

به این ترتیب، اگر عبارت

$$k^n a(a+d)(a+2d)\dots[a+(n-1)d]$$

را بر $n!$ تقسیم کنیم به همان باقی مانده ای می رسیم که از تقسیم عبارت

$$A(A+1)(A+2)\dots[A+(n-1)]$$

بر $n!$ به دست می آید. ولی حاصل ضرب $A(A+1)\dots[A+(n-1)]$ بر $n!$ بخش پذیر است (مسئله ۷۵ - a) را ببینید). در ضمن عددهای k^n و $n!$ نسبت به هم اول اند، چرا که k و $n!$ نسبت به هم اول بودند (زیرا kd و $n!$ نسبت به هم اول اند).

۷۶. تعداد ترکیب های ۵۰۰ تائی از ۱۰۰۰ شیء برابر است با

$$\frac{1000!}{(500!)^2}. \text{ چون } 7 \text{ عددی اول است، بنابراین بزرگترین توان } 7 \text{ که } 1000! \text{ بر آن}$$

بخش پذیر باشد، برابر است با

$$\left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{7^2}\right] + \left[\frac{1000}{7^3}\right] = 142 + 20 + 2 = 164$$

(را محل مسئله ۷۵ - b) را ببینید) و بزرگترین توان عدد ۷ که $500!$ بر آن بخش پذیر باشد.

$$\left[\frac{500}{7}\right] + \left[\frac{500}{7^2}\right] + \left[\frac{500}{7^3}\right] = 71 + 10 + 1 = 82$$

بنابراین $(500!)^2$ بر 7^{164} بخش پذیر است ($82 \times 2 = 164$). به این ترتیب هم صورت و هم مخرج بر 7^{164} بخش پذیرند و بر توان بزرگتری از ۷ بخش پذیر نیستند. اگر از صورت و مخرج کسر $\frac{1000!}{(500!)^2}$ عامل 7^{164} را

حذف کنیم، در صورت کسر عاملی از ۷ باقی نمی ماند و، بنابراین، تعداد ترکیب های ۵۰۰ تائی از ۱۰۰۰ شیء بر ۷ بخش پذیر نیست.

۷۷. a) عدد $(n-1)!$ تنها وقتی بر n بخش پذیر نیست که n عددی اول یا $n=4$ باشد.

در واقع، اگر n عددی مرکب باشد، به نحوی که بتوان آن را به صورت ضرب دو عامل متفاوت a و b ($a \neq 1$ و $b \neq 1$) نشان داد، آن وقت، هم a و هم b از $(n-1)$ کوچکترند و، بنابراین، می‌توان a و b را در بین عامل‌های $(n-1)!$ پیدا کرد، یعنی $(n-1)!$ بر $ab = n$ بخش پذیر است. اگر n مجذور عدد اولی مثل p باشد و $p > 2$ ، آن وقت

$$n-1 = p^2 - 1 > 2p$$

بنابراین، عددهای p و $2p$ را می‌توان در بین عامل‌های $(n-1)!$ پیدا کرد و، در نتیجه، $(n-1)!$ بر $2p^2 = 2p \cdot p$ بخش پذیر است. به این ترتیب عددهایی که با شرط‌های مسأله سازگارند، عبارتند از عدد ۴ و همه عددهای اول کوچکتر از ۱۰۰.

$(n-1)!$ تنها وقتی بر n^2 بخش پذیر نیست که: n عددی اول یا دو برابر یک عدد اول باشد و یا $n = 8$ یا $n = 9$.

ابتدا فرض می‌کنیم n ، مخالف با عددی اول، مخالف با دو برابر عددی اول، مخالف با مجذور عددی اول باشد و، در ضمن، برابر ۸ یا ۱۶ نباشد. در این صورت می‌توان n را به صورت $n = a \cdot b$ نوشت که، در آن، a و b عددهایی مختلف‌اند که از ۳ کوچکتر نیستند.

به همین ترتیب، اگر $n \neq 16$ ، آن وقت n را می‌توان به صورت $n = a \cdot b$ نوشت، به نحوی که $a \geq 3$ و $a \geq 5$. فرض کنید $n = ab$ ، $a \geq 3$ و $b > a$ ، $a \geq 3$ و $b > a$ ، در این صورت، عددهای a ، b ، $2a$ ، $2b$ و $3a$ از $n-1$ کوچکترند؛ a و $2b$ با هم فرق دارند و دست کم یکی از عددهای $2a$ و $3a$ با عددهای a ، b و $2b$ متفاوت است. بنابراین، در این حالت، $(n-1)!$ شامل عامل‌های a ، b ، $2a$ و $2b$ یا شامل عامل‌های a ، b ، $2b$ و $3a$ است (حتی ممکن است همه عامل‌های a ، b ، $2b$ ، $3a$ باشد). در همه این موردها، $(n-1)!$ بر $a^2 b^2 = n^2$ بخش پذیر است.

سپس، اگر $n = p^2$ و $p > 4$ عددی اول باشد، آن وقت $p > 4$ و $n-1 > 4p$ و، در نتیجه، $(n-1)!$ شامل عامل‌های p ، $2p$ ، $3p$ و $4p$ می‌شود و،

بنابراین $(n-1)!$ بر $n^2 = p^4$ بخش پذیر است.

اگر $n = 2p$ (p ، عددی اول است)، آن وقت $(n-1)!$ بر p^2 و، در نتیجه، بر n^2 بخش پذیر نیست. اگر $n = 8$ یا $n = 9$ ، آن وقت $(n-1)!$ بر n^2 بخش پذیر نیست ($7!$ بر 8^2 و $8!$ بر 9^2 بخش پذیر نیست).

اگر $n = 16$ ، آن وقت $(n-1)!$ بر n^2 بخش پذیر است (زیرا $15!$ شامل عامل‌های $2, 2^2, 4 = 2 \times 2, 6 = 3 \times 2, 8 = 2^3, 10 = 5 \times 2$ ، یعنی 2^{11} بر $16^2 = 2^8 \times 2^3$ است و بنابراین $15!$ بر 16^2 بخش پذیر است).

بنابراین، عددهای سازگار با شرط‌های مسأله، علاوه بر آنچه در مسأله ۷۷-ا) به دست آوردیم، عبارتند از عددهایی که دو برابر يك عدد اول اند ($6, 8, 9, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86, 94$). به زبان دیگر، همهٔ عددهای اول کوچکتر از 100 ، دو برابر همهٔ عددهای اول (به شرطی که از 100 تجاوز نکنند) و عددهای 8 و 9 .

۷۸-ن را عددی طبیعی می‌گیریم که بر همهٔ عددهای طبیعی $m \leq \sqrt{n}$ بخش پذیر باشد. فرض می‌کنیم، K ، کوچکترین مضرب مشترك همهٔ عددهای m باشد. روشن است که، ضمن تجزیهٔ K به عامل‌های اول، همهٔ عددهای اول کوچکتر از $\sqrt{n}$ ظاهر می‌شوند؛ اگر نمای عدد p (یکی از این عامل‌های اول) را k بگیریم، باید داشته باشیم:

$$p^k \leq \sqrt{n} < p^{k+1}$$

تعداد عددهای اول کوچکتر از $\sqrt{n}$ را l می‌گیریم و آن‌ها را $p_1, p_2, \dots, p_l$ می‌نامیم. کوچکترین مضرب مشترك عددهای کوچکتر از $\sqrt{n}$ (یعنی K)، برابر است با حاصل ضرب

$$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$$

که در آن، برای $k_1, k_2, \dots, k_l$ باید داشته باشیم:

$$p_1^{k_1} \leq \sqrt{n} < p_1^{k_1+1}, p_2^{k_2} \leq \sqrt{n} < p_2^{k_2+1}, \dots, p_l^{k_l} \leq \sqrt{n} < p_l^{k_l+1}$$

اگر نابرابری‌های

$$\sqrt{n} < p_{\lambda}^{k_{\lambda}+1}, \sqrt{n} < p_{\gamma}^{k_{\gamma}+1}, \dots, \sqrt{n} < p_l^{k_l+1}$$

را در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$(\sqrt{n})^l < p_{\lambda}^{k_{\lambda}+1} \cdot p_{\gamma}^{k_{\gamma}+1} \dots p_l^{k_l+1}$$

از طرف دیگر داریم:

$$p_{\lambda}^{k_{\lambda}+1} p_{\gamma}^{k_{\gamma}+1} \dots p_l^{k_l+1} = p_{\lambda}^{k_{\lambda}} p_{\gamma}^{k_{\gamma}} \dots p_l^{k_l} \cdot p_{\lambda} p_{\gamma} \dots p_l \leq K^2$$

زیرا $p_{\lambda}^{k_{\lambda}} p_{\gamma}^{k_{\gamma}} \dots p_l^{k_l} = K$ و $p_{\lambda} p_{\gamma} \dots p_l \leq K$. به این ترتیب

$$(\sqrt{n})^l < K^2$$

با توجه به فرض، عدد n باید بر K بخش پذیر باشد، یعنی $K \leq n$ و

در نتیجه

$$(\sqrt{n})^l < n^2$$

که از آن جا به دست می‌آید: $l < 4$. چون همهٔ عددهای $p_{\lambda}, p_{\gamma}, \dots, p_l$ ، عددهایی اول و کوچکتر از $\sqrt{n}$ هستند، بنابراین باید داشته باشیم:

$$p_4 = 7 > \sqrt{n} \quad (چهارمین عدد اول، برابر است با ۷) \quad \text{و} \quad n < 49.$$

با آزمایش روی همهٔ عددهای کوچکتر از ۴۹، روشن می‌شود که تنها عددهای ۲۴، ۱۲، ۸، ۶، ۴ و ۲، با شرط‌های مسأله سازگارند.

۰۷۹ a) این پنج عدد درست متوالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$n-2, n-1, n, n+1, n+2$$

در این صورت به دست می‌آید:

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 =$$

$$= 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$$

برای این که این عدد، مجذور کامل باشد، باید $n^2 + 2$ مضربی از ۵ باشد، ولی این وضع تنها وقتی پیش می‌آید که عدد n^2 ، به رقم ۳ ختم شود. ولی

به سادگی قابل تحقیق است که مجذور هیچ عدد درستی به ۳ ختم نمی شود.

(b) از بین سه عدد درست متوالی، یکی مضربی از ۳ است و دوتای دیگر در تقسیم بر ۳ به باقی مانده های برابر ۱ و ۲ (یا ۱ -) می رسند.

از طرف دیگر می دانیم، برای پیدا کردن باقی مانده حاصل از تقسیم حاصل ضرب دو عدد بر عدد درست k ، کافی است باقی مانده حاصل از تقسیم حاصل ضرب باقی مانده های دو عدد را بر k پیدا کنیم. در واقع

$$(pk+r)(qk+s) = k(pqk + ps + qr) + rs$$

به این ترتیب، اگر از تقسیم عددی بر ۳، به باقی مانده واحد برسیم، آن وقت در تقسیم هر توانی از این عدد بر ۳، باز هم به باقی مانده واحد می رسیم. ولی اگر عددی در تقسیم بر ۳، باقی مانده ای برابر ۱ - داشته باشد، هر توان فردی از آن عدد در تقسیم بر ۳ به باقی مانده ۱ - و هر توان زوجی از آن در تقسیم بر ۳ به باقی مانده ۱ می رسد.

وقتی سه عدد متوالی را به توانی زوج رسانده باشیم، یکی از آن ها بر ۳ بخش پذیر است و دوتای دیگر در تقسیم بر ۳ به باقی مانده واحد می رسند، بنابراین مجموع آن ها در تقسیم بر ۳، باقی مانده ای برابر ۲ پیدا می کند؛ در حالی که توان زوج يك عدد در تقسیم بر ۳ یا باقی مانده ای برابر صفر دارد و یا برابر ۱. به این ترتیب، مجموع توان های زوج سه عدد متوالی، نمی تواند برابر با توان زوجی از يك عدد درست باشد.

یادداشت. در اثبات بالا، از برابر بودن توان های زوج سه عدد متوالی استفاده ای نکردیم. بنابراین، قضیه کلی تر زیر در دست است: مجموع توان های زوج سه عدد متوالی درست، نمی تواند برابر با توان زوج يك عدد درست باشد.

(c) در مسئله ۷۹ - (b) دیدیم که، مجموع توان های زوج سه عدد درست متوالی، در تقسیم بر ۳، به باقی مانده ۲ می رسد. بنابراین، باقی مانده تقسیم حاصل از مجموع توان های زوج ۹ عدد متوالی بر ۳، باقی مانده ای برابر با باقی مانده تقسیم $۶ = ۲ + ۲ + ۲$ بر ۳ دارد، یعنی این مجموع بر ۳ بخش پذیر است.

اکنون ثابت می‌کنیم که، مجموع توان‌های زوج ۹ عدد متوالی، نمی‌تواند بر $9 = 3^2$ بخش‌پذیر باشد.

بین ۹ عدد متوالی، یک عدد وجود دارد که مضربی از ۹ است، یک عدد وجود دارد که در تقسیم بر ۹ به باقی‌مانده ۱ می‌رسد، یک عدد وجود دارد که در تقسیم بر ۹ به باقی‌مانده ۲ می‌رسد و غیره. بنابراین، اگر نمای زوج این ۹ عدد را برابر $2k$ بگیریم، برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم این مجموع بر ۹، باید باقی‌مانده حاصل تقسیم مجموع زیر را بر ۹ پیدا کنیم:

$$(*) \quad 0^{2k} + 1^{2k} + 2^{2k} + 3^{2k} + 4^{2k} + 5^{2k} + 6^{2k} + 7^{2k} + 8^{2k}$$

از این مجموع، 3^{2k} ، 6^{2k} و 9^{2k} بر ۹ بخش‌پذیرند. برای بقیه جمله، در یک سطر، توان دوم عددها و در سطر دوم، باقی‌مانده تقسیم آن‌ها را بر ۹ می‌نویسیم:

عدد	۱۲	۲۲	۴۲	۵۲	۷۲	۸۲
باقی‌مانده تقسیم بر ۹	۱	۴	۷	۷	۴	۱

بنابراین روشن است که، برای محاسبه باقی‌مانده حاصل از تقسیم مجموع $(*)$ بر ۹، باید باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد زیر بر ۹ را پیدا کرد:

$$(**) \quad 2(1^k + 4^k + 7^k)$$

برای k سه حالت ممکن است:

$$k = 3l(1) \quad \text{در این صورت داریم:}$$

$$1^{3l} + 4^{3l} + 7^{3l} = (1^3)^l + (4^3)^l + (7^3)^l = 1^l + 64^l + 343^l$$

از تقسیم هر یک از عددهای ۱، ۶۴ و ۳۴۳ بر ۹ به باقی‌مانده ۱ می‌رسیم.

بنابراین در این حالت باقی‌مانده حاصل از تقسیم عبارت $(**)$ بر ۹، برابر ۳ می‌شود، یعنی عبارت $(**)$ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

$$k = 3l + 1(2) \quad \text{در این حالت داریم:}$$

$$1^k + 4^k + 7^k = 1 + 64^l \times 4 + 343^l \times 7$$

که باقی مانده حاصل از تقسیم آن بر ۹ برابر است با باقی مانده تقسیم عدد $1 \times 7 + 1 \times 4 + 1$ ، یعنی ۱۲ بر ۹. در این حالت باقی مانده تقسیم $7^k + 4^k + 1^k$ بر ۹ برابر ۳ می شود و، بنابراین، عبارت $(**)$ بر ۹ بخش پذیر نیست.

(۳) $k = 3l + 2$. در این حالت هم، با همان روش معلوم می شود که باقی مانده تقسیم $7^k + 4^k + 1^k$ بر ۹ برابر است با ۳ و باز هم عبارت $(**)$ بر ۹ بخش پذیر نیست.

۰۸۵ (a) مجموع رقم ها در هریک از عددهای A و B برابر است با

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

از این جا معلوم می شود که از تقسیم عدد A بر ۹ یا از تقسیم عدد B بر ۹، به باقی مانده ۱ می رسیم. اکنون فرض می کنیم $\frac{A}{B} = n$ (عددی درست و $n \neq 1$)، یعنی $A = nB$. باقی مانده حاصل از تقسیم B بر ۹ برابر است با ۱، یعنی $B = 9N + 1$ (عددی درست است)، بنابراین

$$A = nB = n(9N + 1) = 9(nN) + n = 9M + n$$

یعنی باید از تقسیم عدد n بر ۹ به باقی مانده ۱ برسیم. چون $n \neq 1$ ، کوچکترین عددی که دارای این ویژگی باشد، عدد ۱۰ است، در حالی که $\frac{A}{B} < 10$ ، زیرا تعداد رقم های A و B یکی است (هر دو ۷ رقمی هستند). تناقض حاصل، به این معناست که A نمی تواند مضربی از B باشد.

(b) عددهای مجهول را N ، $2N$ و $3N$ می گیریم. باقی مانده تقسیم یک عدد بر ۹، برابر است با باقی مانده حاصل از تقسیم مجموع رقم های آن بر ۹. بنابراین، از تقسیم مجموع $N + 2N + 3N$ بر ۹، همان باقی مانده حاصل از تقسیم مجموع $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ بر ۹ به دست می آید. به این ترتیب، باید عدد $6N$ و، همچنین، عدد $3N$ بر ۹ بخش پذیر باشد.

چون $3N$ عددی است سه رقمی، بنابراین رقم سمت چپ عدد N

نمی‌تواند بزرگتر از ۳ باشد از این جا نتیجه می‌گیریم که رقم سمت راست N نمی‌تواند برابر ۱ باشد (زیرا، اگر رقم سمت راست N برابر واحد باشد، رقم سمت راست $2N$ برابر ۲ و رقم سمت راست $3N$ برابر ۳ می‌شود؛ یعنی رقم سمت چپ N نمی‌تواند هیچ کدام از سه رقم ۱، ۲ یا ۳ باشد). رقم سمت راست N نمی‌تواند برابر ۵ باشد، زیرا اگر عدد N به ۵ ختم شده باشد، عدد $2N$ به ۰ و عدد $3N$ به ۵ ختم می‌شود که هیچ کدام ممکن نیست. اکنون رقم سمت راست N را برابر ۲ می‌گیریم، رقم سمت راست $2N$ برابر ۴ و رقم سمت راست $3N$ برابر ۶ می‌شود. بنابراین برای دو رقم سمت چپ عدد $3N$ ، رقم‌های ۱، ۳، ۵، ۷، ۸ و ۹ باقی می‌ماند. از آن جاکه مجموع رقم‌های عدد $3N$ باید مضربی از ۹ باشد، بنابراین دو رقم سمت چپ عدد $3N$ (با توجه به این که رقم سمت راست آن برابر ۶ شده است)، تنها می‌تواند ۳ و ۹ یا ۵ و ۷ باشد. آزمایش همه حالت‌های ممکن نشان می‌دهد که، اگر رقم سمت راست N برابر ۲ باشد، تنها یک جواب برای مسأله به دست می‌آید: ۱۹۲، ۳۸۴، ۵۷۶.

با همین روش، می‌توان درباره حالت‌هایی بحث کرد که رقم سمت راست عدد N ، برابر با ۳، ۴، ۶، ۷، ۸ یا ۹ باشد. با این بحث سه جواب دیگر برای مسأله به دست می‌آید:

۶۵۸، ۴۳۷، ۲۱۹ یا ۹۸۱، ۶۵۴، ۳۲۷ یا ۸۱۹، ۵۴۶، ۲۸۳

۰۸۱ هر مجذور کامل، تنها می‌تواند به یکی از رقم‌های ۰، ۱، ۴، ۵، ۹، ۶ یا ۵ ختم شود. در ضمن، روشن است که، مجذور هر عدد زوج بر ۴ بخش پذیر است، در حالی که از تقسیم مجذور هر عدد فرد بر ۴، باقی‌مانده‌ای برابر واحد به دست می‌آید، زیرا

$$(2k)^2 = 4k^2, \quad (2k+1)^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

به این ترتیب، عدد درستی وجود ندارد که دو رقم سمت راست آن، برابر ۱۱، ۹۹، ۶۶ یا ۵۵ باشد، زیرا از تقسیم چنین عددهایی بر ۴، به ترتیب، به باقی‌مانده‌های ۳، ۳، ۲ و ۳ می‌رسیم.

اکنون، باقی مانده های حاصل از تقسیم مجذور کامل عددهای درست بر ۱۶ را مورد بررسی قرار می دهیم. هر عدد درست را می توان به یکی از این پنج صورت نوشت:

$$8k, \quad 8k \pm 1, \quad 8k \pm 2, \quad 8k \pm 3, \quad 8k + 4$$

که مجذورهای آن، به این صورت درمی آیند:

$$16(4k^2), \quad 16(4k^2 \pm k) + 1, \quad 16(4k^2 \pm 2k) + 4,$$

$$16(4k^2 \pm 3k) + 9, \quad 16(4k^2 + 4k + 1)$$

یعنی یا مجذور کامل يك عدد درست بر ۱۶ بخش پذیر است و یا درتقسیم آن بر ۱۶، یکی از باقی مانده های ۱، ۴ یا ۹ به دست می آید. درضمن، باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۶، برابر است با باقی مانده حاصل از تقسیم عدد چهاررقمی سمت راست آن بر ۱۶. اگر در سمت راست عددی، عدد چهاررقمی ۴۴۴۴ قرار گرفته باشد، باقی مانده حاصل از تقسیم آن بر ۱۶، برابر ۱۲ می شود و، بنابراین، چنین عددی هم نمی تواند مجذور کامل باشد.

به این ترتیب، اگر مجذور کامل يك عدد درست، به چهار رقم یکسان ختم شده باشد، این چهار رقم تنها می توانند برابر صفر باشند (مثلاً $1000^2 = 1000000$).

۸۲. طول ضلع ها و قطر مستطیل را، به ترتیب، x و y و z می گیریم. بنا بر قضیه فیثاغورت باید داشته باشیم:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

باید ثابت کنیم xy مضربی از ۱۲ است. در واقع باید ثابت کنیم xy هم بر ۳ بخش پذیر است و هم بر ۴. داریم:

$$(3k+1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1,$$

$$(3k+2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

یعنی، اگر يك مجذور کامل مضربی از ۳ نباشد، در تقسیم آن بر ۳، به

باقی‌مانده ۱ می‌رسیم. به این ترتیب، اگر x و y ، هیچ کدام مضرب ۳ نباشند، آن وقت از تقسیم $x^2 + y^2$ بر ۳، به باقی‌مانده ۲ می‌رسیم، یعنی $x^2 + y^2$ نمی‌تواند برابر z^2 باشد، زیرا از تقسیم z^2 بر ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۰ یا ۱ به‌دست می‌آید: دست‌کم یکی از دو عدد x و y ، مضربی از ۳ هستند.

عددهای x و y نمی‌توانند هر دو فرد باشند، زیرا اگر $x = 2m + 1$ و $y = 2n + 1$ ، آن وقت

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2m^2 + 4m + 1) + (2n^2 + 4n + 1) = \\ &= 2(m^2 + n^2 + m + n) + 2 \end{aligned}$$

و چنین عددی نمی‌تواند برابر z^2 باشد؛ زیرا اگر z عددی فرد باشد، مجذور آن هم، عددی فرد می‌شود و اگر z عددی زوج باشد، مجذور آن مضربی از ۴ می‌شود.

اکنون x را عددی زوج و y را عددی فرد می‌گیریم: $x = 2m$ ، $y = 2n + 1$. در این حالت، z ، عددی فرد است، یعنی $z = 2p + 1$ و باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} (2m)^2 &= (2p + 1)^2 - (2n + 1)^2 = \\ &= (4p^2 + 4p + 1) - (4n^2 + 4n + 1) \end{aligned}$$

یعنی

$$m^2 = p(p + 1) - n(n + 1)$$

$p(p + 1)$ و $n(n + 1)$ ، عددهایی زوج‌اند و، بنابراین، تفاضل آن‌ها یعنی m^2 هم باید عددی زوج و $x = 2m$ مضربی از ۴ باشد.

به این ترتیب y مضربی از ۳ و مضربی از ۴ و، بنابراین، مضربی از ۱۲ است.

۸۴. ریشه‌های این معادله با دستور زیر به‌دست می‌آیند:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بنابراین، برای این که ریشه‌های این معادله عددهایی گویا باشند، لازم و کافی است که عدد $b^2 - 4ac$ مجذور کامل باشد. فرض می‌کنیم: $b = 2n + 1$ ، $a = 2p + 1$ و $c = 2q + 1$. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (2n + 1)^2 - 4(2p + 1)(2q + 1) = \\ &= 4n^2 + 4n - 16pq - 8p - 8q - 3 = \\ &= 4\left(\frac{n(n+1)}{2} - 4pq - p - q - 1\right) + 5 \end{aligned}$$

$n(n+1)$ که حاصل ضرب دو عدد متوالی است، عددی زوج و بر ۲ بخش پذیر است. به این ترتیب، از تقسیم $b^2 - 4ac$ بر ۸، باقی مانده‌ای برابر ۵ به دست می‌آید. از طرف دیگر، روشن است که $b^2 - 4ac$ عددی فرد می‌باشد. هر عدد فرد را می‌توان به صورت $4k \pm 1$ نوشت که مجذور آن چنین می‌شود:

$$(4k \pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + 1 = 8(2k^2 \pm k) + 1$$

یعنی مجذور هر عدد فرد، در تقسیم بر ۸، به باقی مانده‌ای برابر ۱ می‌رسد، در حالی که باقی مانده تقسیم $b^2 - 4ac$ بر ۸ برابر ۵ شد، عبارت $b^2 - 4ac$ مجذور کامل نیست. **۸۴.** داریم:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)}$$

در سمت راست برابری، صورت کسر بر ۳ بخش پذیر نیست، در حالی که مخرج آن مضربی است از ۳. به این ترتیب، مخرج کسر همیشه دارای عاملی به جز ۲ و ۵ است. به این ترتیب، عدد مفروض، در نمایش دهمی خود، به پایان نمی‌رسد و کسری متناوب است.

از دو عدد n و $n+1$ ، یکی زوج است. اگر $n+1$ زوج باشد، n عددی فرد می‌شود و، بنابراین، $3n^2$ عددی فرد است، یعنی صورت کسر، $3n^2 + 6n + 2$ ، به صورت عددی فرد درمی‌آید. اگر n زوج باشد، آن وقت $n+2$ هم عددی زوج می‌شود و مخرج کسر باید بر 2^2 بخش پذیر باشد، در حالی که صورت کسر بر 2 بخش پذیر، ولی بر 2^2 بخش ناپذیر است، زیرا به ازای $n=2k$ داریم:

$$3n^2 + 6n + 2 = 12k^2 + 12k + 2 = 2(6k^2 + 6k + 1)$$

از این جا روشن می‌شود که، وقتی کسر مفروض را به صورت ساده نشدنی درآوریم، مخرج آن نسبت به 10 اول نیست و، بنابراین، درنمایش دهنده آن، هم رقم‌های نامتناوب و هم رقم‌های متناوب به دست می‌آید، یعنی کسر دهنده متناوب مرکب است.

۸۵. (a و b). کسرهای هریک از دو مجموع

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}; \quad N = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m}$$

را به يك مخرج تبدیل می‌کنیم. از بین همه کسرهای موجود در M (یا در N)، بزرگترین توان 2 ، در یکی از مخرج‌هاست (و تنها در یکی از مخرج‌ها). بنابراین در صورت کسر (در M یا N) چند جمله پیدا می‌شود که یکی از آن‌ها فرد است (جمله‌ای مربوط به صورت کسر است که مخرج آن بزرگترین توان 2 را دارد) و بقیه جمله‌ها، عددهایی زوج‌اند. در هر يك از دو مقدار M یا N ، در صورت کسر عددی فرد به دست می‌آید، در حالی که مخرج آن عددی زوج است و، بنابراین، نمی‌تواند برابر با عددی درست باشد.

(c) از بین کسرهای مجموع k ، آن را انتخاب می‌کنیم که، در مخرج خود، بزرگترین توان 3 را داشته باشد (مثلاً فرض کنیم در مخرج این کسر، عامل 3^k وجود داشته باشد). چون مخرج همه کسرهای مجموع K ، عددهایی،

فردند، بنابراین هیچ کدام از آن‌ها نمی‌تواند به صورت $\frac{1}{2 \times 3^k}$ باشد. اکنون

اگر این کسرها را به يك مخرج تبدیل کنیم، در صورت همه کسرها، عددی به دست می آید که مضربی از ۳، به جز در صورت کسری که مخرج آن دارای عامل ۳^k است. بنابراین مجموع صورتها، عددی است بخش ناپذیر بر ۳، درحالی که مخرج مشترك آنها، مضربی است از ۳. به این ترتیب K نمی تواند عددی درست باشد.

۸۶. a کسرهای

$$\frac{a^4 + 3a^2 + 1}{a^3 + 2a} = a + \frac{a^2 + 1}{a^3 + 2a} \text{ و } \frac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$$

(و همچنین $\frac{a^2 + 1}{a^3 + 2a}$) یا همه تحویل پذیرند یا همه تحویل ناپذیر. به همین

ترتیب، کسرهای $\frac{a^3 + 2a}{a^2 + 1}$ و $\frac{a^2 + 1}{a^3 + 2a} = a + \frac{a}{a^2 + 1}$ (و همچنین

کسر $\frac{a}{a^2 + 1}$) همه ساده شدنی یا همه ساده نشدنی هستند. سرانجام،

کسرهای $\frac{a}{a^2 + 1}$ ، $\frac{a}{a} = 1$ و $\frac{a^2 + 1}{a}$ (و همچنین کسر $\frac{1}{a}$) همه با هم

تحویل پذیر یا همه باهم تحویل ناپذیرند؛ ولی کسر $\frac{1}{a}$ قابل ساده شدن نیست

و، بنابراین، کسر مبداء هم تحویل ناپذیر است.

(b) اگر دو عدد $a = 5n + 6$ و $b = 8n + 7$ مقسوم علیه مشترکی

مثل $d \neq 1$ داشته باشند، آن وقت تفاضل $p = b - a = n + 1$ هم باید بر

d بخش پذیر باشد. به همین ترتیب، تفاضل های $p_1 = a - p = 2n + 5$ ،

$p_2 = p - p_1 = n - 4$ و $p_3 = p_1 - p_2 = n + 9$ و $p_4 = p_3 - p_2 = 13$

نیز باید بر d بخش پذیر باشند. از این جا معلوم می شود که d تنها می تواند

برابر ۱۳ باشد. درضمن، به سادگی می توان حالتی را پیدا کرد که کسر مفروض،

به ۱۳ ساده شود. مثلاً به ازای $n = 4$ داریم:

$$\frac{5n + 6}{8n + 7} = \frac{26}{39} = \frac{2 \times 13}{3 \times 13} = \frac{2}{3}$$

یادداشت مترجم. به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر داشته باشیم

$n = 131 + 4$ ، آن وقت کسر $\frac{5n+6}{8n+7}$ به عدد ۱۳ ساده می‌شود:

$$\frac{5n+6}{8n+7} = \frac{5(131+4)+6}{8(131+4)+7} = \frac{13(51+2)}{13(81+3)} = \frac{51+2}{81+3}$$

۸۷. می‌توان صورت مسأله را به این ترتیب تنظیم کرد: با آغاز از یک

رقم، عدد ۱۹۵۳ رقمی حاصل بر ۲۷ بخش پذیر شده است؛ ثابت کنید، اگر از رقم بعدی آغاز کنیم و عدد ۱۹۵۳ رقمی جدید را در همان جهت عدد قبلی در نظر بگیریم، باز هم بر ۲۷ بخش پذیر است. در واقع، با تکرار این عمل، به تعداد لازم، سرانجام به عددی خواهیم رسید که از رقم مورد نظر ما آغاز شده است.

فرض کنید، نخستین بار از رقم $a_1 = a$ آغاز کرده باشیم. عدد ۱۹۵۲ رقمی را که شامل بقیه رقم‌های عدد (با حذف a) است، B می‌نامیم. بنابراین نخستین عدد ما به صورت $a \times 10^{1952} + B$ و عدد ۱۹۵۳ رقمی جدید (که با اولین رقم عدد B آغاز می‌شود) به صورت $10B + a$ در می‌آید.

طبق فرض مسأله عدد $a \times 10^{1952} + B$ بر ۲۷ بخش پذیر است. عدد $10^{1952} - 1$ را در نظر می‌گیریم که عددی است ۱۹۵۲ رقمی با رقم‌های برابر ۹. از تقسیم این عدد بر ۹، به عددی ۱۹۵۲ رقمی با رقم‌های برابر واحد می‌رسیم که اگر آن را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ به دست می‌آید (باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۳، برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع رقم‌های آن بر ۳). به این ترتیب، از تقسیم عدد $10^{1952} - 1$ بر ۲۷ به باقی‌مانده‌ای برابر 2×9 یعنی ۱۸ می‌رسیم؛ و این، به معنای آن است که باقی‌مانده حاصل از تقسیم 10^{1952} بر ۲۷ برابر است با ۱۹. باقی‌مانده تقسیم B بر ۲۷ را b می‌نامیم، در نتیجه از تقسیم عددهای $a \times 10^{1952} + B$ و $19a + b$ بر ۲۷، به یک باقی‌مانده خواهیم رسید؛ یعنی با توجه به فرض مسأله، عدد $M = 19a + b$ بر ۲۷ بخش پذیر است.

اکنون به عدد جدید $10B + a$ می‌پردازیم. باقی‌مانده حاصل از تقسیم

عدد $a + 10B$ بر ۲۷ برابر است با باقی مانده حاصل از تقسیم عدد $N = 10b + a$ بر ۲۷. به این ترتیب، مسأله به این جا منجر می شود که ثابت کنیم: اگر $M = 19a + b$ مضربی از ۲۷ باشد، آن وقت عدد $M = 10b + a$ هم مضربی از ۲۷ است. ولی این روشن است، زیرا تفاضل $10M - N = 189a$ بر ۲۷ بخش پذیر است ($189 = 27 \times 7$)؛ در نتیجه، با فرض بخش پذیر بودن M بر ۲۷، عدد $N = 10M - 189a$ هم بر ۲۷ بخش پذیر می شود.

۰۸۸. روشن است که عدد 5^n (عددی طبیعی است) به رقم ۵ ختم می شود، یعنی عدد $a = 5^{1000}$ هم به رقم ۵ ختم می شود. اکنون فرض می کنیم، نمایش دهدهی عدد $a = 5^{1000}$ شامل صفرهایی باشد و، این صفرها، از رقم i ام (با در نظر گرفتن از راست به چپ) آغاز شده باشند، یعنی وقتی که رقم های عدد a را از راست به چپ می شماریم، در رقم i ام برای نخستین بار، مواجه با رقمی برابر صفر شویم. روشن است که عدد $5^{1000} \times 10^{i-1}$ به رقم های $0 \dots 0$ ختم شده است. در نتیجه، $(i-1)$ رقم سمت راست $i-1$ بار

در عدد a ، بر $(i-1)$ رقم سمت راست در مجموع $5^{1000} \times 10^{i-1} + 5^{1000} = a_1$ منطبق است (و همه این $(i-1)$ رقم مخالف صفرند؛ ولی رقم i ام (از راست به چپ) در عدد a_1 برابر ۵ (یعنی مخالف صفر) است. به این ترتیب، می توانیم به جای عدد a ، عدد a_1 را در نظر بگیریم که تعداد رقم های بیشتری دارد و، در ضمن، رقم i ام آن (از راست به چپ) مخالف صفر است.

اکنون، همین عمل را در مورد عدد a_1 تکرار می کنیم. فرض کنیم، عدد a_1 ، برای نخستین بار، در رقم j ام خود (از راست به چپ) برابر صفر باشد ($j > i$). به کمک a_1 ، عدد $10^{j-1} \cdot 5^{1000} + a_1 = a_2$ را می سازیم که بر $a = 5^{1000}$ بخش پذیر است و رقم j ام آن، مخالف صفر است (رقم j ام عدد a_2 برابر ۵ است؛ در این جا هم، رقم ها را از راست به چپ شمرده ایم).

این روند می تواند ما را به a_k برساند (k می تواند برابر ۵، ۱، ۲، ... باشد). همان عدد $a = 5^{1000}$ است) روشن است که تعداد رقم های عدد؛ با بزرگ شدن k ، به سرعت افزایش می یابد و، از این گذشته، ممکن است این

روند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند. ولی می‌توانیم، این روند را، در عدد a_e که ۱۰۰۰ رقم سمت راست آن مخالف صفر است، متوقف کنیم. در واقع، عدد a_e را می‌توان به صورت $a_e = 10^{1000}A + B$ نوشت. عدد B دارای هزار رقم مخالف صفر و عدد A شامل همهٔ رقم‌های بعد از رقم هزارم (با شمارش از راست به چپ) است. در ضمن داریم:

$$B = a_e - 10^{1000}A$$

a_e بر 5^{1000} بخش پذیر است؛ عدد A ، $5^{1000} \cdot 2^{1000} \cdot 10^{1000}A = 10^{1000}A$ هم مضربی است از 5^{1000} ، بنابراین، عدد B (که همهٔ رقم‌های آن مخالف صفر است) بر 5^{1000} بخش پذیر می‌شود.

۸۹. همهٔ عددهای دنبالهٔ مفروض به این صورت اند:

$$1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

عددهای به صورت $1 + 10^2 + 10^4 + 10^6 + \dots + 10^{2k}$ را در نظر می‌گیریم. این برابری‌ها روشن است:

$$10^{4k+4} - 1 = (10^4 - 1)(1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4k}),$$

$$10^{2k+2} - 1 = (10^2 - 1)(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})$$

علاوه بر این، به روشنی داریم:

$$10^{4k+4} - 1 = (10^{2k+2} - 1)(10^{2k+2} + 1)$$

از این سه برابری، می‌توان نتیجه گرفت:

$$10^{4k+4} - 1 = (10^4 - 1)(1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4k}) =$$

$$= (10^2 - 1)(1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})(10^{2k+2} + 1)$$

از این جا و با توجه به برابری $10^2 + 1 = 101$ به دست می‌آید

$$1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4k} \times 101 =$$

$$= (1 + 10^2 + 10^4 + \dots + 10^{2k})(10^{2k+2} + 1)$$

چون 10^1 عددی است اول، بنابراین یکی از دو عدد $10^{2k} + 10^4 + 10^2 + 1$ یا $10^{2k+2} + 1$ باید بر 101 بخش پذیر باشند. در حالت $k > 1$ از تقسیم هریک از این عددها بر 101 ، خارج قسمتی بزرگتر از واحد به دست می آید. در نتیجه، برای $k > 1$ ، می توان یکی از دو عدد

$$10^{2k+2} + 1 \text{ یا } 10^{2k} + 10^4 + \dots + 10^2 + 1$$

را به صورت ضرب دو عامل تجزیه کرد که یکی از آن ها برابر 101 است. اگر دو طرف برابری را بر 101 تقسیم کنیم، به نتیجه مطلوب می رسیم. در حالت $k = 1$ هم داریم $10^4 + 1 = 10001$ که عددی مرکب است:

$$10001 = 73 \times 137$$

یادداشت. با همین روش می توان ثابت کرد که همه عددهای دنباله زیر، عددهایی مرکب اند:

$$\underbrace{100\dots01}_{2k+1} \quad \underbrace{100\dots01}_{2k+1}; \quad \underbrace{100\dots0}_{2k+1} \quad \underbrace{100\dots0}_{2k+1} \quad \underbrace{100\dots01}_{2k+1}, \dots$$

۹۵. با استفاده از دستور $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ می توان نوشت:

$$\begin{aligned} 2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) = \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) = \dots = \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-3}} + 1) \dots \\ &\quad \dots (2^2 + 1)(2 + 1) \end{aligned}$$

(آخرین عامل، یعنی $(2-1)$ را ننوشته ایم).

به این ترتیب، عدد $2^{2^n} - 1 = (2^{2^n} + 1) - 2$ بر همه عددهای قبل از $2^{2^n} + 1$ بخش پذیر است. از این جا نتیجه می شود که، اگر عددهای

$2^{2^k} + 1$ و $2^{2^n} + 1$ ، عامل مشترکی داشته باشند، باید عدد ۲ بر این عامل مشترك بخش پذیر باشد. ولی عدد ۲ نمی تواند عامل مشترك دو عدد از این دنباله باشد (چون همه این عددها فردند)، بنابراین هر دو جمله دلخواه از این دنباله، نسبت به هم اول اند.

۹۱. روشن است که 2^n بر ۳ بخش پذیر نیست. اگر باقی مانده حاصل از تقسیم عدد 2^n بر ۳ برابر واحد باشد، آن وقت $2^n - 1$ بر ۳ بخش پذیر می شود؛ و اگر باقی مانده حاصل از تقسیم 2^n بر ۳ برابر ۲ باشد، آن وقت $2^n + 1$ بر ۳ بخش پذیر است. به این ترتیب، همیشه یکی از دو عدد $2^n - 1$ یا $2^n + 1$ مضربی از ۳ می شود، یعنی اگر این دو عدد از ۲ بزرگتر باشند، آن وقت، هر دو عدد نمی توانند، به طور هم زمان، اول باشند.

۹۲. (a) در تقسیم $p > 3$ بر ۳ نمی توان به باقی مانده ۲ رسید، زیرا در غیر این صورت، عدد $8p - 1$ بر ۳ بخش پذیر می شود. بنابراین، اگر بخواهیم $8p - 1$ عدد اول باشد، باید عدد p به صورت $p = 3k + 1$ باشد ولی در این حالت $8p + 1$ مضربی از ۳ می شود. در حالت $p = 3$ (و در نتیجه، $8p - 1 = 23$) به دست می آید $8p + 1 = 25$ که باز هم عددی مرکب است.

(b) $p > 3$ می گیریم. وقتی p مضربی از ۳ نباشد، باقی مانده حاصل از تقسیم p^2 بر ۳، برابر واحد می شود (حل مسأله ۷۹-b را ببینید) و، در نتیجه، $8p^2 - 1$ مضربی از ۳ می شود. بنابراین، باید داشته باشیم: $p = 3$ و $8p^2 + 1 = 73$. در این صورت به دست می آید: $8p^2 - 1 = 71$ که عددی اول است.

۹۳. هر عدد اول، به جز عددهای ۲ و ۳، در تقسیم بر ۶، باقی مانده‌ای ۱ یا ۵ پیدا می کند، زیرا اگر باقی مانده حاصل از تقسیم عددی بر ۶ برابر ۲ یا ۴ شود، به معنای آن است که عدد مفروض مضربی است از ۲ (و این ممکن نیست، زیرا، به جز ۲، هیچ عدد زوجی اول نیست)؛ اگر در تقسیم عددی بر ۶، به باقی مانده ۳ برسیم، به معنای آن است که این عدد بر ۳ بخش پذیر است (این هم ممکن نیست، زیرا هیچ عدد اولی، به جز ۳، مضربی از ۳ نیست).

به این ترتیب، هر عدد اول بزرگتر از ۳ را می توان به صورت $4n+1$ و یا $4n+5$ نوشت. مجذور این عددها، چنین است

$$\begin{aligned}(4n+5)^2 &= 12(3n^2+n)+1, \quad (4n+1)^2 = \\ &= 12(3n^2+5n+2)+1\end{aligned}$$

یعنی، در هر حال، باقی مانده ای برابر واحد به دست می آید.

۹۴. هر عدد اول بزرگتر از ۳ به صورت $4n+1$ یا $4n+5$ است (حل مسأله قبل را ببینید)؛ بنابراین، دست کم دو تا از این عددها، به یکی از این دو صورت اند. تفاضل این دو عدد، برابر است با d یا $2d$ (d ، قدرنسبت تصاعد حسابی است)؛ و این تفاضل بر e بخش پذیر است. یعنی، در هر حال، d مضربی است از ۳. علاوه بر این، عددهای اول بزرگتر از ۳، عددهایی فردند و، بنابراین، تفاضل دو عدد فرد، همیشه مضربی است از ۲. به این ترتیب، d بر e بخش پذیر است (حل مسأله ۹۵-a را هم ببینید).

۹۵. a) چون همه عددهای اول، به جز ۲، عددهایی فردند، بنابراین قدرنسبت این تصاعد، عددی زوج است. سپس، اگر قدرنسبت تصاعد، مضربی از ۳ نباشد، آن وقت از تقسیم سه جمله a_1, a_1+d, a_1+2d (از این تصاعد) بر ۳، باقی مانده های مختلفی به دست می آید، زیرا در بین آن ها، دو عدد وجود ندارد که تفاضلشان مضربی از ۳ باشد. در نتیجه، دست کم یکی از این سه عدد باید مضربی از ۳ باشد که ممکن نیست، چرا که همه جمله های تصاعد، عددهایی اول اند (اگر $a=3$ ، آن وقت $a+3d$ هم بر ۳ بخش پذیر است). به همین ترتیب، اگر d مضربی از ۵ نباشد، آن وقت از تقسیم عددهای $a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, a_1+4d$ بر ۵، باقی مانده های مختلف به دست می آید و، بنابراین، دست کم یکی از این ۵ عدد باید مضربی از ۵ باشد که باز هم ممکن نیست (به ازای $a_1=5$ ، a_1+5d هم بر ۵ بخش پذیر است) سرانجام، با همین روش می توان ثابت کرد که d ، قدرنسبت تصاعد حسابی، باید مضربی از ۷ باشد. به این ترتیب، قدرنسبت تصاعد مجهول، مضربی از $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ، یعنی ۲۱۰ می شود: $d=210k$.

بنابه فرض مساله، باید همه جمله‌های تصاعد از ۳۰۰۰ کوچکتر باشند، یعنی باید داشته باشیم:

$$a_1 = a_1 + 9d = a_1 + 1890k < 3000$$

ولی این نابرابری نمی‌تواند برای $k \geq 2$ برقرار باشد؛ از این جا نتیجه می‌شود $k = 1$. یعنی

$$a_1 < 3000 - 9d = 3000 - 1890 = 1110$$

علاوه براین، چون $210 = 11 \times 19 + 1$ ، بنابراین $(m+1)$ امین جمله تصاعد را می‌توان به این صورت نوشت:

$$a_{m+1} = a_1 + (11 \times 19 + 1)m = 11 \times 19m + (a_1 + m)$$

یعنی، اگر از تقسیم a_1 بر ۱۱ به باقی مانده‌ای برابر ۲ برسیم، آن وقت a_1 بر ۱۱ بخش پذیر است؛ اگر باقی مانده تقسیم a_1 بر ۱۱ برابر ۳ باشد، آن وقت a_1 بر ۱۱ بخش پذیر است و غیره. به این ترتیب، باقی مانده حاصل از تقسیم a_1 بر ۱۱ نمی‌تواند برابری یکی از عددهای ۲، ۳، ۴، ...، یا ۱۰ باشد. بنابراین یا $a_1 = 11$ ، و یا از تقسیم a_1 بر ۱۱، باقی مانده‌ای برابر واحد به دست می‌آید (a_1 نمی‌تواند مضربی از ۱۱ باشد، زیرا a_1 عددی است اول). اکنون از برابری $210 = 13 \times 16 + 2$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$a_{m+1} = a_1 + (13 \times 16 + 2)m = 13 \times 16m + (a_1 + 2m)$$

با همان روش قبلی، و به کمک رابطه بالا، ثابت می‌شود که، باقی مانده حاصل از تقسیم a_1 بر ۱۳، تنها می‌تواند یکی از عددهای ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ یا ۱۲ باشد. اکنون، با توجه به فرد بودن عدد a_1 ، معلوم می‌شود که، جمله اول تصاعد، یا برابر ۱۱ است و یا به یکی از صورت‌های زیر:

$$2 \times 11 \times 13l + 23 = 286l + 23, \quad 286l + 45, \quad 286l + 67,$$

$$286l + 155, \quad 286l + 177, \quad 286l + 199$$

چون $a_1 < 1110$ ، تنها باید عددهای زیر را برای a_1 مورد آزمایش

قراردهیم:

$$\begin{aligned}
 & ۶۷, ۹۰۳, ۶۱۵, ۳۳۱, ۴۵, ۸۸۱, ۵۹۵, ۳۰۹, ۲۳, ۱۱, \\
 & ۴۶۳, ۱۷۷, ۱۰۱۳, ۷۲۷, ۴۴۱, ۱۵۵, ۹۲۵, ۶۳۷, ۳۵۳, \\
 & ۱۰۵۷, ۷۷۱, ۴۸۵, ۱۹۹, ۱۰۳۵, ۷۴۹
 \end{aligned}$$

که از بین آن‌ها، تنها عددهای زیر اول‌اند:

$$\begin{aligned}
 & ۱۹۹, ۴۶۳, ۱۰۱۳, ۷۲۷, ۳۵۳, ۶۷, ۳۳۱, ۸۸۱, ۲۳, ۱۱, \\
 & \text{اگر } ۱۰ \text{ تصاعد متناظر با این } ۱۰ \text{ عدد را مورد آزمایش قرار دهیم،} \\
 & \text{متوجه می‌شویم که تنها یکی از آن‌ها، در شرط‌های مساله صدق می‌کنند:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ۱۶۶۹, ۱۴۵۹, ۱۲۴۹, ۱۰۳۹, ۸۲۹, ۶۱۹, ۴۰۹, ۱۹۹, \\
 & ۲۰۸۹, ۱۸۷۹
 \end{aligned}$$

(b) با روشی کاملاً شبیه مساله ۹۵-a حل می‌شود. در این جا هم، نتیجه می‌گیریم که، اگر a_1 مخالف ۱۱ باشد، قدرنسبت تصاعد مضربی است از $۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱$ ، یعنی ۲۳۱۰، یعنی $d = ۲۳۱۰k$. بنابراین

$$a_{11} = a_1 + ۲۳۱۰۰k > ۲۰۰۰۰$$

تنها این می‌ماند که $a = ۱۱$ را مورد آزمایش قرار دهیم. در این حالت، تنها می‌توان فرض کرد $d = ۲۱۰k$. با توجه به برابری $۲۱۰ = ۱۳ \times ۱۶ + ۲$ داریم:

$$\begin{aligned}
 a_{m+1} &= ۱۱ + (۱۳ \times ۱۶ + ۲)km = ۱۳(۱۶km + ۱) + \\
 &+ ۲(km - ۱)
 \end{aligned}$$

اگر k برابر یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، باشد، می‌توان $m < ۱۰$ را طوری پیدا کرد که $km - ۱$ مضربی از ۱۳ باشد که، در نتیجه، a_{m+1} بر ۱۳ بخش‌پذیر می‌شود (و این ممکن نیست، زیرا a_{m+1} عددی است اول). وقتی k را برابر یکی از عددهای از ۱ تا ۱۰ (به جز ۶)

بگیریم، برای m ، به ترتیب، این عددها به دست می‌آید:

$$۴، ۳، ۵، ۲، ۸، ۱۰، ۹، ۷، ۱$$

به ازای $k=۶$ داریم:

$$d=۲۱۰ \times ۶=۱۲۶۰$$

و در این صورت

$$a_۴=۱۱+۳ \times ۱۲۶۰=۳۷۹۱$$

که بر ۱۷ بخش پذیر است.

به این ترتیب، اگر $a_۱=۱۱$ ، آن وقت $k>۱۰$ و $d>۲۱۰۰$ ، و دوباره به دست می‌آید:

$$a_{۱۰}>۲۰۰۰۰۰$$

یادداشت. در حل مسأله $(a-۹۵)$ و (b) ، «عدد اول» را به معنای عادی آن در نظر گرفتیم و فرض را بر این گذاشتیم که، جمله‌های تصاعد، عددهایی مثبت‌اند. اگر این فرض را کنار بگذاریم و «عدد اول» را هر عدد درستی مثل n بدانیم که به جز ± ۱ و $\pm n$ ، مقسوم علیه دیگری نداشته باشد، آن وقت مسأله $(b-۹۵)$ هم دارای جواب خواهد بود. نمونه‌ای از این جواب، چنین است:

$$۱۴۵۹، ۱۲۴۹، ۱۰۳۹، ۸۲۹، ۶۱۹، ۴۰۹، ۱۹۹، ۱۱-$$

$$۱۶۶۹، ۱۸۷۹، ۲۰۸۹$$

۰.۹۶ (a) اگر دو عدد متمایز، اختلافی بیش از ۴ نداشته باشند، آن وقت این دو عدد نمی‌توانند مقسوم علیه مشترکی بزرگتر از ۴ داشته باشند. بنابراین، دو عدد از بین پنج عدد درست متوالی وجود دارد که یا مقسوم علیه مشترکی برابر ۲ یا ۳ دارند و یا نسبت به هم اول‌اند. علاوه بر این، بین این پنج عدد، دست کم دو عدد فرد وجود دارد که، دست کم یکی از آن‌ها، مضرب ۳ نیست، همین عدد، نسبت به چهار عدد دیگر اول است.

(b) راه حل شبیه راه حل قبلی، ولی اندکی پیچیده‌تر است. اگر دو عدد

با هم برابر نباشند و اختلاف آن‌ها، حداکثر برابر ۱۵ باشد آن وقت دو عدد نمی‌توانند مقسوم علیه مشترکی بزرگتر از ۱۵ داشته باشد. بنابراین، برای اثبات قضیه، کافی است ثابت کنیم، در بین این ۱۶ عدد درست متوالی، عددی پیدا می‌شود که با هر یک از عددهای دیگر، مقسوم علیه مشترکی برابر ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۳ ندارد؛ چنین عددی نسبت به همه عددهای دیگر، اول خواهد بود.

۸ عدد زوج را از بین ۱۶ عدد مفروض، کنار می‌گذاریم؛ بقیه عددها، دنباله‌ای شامل ۸ عدد فرد تشکیل می‌دهند. در بین این ۸ عدد فرد متوالی، یا عددهای ردیف‌های ۱، ۴، ۷، یا عددهای ردیف‌های ۲، ۵، ۸ و یا عددهای ردیف‌های ۳ و ۶ بر ۳ بخش پذیرند. از بین این ۸ عدد فرد متوالی، دو عدد ردیف‌های ۱ و ۶، یا دو عدد ردیف‌های ۲ و ۷، یا دو عدد ردیف‌های ۳ و ۸ و یا تنها یک عدد بر ۵ بخش پذیرند. به همین ترتیب، از بین این ۸ عدد فرد متوالی، یا دو عدد ردیف‌های ۱ و ۸ و یا فقط یکی از عددها، بر ۷ بخش پذیر است. ولی در هر حال، بیش از یک عدد مضرب ۱۱ یا مضرب ۱۳ وجود ندارد. اگر در بین این ۸ عدد فرد متوالی، بیش از ۵ عدد، بخش پذیر بر ۳، یا بر ۵ یا بر ۷ وجود داشته باشد، آن وقت در بین این ۸ عدد، عددی پیدا می‌شود که بر ۳، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر نیست؛ و این، همان عددی است که نسبت به همه عددهای دیگر اول است. اکنون همه حالت‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که، در بین این ۸ عدد فرد متوالی، دست کم ۶ عدد بخش پذیر بر ۳، یا بر ۵ و یا بر ۷ وجود داشته باشد.

فرض کنید، در بین ۸ عدد فرد متوالی، سه عدد بخش پذیر بر ۳ وجود داشته باشد در این صورت، تنها وقتی دو عدد دیگر (از بین پنج عددی که بر ۳ بخش پذیر نیستند) بر ۵ بخش پذیر می‌شوند که از دو عدد مرزی (کوچکترین و بزرگترین عدد از ۸ عدد فرد متوالی)، یکی مضرب ۳ باشد و دیگری مضرب ۵. اگر این پنج عدد را کنار بگذاریم، به دنباله‌ای می‌رسیم که یا شامل عددهای ردیف‌های ۲، ۵ و ۶ و یا شامل عددهای ردیف‌های ۳، ۴ و ۷ است. با حالت اول آغاز می‌کنیم. دومین، پنجمین و ششمین عدد فرد، در بین

۱۶ عدد درست متوالی اولیه، ردیف‌های ۴، ۱۵ و ۱۲ و یا ۳، ۹ و ۱۱ را اشغال می‌کنند. هیچ کدام از این سه عدد، مقسوم‌علیه مشترکی برابر ۱۳ با هریک از ۱۵ عدد دیگر ندارند، زیرا هریک از ۱۵ عدد با هریک از این سه عدد، اختلافی کمتر از ۱۳ دارند. چون این سه عدد بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر نیستند، دست کم یکی از آن‌ها (و مثلاً آن که بر ۷ و ۱۱ بخش‌پذیر نیست)، نسبت به هریک از ۱۵ عدد دیگر اول است. با روشی کاملاً مشابه، می‌توان ثابت کرد که، وقتی با کنار گذاشتن عددهای بخش‌پذیر بر ۳ یا ۵، سومین، چهارمین و هفتمین عدد از دنباله ۸ عدد فرد متوالی باقی می‌ماند، باز هم دست کم یکی از آن‌ها نسبت به هریک از ۱۵ عدد دیگر، اول است.

وقتی در بین ۸ عدد فرد متوالی، سه عدد مضرب ۳ وجود داشته باشد، آن وقت، در بین پنج عدد دیگر، دو عدد پیدا نمی‌شود که مضرب ۷ باشند. وقتی که تنها دو عدد، یعنی عددهای ردیف سوم و ششم، از بین ۸ عدد فرد متوالی، مضربی از ۳ باشند، آن وقت از بین شش عدد باقی‌مانده، تنها ممکن است عددهای ردیف اول و هشتم مضربی از ۷، و عددهای ردیف دوم و هفتم مضربی از ۵ باشند. با کنار گذاشتن این شش عدد، دو عدد ردیف‌های چهارم و پنجم باقی می‌مانند که بر ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیر نیستند. هریک از این دو عدد، نسبت به هریک از ۱۵ عدد اول‌اند، زیرا هریک از این دو عدد، با هریک از ۱۵ عدد بقیه، اختلافی کمتر از ۱۱ دارند و، بنابراین، نمی‌توانند مقسوم‌علیه مشترکی برابر ۱۱ یا ۱۳ داشته باشند.

به این ترتیب، در بین هر ۱۶ عدد متوالی، دست کم یک عدد پیدا می‌شود که نسبت به ۱۵ عدد دیگر، اول است.

یادداشت. با همین روش می‌توان ثابت کرد که، اگر تعداد عددهای متوالی کمتر از ۱۶ باشد، همیشه می‌توان در بین آن‌ها، عددی را پیدا کرد که نسبت به هریک از دیگر عددها، اول باشد. ولی این حکم، برای ۱۷ عدد متوالی برقرار نیست. مثلاً در بین ۱۷ عدد متوالی از ۱۱۸۴ تا ۱۲۰۰، نمی‌توان عددی را پیدا کرد که نسبت به هریک از ۱۶ عدد دیگر اول باشد. به طور کلی، اگر تعداد عددهای متوالی از ۱۶ بیشتر باشد، می‌توان مثالی

پیدا کرد که، در آن، عددی وجود نداشته باشد، به نحوی که نسبت به هر يك از عددهای دیگر، اول باشد. ولی تا آن جا که ما می دانیم، هنوز اثباتی برای این حکم کلی پیدا نشده است.

۹۷. عدد مجهول $A.B$ برابر است با حاصل ضرب $A_1.B_1$ که، در آن، A_1 از ۶۶۶ رقم برابر ۹، و B_1 از ۶۶۶ رقم برابر ۲ تشکیل شده است. عدد A_1 را می توان به صورت $10^{666} - 1$ در نظر گرفت. بنابراین

$$A.B = A_1.B_1 = (10^{666} - 1)B_1 = B_1.10^{666} - B_1$$

روشن است که

$$B_1.10^{666} = \underbrace{22 \dots 2}_{\text{رقم } 666} \underbrace{00 \dots 0}_{\text{رقم } 666}$$

و بنابراین

$$A.B = \underbrace{22 \dots 2}_{\text{رقم } 666} \underbrace{77 \dots 78}_{\text{رقم } 666}$$

۹۸. عدد ۷۷۷۷۷۷ بر ۱۰۰۱ بخش پذیر است و خارج قسمت تقسیم برابر است با ۷۷۷. بنابراین از تقسیم عدد $77 \dots 700000$ بر ۱۰۰۱، $\underbrace{77 \dots 700000}_{\text{رقم } 996}$

خارج قسمتی برابر

$$\underbrace{777000777000 \dots 777000}_{\text{عدد } 777000 \text{ به تعداد } 166 \text{ بار}}$$

می رسیم. علاوه بر این، چون در تقسیم عدد ۷۷۷۷۷ بر ۱۰۰۱، خارج قسمت برابر ۷۷ و باقی مانده برابر ۷۰۰ است، بنابراین خارج قسمت تقسیم عدد A بر ۱۰۰۱ برابر

$$\underbrace{777000777000 \dots 777000}_{\text{عدد } 777000 \text{ به تعداد } 166 \text{ بار}}$$

و باقی مانده تقسیم برابر با ۷۰۰ می‌شود.

۰۹۹ عدد ۲۲۲۲۲۲ مجذور کامل نیست. عدد مجهول را به صورت

$$\overline{222222a_7a_8 \dots a_n}$$

در نظر می‌گیریم (تعداد رقم‌های عدد را، n فرض کرده‌ایم). ابتدا فرض می‌کنیم، n عددی زوج باشد: $n = 2k$. از عدد، طبق قاعده معمول، جذرمی گیریم:

$$\sqrt{222222a_7a_8 \dots a_{2k-1}a_{2k}} = 471405$$

۱۶	
۸۷	۶۲۲
۷	۶۰۹
۹۴۱	۱۳۲۲
۱	۹۴۱
۹۴۲۴	۳۸۱۰ a_7a_8
۴	۳۷۶۹۶
۹۴۲۸۰۵	$x_1x_2x_3a_9a_{10}a_{11}a_{12}$
۵	۴۷۱۴۰۲۵

(رقم پنجم حاصل جذر، برابر صفر است، زیرا روشن است که مقدار x_1 برابر است با ۴ یا ۵، یعنی از ۹ کمتر است؛ با همین شیوه استدلال، معلوم می‌شود که رقم ششم جذر، برابر است با ۵).

عدد وقتی مجذور کامل است که باقی مانده عمل جذر، برابر صفر باشد،

یعنی داشته باشیم:

$$a_9 = 4, a_{10} = 0, a_{11} = 2, a_{12} = 5, x_1 = 4, x_2 = 7, x_3 = 1$$

که از آن‌جا، به سادگی به دست می‌آید:

$$a_8 = 6 + 1 = 7, a_7 = (7 + 9) - 10 = 6$$

به این ترتیب، کوچکترین عددی که با شش رقم برابر ۲ آغاز شود (تعداد

رقم هایش زوج باشد و، در ضمن، مجذور کامل باشد) چنین است:

$$۲۲۲۲۲۲۶۷۴۰۲۵ = ۴۷۱۴۰۵^2$$

در حالتی که n عددی فرد باشد، شبیه حالت قبل داریم:

$$\sqrt{۲۲۲۲۲۲a_7a_8a_9 \dots a_{2k}a_{2k+1}} = ۱۴۹۰۷۱ \dots$$

	۱	
۲۴	۱۲۲	
۴	۹۶	
۲۸۹	۲۶۲۲	
۹	۲۶۰۱	
۲۹۸۰۷	۲۱۲ $a_7a_8a_9$	
۷	۲۰۸۹۴۹	
۲۹۸۱۴۱	$x_1x_2x_3x_4a_{10}a_{11}$	
	۱ ۲ ۹ ۸ ۱ ۴ ۱	
۲۹۸۱۴۲	$x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}a_{12}a_{13}$	

چون عدد شامل x_1 و x_2 از $۱۱۹ - ۸۶ = ۳۳$ کمتر و از $۱۲۹ - ۸۶ = ۴۳$ بیشتر نیست، بنابراین رقم ششم جذر برابر واحد است، ولی عمل جذر گرفتن در این جا تمام نمی شود و باید آن را ادامه داد. بنابراین کوچکترین عددی که با شش رقم برابر ۲ آغاز شود (تعداد رقم هایش فرد باشد و، در ضمن، عددی مجذور کامل باشد) نمی تواند کمتر از ۱۳ رقم داشته باشد، یعنی از عددی که قبلا به دست آورده ایم، بزرگتر است:

جواب مساله، عبارت است از عدد ۲۲۲۲۲۲۶۷۴۰۲۵

۱۰۰۰ از برای $۱۹۵۴ = n^2 + m^2$ نتیجه می شود که، یا هر دو عدد m^2 و n^2 زوج و یا هر دو ی آن ها فردند؛ بنابراین m و n با هم زوج و یا با هم فردند. برابری فرض مساله را می توان به صورت

$$(m+n)(m-n) = ۱۹۵۴$$

نوشت. هر دو عامل $m - n$ و $m + n$ زوج‌اند و، بنابراین، حاصل ضرب آن‌ها بر ۴ بخش‌پذیر است، در حالی که ۱۹۵۴ بر ۴ بخش‌پذیر نیست؛ یعنی نمی‌توان عددهای درستی برای m و n پیدا کرد، به نحوی که برابری مفروض برقرار باشد.

۱۰۱. می‌خواهیم عدد شش رقمی حاصل، بر $7 \times 8 \times 9 = 504$ بخش‌پذیر باشد. عدد شش رقمی حاصل را می‌توان به صورت $523000 + X$ نوشت که، در آن، X ، عددی است سه رقمی. از تقسیم 523000 بر 504 به دست می‌آید:

$$523000 = 504 \times 1037 + 352$$

یعنی از تقسیم 523000 بر 504 ، باقی‌مانده‌ای برابر ۳۵۲ به دست می‌آید. مجموع دو عدد 523000 و X باید بر 504 بخش‌پذیر باشد، بنابراین عدد سه رقمی X تنها می‌تواند یکی از دو عدد زیر باشد:

$$504 - 352 = 152 \text{ یا } 2 \times 504 - 352 = 656$$

(از تفاضل $3 \times 504 - 352$ ، عددی چهاررقمی به دست می‌آید).

پاسخ: ۵۲۳۱۵۲ و ۵۲۳۶۵۶.

۱۰۲. اگر عدد چهاررقمی مجهول را N بگیریم، باید داشته باشیم:

$$N = 131k + 112 = 132l + 98$$

که در آن، k و l عددهایی درست و مثبت‌اند. چون N عددی است چهار رقمی، باید این نابرابری برقرار باشد:

$$1 = \frac{N - 98}{132} < \frac{10000 - 98}{132} \leq 75$$

از طرف دیگر از برابری $131k + 112 = 132l + 98$ به دست می‌آید:

$$131(k - l) = l - 14$$

$k - l$ نمی‌تواند مخالف صفر باشد، زیرا با شرط $k - l \neq 0$ ، قدر مطلق عدد

۱۴- l از ۱۳۰ بیشتر می‌شود، درحالی که $l \leq 75$. بنابراین $k=l$ در نتیجه

$$l-14=0 \Rightarrow k=l=14$$

و برای خود عدد N خواهیم داشت:

$$N=131 \times 14 + 112 = 132 \times 14 + 98 = 1946$$

(a. ۱۰۳) عدد $2n$ رقمی را که در صورت مساله به عنوان مجموع همه عددهای n رقمی داده شده است، می‌توان به این صورت تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} & 4 \times 10^{2n-1} + 9 \times 10^{2n-2} + 4 \times 10^{2n-3} + 9(10^{2n-4} + 10^{2n-5} + \\ & + \dots + 10^n) + 5 \times 10^{n-1} + 5 \times 10^{n-2} = 4 \times 10^{2n-1} + 9 \times \\ & \times 10^{2n-2} + 4 \times 10^{2n-3} + 9 \times 10^n \frac{10^{n-3}-1}{9} + 5 \times 10^{n-1} + \\ & + 5 \times 10^{n-2} = 4 \times 10^{2n-1} + 9 \times 10^{2n-2} + 5 \times 10^{2n-3} - 10^n + \\ & + 5 \times 10^{n-1} + 5 \times 10^{n-2} = \frac{1}{4}(8 \times 10^{2n-1} + 18 \times 10^{2n-2} + \\ & + 10 \times 10^{2n-3} - 2 \times 10^n + 10^n + 10^{n-1}) = \frac{1}{4}(9 \times 10^{2n-1} + 9 \times \\ & \times 10^{2n-2} - 9 \times 10^{n-1}) = \frac{[(10^n-1) + 10^{n-1}] \times 9 \times 10^{n-1}}{4} \end{aligned}$$

کسر حاصل، برابر است با مجموع جمله‌های يك تصاعد حسابی با قدرنست برابر ۱؛ جمله اول برابر 10^{n-1} و جمله آخر برابر $10^n - 1$ (تعداد جمله‌های این تصاعد، به سادگی به دست می‌آید: $10^n - 10^{n-1} = 9 \times 10^{n-1}$). یعنی این کسر، برابر است با مجموع همه عددهای n رقمی.

(b) عددهای چهاررقمی را در نظر می‌گیریم که با رقم a آغاز شده باشند (a می‌تواند یکی از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد). تعداد این عددها برابر است با

$$6 \times 6 \times 3 = 108$$

(چون رقم‌های دوم و سوم، می‌توانند هریک از شش رقم ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشند، درحالی‌که به‌دلیل زوج بودن عدد، رقم چهارم تنها یکی از سه رقم ۱، ۲ یا ۴ را قبول می‌کند). از این‌جا نتیجه می‌شود که مجموع همه هزارگان‌ها در همه عددهای مجهول، برابر است با

$$(1+2+3+4+5) \times 108 \times 1000 = 1620000$$

به همین ترتیب، تعداد عددهای چهار رقمی، با فرض ثابت بودن رقم دوم آن‌ها، برابر است با $5 \times 6 \times 3 = 90$. به این ترتیب، مجموع صدگان‌ها در همه این عددها (بدون توجه به مجموع هزارگان‌ها) برابر می‌شود با

$$(1+2+3+4+5) \times 90 \times 100 = 135000$$

با همین روش، مجموع همه دهگان‌ها برابر است با

$$(1+2+3+4+5) \times 9 \times 10 = 13500$$

و مجموع همه یکان‌ها برابر $1080 = 1 \times 6 \times 6 \times 5 \times (2+4)$ می‌شود. بنابراین، مجموع موردنظر، برابر است با

$$1620000 + 135000 + 13500 + 1080 = 1769580$$

۱۰۴. همه عددهای درست از ۰ تا ۹۹۹۹۹۹ را در نظر می‌گیریم.

در ضمن، هر عددی را، که کمتر از هشت رقم داشته باشد، با قراردادن تعدادی صفر درست چپ آن (به تعدادی که لازم است)، به صورت عددی هشت رقمی درمی‌آوریم. به این ترتیب، با ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ عدد هشت رقمی سروکار پیدا می‌کنیم و، روشن است که، برای نوشتن آن‌ها به ۸۰۰۰۰۰۰۰۰ رقم نیاز داریم. وقتی که عددها را به این صورت نشان دهیم (یعنی با قراردادن صفرها، درست چپ، همه عددها را به صورت هشت رقمی درآوریم)، از همه رقم‌ها به صورتی یکسان استفاده می‌شود و، بنابراین، تعداد کاربرد هریک از ۱۰ رقم با تعداد کاربرد هر رقم دیگری، برابر است؛ یعنی از هر رقم درست، ۸۰۰۰۰۰۰۰۰ بار استفاده شده است.

حالا به محاسبه تعداد صفرهای اضافی می‌پردازیم (صفرهایی که درست چپ بعضی از عددها قرار داده‌ایم تا به صورت عددی هشت رقمی درآیند).

تنها ۹ عدد يك رقمی وجود دارد (در این جا، عدد ۰ را به حساب نیاورده‌ایم)؛
 $9 = 9 - 99$ عدد دو رقمی؛ $900 = 99 - 999$ عدد سه رقمی و غیره. هر
 عدد يك رقمی را با ۷ صفر، هر عدد دو رقمی را با ۶ صفر، هر عدد سه رقمی
 را با ۵ صفر و غیره کامل کرده‌ایم. بنابراین، تعداد همهٔ صفرهای اضافی،
 چنین می‌شود:

$$7 \times 9 + 6 \times 90 + 5 \times 900 + 4 \times 9000 + 3 \times 90000 + 2 \times 900000 + 1 \times 9000000 = 1111103$$

اکنون اگر درست چپ عدد ۰۰۰۰۰۰۰۰ (که در محاسبهٔ تعداد صفرهای
 اضافی، آن را کنار گذاشتیم)، رقم ۱ را بگذاریم تا عدد ۱۰۰۰۰۰۰۰۰
 به دست آید، تنها به تعداد رقم‌های برابر ۱، يك واحد اضافه می‌شود. به این
 ترتیب، برای نمایش دهدهی این عددها، به
 ۸۰۰۰۰۰۰۰۰ رقم برابر ۲، ۳، ...، ۹؛
 ۸۰۰۰۰۰۰۰۱ رقم برابر ۱؛

و $98888897 = 1111103 - 800000000$ رقم برابر صفر احتیاج
 داریم.

۹۰۱۰۵ عدد يك رقمی، ۹۰ عدد دو رقمی، ۹۰۰ عدد سه رقمی، ... و
 به‌طور کلی $9 \times 10^{n-1}$ عدد n رقمی وجود دارد.

عددهای يك رقمی، ۹ ردیف اول (از سمت چپ)، عددهای دو رقمی
 90×2 ، یعنی ۱۸۰ ردیف بعدی، عددهای سه رقمی ۲۷۰۰ ردیف بعدی،
 عددهای چهار رقمی ۳۶۰۰۰ ردیف بعدی و بالاخره، عددهای پنج رقمی،
 ۴۵۰۰۰۰ ردیف بعدی را اشغال می‌کنند. بنابراین، رقم مورد نظر ما،
 متعلق به یکی از عددهای پنج رقمی است.

رقم‌های مربوط به عددهایی که بیش از چهار رقم ندارند، مکان‌های از
 ردیف ۱ تا ردیف

$$9 + 180 + 2700 + 36000 = 38889$$

را اشغال می‌کنند. بینیم از ردیف (۳۸۸۸۹) ام تا ردیف (۲۰۶۷۸۸) ام، چند عدد پنج رقمی قرار دارد؟ داریم:

$$۲۰۶۷۸۸ - ۳۸۸۸۹ = ۵ \times ۳۳۵۷۹ + ۴$$

به این ترتیب، رقم مورد نظر مساله، متعلق به (۳۳۵۸۰) امین عدد پنج رقمی، یعنی متعلق به عدد ۴۳۵۷۹ می‌باشد (اولین عدد پنج رقمی، برابر ۱۰۰۰۰ است)؛ و ما به چهارمین رقم این عدد کار داریم (چهارمین رقم از سمت چپ)، یعنی با رقم ۷.

۱۶۰. فرض می‌کنیم، عدد $۵/۱۲۳۴...$ ، عدد دهدهی متناوب باشد، به نحوی که دوره تناوب آن شامل n رقم و تعداد رقم‌های قبل از دوره تناوب برابر k رقم باشد.

عدد $N = ۱۰^m$ را در نظر می‌گیریم که، در آن، عدد طبیعی m ، از $n+k$ کوچکتر نباشد. نمایش دهدهی این عدد، از یک رقم ۱ و به تعداد m رقم صفر در سمت راست آن، تشکیل شده است. چون همه عددهای درست متوالی را، با آغاز از عدد ۱، بعد از ممیز نوشته‌ایم، بنابراین در جایی به عدد N هم می‌رسیم. عدد دهدهی $۵/۱۲۳...۰$ را متناوب فرض کردیم و، در ضمن، $m \geq n+k$ ؛ به این ترتیب در جایی با m صفر در کنار هم، مواجه شده‌ایم که، به ناچار، باید شامل رقم‌های دوره تناوب باشد. ولی این رقم‌ها، همگی برابر صفرند، در حالی که رقم‌های دوره تناوب، نمی‌توانند همگی برابر صفر باشند. تناقض حاصل، به معنای آن است که عدد دهدهی $۵/۱۲۳...۰$ دوره تناوب ندارد.

۱۰۷. می‌دانیم، باقی‌مانده حاصل از تقسیم یک عدد بر ۹، برابر است با باقی‌مانده حاصل از تقسیم مجموع رقم‌های این عدد بر ۹. بنابراین، اگر باقی‌مانده حاصل از تقسیم یک عدد بر ۹ را برابر r بگیریم، بعد از آن که، پشت سر هم، به جای عدد مجموع رقم‌های آن را قرار دهیم، سر آخر، در حالت $r \neq ۰$ به عدد یک رقمی r در حالت $r = ۰$ به عدد یک رقمی ۹ می‌رسیم. به این ترتیب، با انجام عمل مورد نظر مساله، عددهای

$$۱, ۱۰, ۱۹, ۲۸, ۳۷, \dots, ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰$$

منجر به عدد يك رقمی ۱، و عددهای

$$۲, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ۳۸, \dots, ۹۹۹۹۹۹۹۲$$

منجر به عدد يك رقمی ۲ می‌شوند. روشن است که تعداد عددهای گروه اول، يك واحد بیشتر از تعداد عددهای گروه دوم است؛ یعنی در دنباله حاصل از عمل مورد نظر مساله، تعداد عضوهای برابر ۱، يك واحد بیشتر از تعداد عضوهای برابر ۲ است.

۱۰۸. a) پاسخ منفی است. اگر عدد $N = n^2$ به صفرهایی ختم شده باشد، باید تعداد این صفرها عددی زوج باشد و، در ضمن، عدد N_1 که از N با حذف این صفرها به دست می‌آید و به رقمی برابر ۶ ختم شده است، باز هم مجذور کامل باشد. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، عددی که تنها شامل رقم‌های ۰ و ۶ است و، در ضمن، به رقم ۶ ختم شده نمی‌تواند برابر مجذور يك عدد درست باشد. در واقع دو رقم سمت راست چنین عددی، برابر ۰۶ یا ۶۶ است، یعنی بر ۲ بخش پذیر و بر ۴ بخش ناپذیر است، یعنی نمی‌تواند مجذور کامل باشد.

b) پاسخ منفی است. وقتی مجذور يك عدد درست به ۵ ختم شود، خود عدد هم به ۵ ختم می‌شود. اگر $N = n^2$ ، آن وقت $n = ۱۰n_1 + ۵$ و

$$\begin{aligned} n^2 &= (10n_1 + 5)^2 = 100n_1^2 + 100n_1 + 25 = \\ &= 100n_1(n_1 + 1) + 25 \end{aligned}$$

یعنی عدد N به ۲۵ ختم می‌شود؛ $N = ۱۰۰N_1 + ۲۵$ و داریم $N_1 = n_1(n_1 + 1)$

$n_1(n_1 + 1)$ به ۰ یا ۲ یا ۶ ختم می‌شود، زیرا n_1 و $n_1 + 1$ دو عدد متوالی‌اند و، در ضمن

$$0 \times 1, \quad 4 \times 5, \quad 5 \times 6, \quad 9 \times 0$$

به رقم صفر ختم می‌شوند و

$$1 \times 2, \quad 3 \times 4, \quad 6 \times 7, \quad 8 \times 9$$

به رقم ۲ ختم و ۲×۳ و ۷×۸ به رقم ۶ ختم می‌شوند. بنابراین رقم سمت راست $N_۱$ تنها می‌تواند رقم ۶ باشد، زیرا N که مجذور کامل است نمی‌تواند به سه رقم ۰۲۵ یا ۲۲۵ ختم شده باشد (عدد N شامل رقم ۰ نیست و، در ضمن، از رقم ۲ تنها یک بار باید استفاده کنیم). به این ترتیب $N = ۱۰۰۰N_۲ + ۶۲۵$. عددهای ۱۰۰۰ و ۶۲۵ بر ۱۲۵ بخش پذیرند، یعنی N مضربی است از $۱۲۵ = ۵^3$. ولی N باید مجذور کامل باشد، بنابراین باید بر $۶۲۵ = ۵^4$ بخش پذیر شود، چون N مضربی است از ۵^4 ، بنابراین، عدد $N - ۶۲۵ = ۱۰۰۰N_۲$ هم بر ۵^4 بخش پذیر است، یعنی $N_۲$ مضربی است، از ۵. و این به معنای آن است که نمایش دهدهی عدد N باید به چهار رقم ۰۶۲۵ یا ۵۶۲۵ ختم شده باشد که ممکن نیست، زیرا در نمایش دهدهی عدد، N ، رقم ۰ وجود ندارد و از رقم ۵ هم، تنها یکبار می‌توان استفاده کرد.

۱۰۹. برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم که، عدد ۴۴۴۴۵ رقمی A که از پشت سرهم نوشتن عددهای پنج رقمی $a_۱, a_۲, \dots, a_{۸۸۸۸۹}$ به دست آمده است، بر عدد دیگری غیر از ۲ بخش پذیر است. به سادگی می‌توان روشن کرد، عدد A ، بر عدد ۱۱۱۱۱ قابل بخش است. در واقع عدد

$$A = \overbrace{a_۱ a_۲ a_۳ \dots a_{۸۸۸۸۷} a_{۸۸۸۸۸} a_{۸۸۸۸۹}}$$

را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} A &= a_{۸۸۸۸۹} + a_{۸۸۸۸۸} \cdot ۱۰^۵ + a_{۸۸۸۸۷} \cdot ۱۰^{۱۰} + \dots + a_۱ \cdot ۱۰^{۴۴۴۴۰} = \\ &= (a_۱ + a_۲ + \dots + a_{۸۸۸۸۸} + a_{۸۸۸۸۹}) + a_{۸۸۸۸۸}(۱۰^۵ - ۱) + \\ &\quad + a_{۸۸۸۸۷}(۱۰^{۱۰} - ۱) + \dots + a_۱(۱۰^{۴۴۴۴۰} - ۱) \quad (*) \end{aligned}$$

مجموع عددهای طبیعی $a_۱, a_۲, \dots, a_{۸۸۸۸۹}$ برابر است با

$$\begin{aligned} &۱۱۱۱۱ + ۱۱۱۱۲ + ۱۱۱۱۳ + \dots + ۹۹۹۹۹ = \\ &= \frac{۱۱۱۱۱ + ۹۹۹۹۹}{۲} \times ۸۸۸۸۹ = ۱۱۱۱۱ \times ۵ \times ۸۸۸۸۹ \end{aligned}$$

همه جمله‌های دیگر درست‌راست برابری (*) هم بر ۱۱۱۱۱ بخش پذیرند، زیرا به ازای هر عدد طبیعی k ، عدد $1 - (10^5)^k$ بر $1 - 10^5$ ، یعنی بر عدد $99999 = 9 \times 11111$ بخش پذیر است. به این ترتیب، A مضربی است از ۱۱۱۱۱.

۱۱۰. عدد مجهول را $X = \overline{a_0 a_1 a_2 \dots a_9}$ می گیریم. بنا بر شرط مسأله، a_0 برابر است با تعداد صفرهایی که در عدد X وجود دارد، برابر تعداد رقم‌های ۱، a_1 برابر تعداد رقم‌های ۲ و غیره. بنابراین، مجموع همه رقم‌های عدد X برابر است با

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_9 = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + \dots + a_9 \cdot 9$$

از آن جا

$$a_0 = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 + 6a_7 + 7a_8 + 8a_9 \quad (*)$$

بنابر شرط مسأله $a_0 \neq 0$ ، والا عدد X ده رقمی نمی شود (به جز این، از برابری (*) هم روشن است که a_0 نمی تواند برابر صفر باشد). اگر $a_0 = 1$ ، آن وقت $a_0 = a_2 = 1$ و همه دیگر رقم‌ها، به جز a_1 ، برابر صفر می شوند؛ و این ممکن نیست (وقتی a_0 برابر ۱ باشد، یعنی در تمام عدد X باید یک رقم برابر صفر وجود داشته باشد. [در ضمن، چون عدد X ده رقمی است و $a_1, a_2, \dots, a_9$ باید در مجموع خود، معرف تعداد رقم‌های X باشند، با فرض $a_0 = 1$ به دست می آید $a_1 = 8$].

اگر $a_0 = 2$ ، با توجه به (*)، یا $a_0 = a_2 = 2$ و یا $a_0 = 2$ ، $a_3 = 1$ ؛ در حالت اول $a_1 = 6$ و در حالت دوم $a_1 = 7$ به دست می آید (زیرا، همه رقم‌های دیگر باید برابر صفر باشند) که باز هم غیر ممکن است. اکنون فرض می کنیم $a_0 = i > 2$. برابری (*) را می توان این طور نوشت:

$$a_0 = i = a_2 + 2a_3 + \dots + (i-1)a_i + \dots + 8a_9 \quad (**)$$

(اگر $i = 3$ ، آن وقت جمله‌های $2a_3$ و $(i-1)a_i$ بر هم منطبق اند، و اگر $i = 9$ ، آن وقت جمله $(i-1)a_i$ همان جمله $8a_9$ است). در این جا، a_i

برابر است با تعداد رقم‌های i که در عدد X وجود دارد. $a_i \neq 0$ ، زیرا $a_0 = i$ ؛ از طرف دیگر، برابری $(**)$ نمی‌تواند برای $a_i > 1$ برقرار باشد، بنابراین $a_i = 1$ ؛ در نتیجه برابری $(**)$ به این صورت درمی‌آید:

$$i = a_2 + 2a_3 + \dots + (i-2)a_{i-1} + ia_{i+1} + \dots + 8a_9 \quad (***)$$

از $(***)$ بلافاصله نتیجه می‌شود $a_2 = 1$ و همه رقم‌های عدد X ، به جز a_0, a_1, a_2, a_i برابر با صفرند. چون $a_2 = 1$ ، بنابراین یکی از رقم‌های X باید برابر ۲ باشد و، روشن است که این رقم، همان a_1 است. بنابراین در عدد X ، تنها رقم‌های $a_0 = i, a_1 = 2, a_2 = 1$ و $a_i = 1$ مخالف صفرند. عدد X دارای ۶ رقم برابر صفر است، پس $a_0 = 6$ و در ضمن $i = 6$.

پاسخ: $X = 6210001000$.

$$A = 999999999 = 1000000000 - 1 \quad ۱۱۱$$

حاصل ضرب AX را می‌توان به این صورت نوشت:

$$AX = 10^9 \cdot X - X = \overline{x_1 x_2 \dots x_k 000000000} - \overline{x_1 x_2 \dots x_k}$$

که در آن $X = \overline{x_1 x_2 \dots x_k}$ عدد طبیعی است. می‌خواهیم X را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_k 000000000} - \overline{x_1 x_2 \dots x_k} = 11 \dots 1111$$

از این‌جا به دست می‌آید:

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_k 000000000} - 11 \dots 1111 = \overline{x_1 x_2 \dots x_k}$$

جمله‌های تفریق را به صورت ستونی زیرهم می‌نویسیم و رقم‌های حاصل در تفاضل را، به همان ترتیبی که به دست می‌آیند از راست به چپ، درست چپ صفرهای مفروض، به ترتیب، به جای $x_k, x_{k-1}, \dots$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} \dots 778 \dots 889 \quad 000 \quad 000 \quad 000 \quad - \\ 111 \dots 111 \quad 111 \quad 111 \quad 111 \\ \hline \dots 667 \dots 778 \quad 888 \quad 888 \quad 889 \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \text{رقم ۹} \end{array}$$

عمل تفریق را باید تا آن جا ادامه داد که رقم‌های سمت چپ در X (یعنی تفاضل) برابر صفر شوند. سرانجام به این عدد برای $X = X_0$ می‌رسیم:

$$X_0 = \underbrace{11 \dots 1}_{\text{رقم } 9} \underbrace{22 \dots 2}_{\text{رقم } 9} \underbrace{33 \dots 3}_{\text{رقم } 9} \dots \underbrace{77 \dots 7}_{\text{رقم } 9} \underbrace{88 \dots 8}_{\text{رقم } 8}$$

که عددی ۷۲ رقمی است ($9 \times 7 + 8 + 1 = 82$).

روشن است که عدد X_0 ، کوچکترین عددی است که اگر در ۹۹۹۹۹۹۹۹ ضرب شود، همه رقم‌های حاصل ضرب برابر ۱ می‌شود. در واقع، اگر ضمن انجام عمل تفریق، کار را متوقف نکنیم، بعد از آن که در سمت چپ X_0 ، به تعداد ۹ رقم برابر صفر ظاهر شود، دوباره رقم‌های X_0 ، از راست به چپ، به دست می‌آیند و برای دومین جواب، به این عدد می‌رسیم:

$$X_1 = \overline{\underbrace{X_0 0 \dots 0}_{\text{رقم } 9} X_0}$$

نماد $\bar{X}_0$ به معنای همه رقم‌های عدد X_0 است. با همین استدلال، می‌توان جواب کلی را به این صورت نوشت:

$$X = X_n = \overline{\underbrace{\bar{X}_0 0 \dots 0}_{\text{رقم } 9} \underbrace{\bar{X}_0 0 \dots 0}_{\text{رقم } 9} \dots \bar{X}_0 \dots \bar{X}_0 0 \dots 0}_{\text{رقم } 9}$$

که در آن، n به معنای تعداد صفرهای نه گانه است ($n = 0, 1, 2, \dots$). تعداد رقم‌های عدد X_n چنین است:

$$72(n+1) + 9n = 91n + 72$$

می‌توان $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \cdot 112$ را عددی n رقمی می‌گیریم. می‌توان فرض کرد $a_1 \neq 0$ ، زیرا اگر صفرهای سمت راست عدد A را حذف کنیم، مجموع رقم‌ها در عدد AN ، تغییر نمی‌کند. اکنون، عدد $99 \dots 9$ $N = 10^m - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{\text{رقم } m}$

را در نظر می‌گیریم، به نحوی که m بر n بخش پذیر باشد. روشن است که مجموع رقم‌های عدد

$$A.N = 10^m A - A = \overbrace{a_n a_{n-1} \dots a_1 00 \dots 0}^{m \text{ رقم}} - a_n a_{n-1} \dots a_1 =$$

$$= a_n a_{n-1} \dots a_2 (a_1 - 1) \underbrace{99 \dots 9}_{m-n \text{ رقم}} (9 - a_n)(9 - a_{n-1}) \dots (9 - a_2)(10 - a_1)$$

با مجموع رقم‌های عدد N یکی است (برابر با $9m$).

۱۱۳. قبل از همه توجه می‌کنیم که، حکم مسأله، برای $m=0$ درست است (در این‌جا، شرط $n \geq 2$ لازم نیست و می‌توانیم $n=1$ بگیریم)، به شرطی که 0° را برابر ۱ بگیریم. مثلاً $n=1$ می‌گیریم. برای همه عددهای یک رقمی زوج $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ و همه عددهای یک رقمی فرد $\beta_1, \beta_2, \dots$ داریم:

$$\alpha_1^\circ + \alpha_2^\circ + \dots = 0^\circ + 2^\circ + 4^\circ + 6^\circ + 8^\circ = 5;$$

$$\beta_1^\circ + \beta_2^\circ + \dots = 1^\circ + 3^\circ + 5^\circ + 7^\circ + 9^\circ = 5$$

اکنون به مقدار بعدی n می‌پردازیم و فرض می‌کنیم $n=2$. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ را همه رقم‌های زوج، $\beta_1, \beta_2, \dots$ را همه رقم‌های فرد، $A_1, A_2, \dots$ را همه عددهایی که مجموع رقم‌های زوج دارند و $B_1, B_2, \dots$ را همه عددهایی که مجموع رقم‌های فرد دارند، فرض می‌کنیم؛ در ضمن، تعداد رقم‌های هر عدد از ۲ تجاوز نمی‌کند. روشن است که هر عدد A_i به صورت $\overline{\alpha_k \alpha_l} = 10\alpha_k + \alpha_l$ و یا به صورت $\overline{\beta_k \beta_l} = 10\beta_k + \beta_l$ و هر عدد B_j به یکی از دو صورت $\overline{\alpha_k \alpha_l} = 10\alpha_k + \alpha_l$ یا $\overline{\beta_k \beta_l} = 10\beta_k + \beta_l$ است. مجموع همه عددهای A_i را $\sum A_i$ و مجموع همه عددهای B_j را با $\sum B_j$ و به همین ترتیب، مجموع همه عددهای α_k را با $\sum \alpha_k$ و مجموع همه عددهای B_l را با $\sum \beta_l$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} \sum A_i &= \sum (10\alpha_k + \alpha_l) + \sum (10\beta_k + \beta_l) = \\ &= 10(\sum \alpha_k + \sum \beta_k) + (\sum \alpha_l + \sum \beta_l); \\ \sum B_j &= \sum (10\alpha_k + \beta_l) + \sum (10\beta_k + \alpha_l) = \\ &= 10(\sum \alpha_k + \sum \beta_k) + (\sum \beta_l + \sum \alpha_l) \end{aligned}$$

که از آن جا نتیجه می‌شود: $\sum A_i = \sum B_j$.

اثبات حکم را در حالت کلی، وقتی n عددی دلخواه باشد، با روش استقرای ریاضی می‌دهیم. فرض می‌کنیم، حکم برای عدد طبیعی مفروض n (و برای هر $m < n$) درست باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای $n+1$ (و برای هر $m < n+1$) هم درست است.

همه عددهای غیرمنفی را که بیش از n رقم نداشته باشند، در حالت زوج بودن مجموع رقم‌ها $a_1, a_2, \dots$ و در حالت فرد بودن مجموع رقم‌ها $b_1, b_2, \dots$ می‌گیریم. به همین ترتیب، همه عددهایی را که بیش از $n+1$ رقم نداشته باشند، در حالت زوج بودن مجموع رقم‌ها با $A_1, A_2, \dots$ و در حالت فرد بودن رقم‌ها با $B_1, B_2, \dots$ معرفی می‌کنیم. در ضمن، برای عددهای یک‌رقمی زوج، از $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ و برای عددهای یک‌رقمی فرد از $\beta_1, \beta_2, \dots$ استفاده می‌کنیم. بنابر فرض استقرا داریم:

$$\sum_k a_k^p = \sum_k b_k^p \quad (\text{برای هر } p < n) \quad (*)$$

علاوه بر این، فرض می‌کنیم:

$$S_{n,p} = \sum_k a_k^p + \sum_k b_k^p \quad (**)$$

یعنی مجموع توان‌های p ام همه عددهایی که، در نمایش دهدهی خود، بیش از n رقم ندارند.

اکنون توجه می‌کنیم که عدد A_i به یکی از دو صورت

$$\overline{a_k \alpha_l} = 10a_k + \alpha_l \quad \text{یا} \quad \overline{b_k \beta_l} = 10b_k + \beta_l$$

و عدد B_j به یکی از دو صورت

$$\overline{a_k \beta_l} = 10a_k + \beta_l \quad \text{یا} \quad \overline{b_k \alpha_l} = 10b_k + \alpha_l$$

است. به این ترتیب، با استفاده از نماد $\sum$ ، داریم:

$$\sum_i A_i^m = \sum (10a_k + \alpha_l)^m + \sum (10b_k + \beta_l)^m, \quad m < n+1$$

برای عبارت $(10a_k + \alpha_l)^m$ ، با استفاده از بسط دوجمله‌ای داریم:

$$(1 \circ a_k + \alpha_l)^m = 1 \circ^m a_k^m + C_m^1 \cdot 1 \circ^{m-1} a_k^{m-1} \alpha_l + C_m^2 \cdot 1 \circ^{m-2} a_k^{m-2} \alpha_l^2 + \dots + C_m^{m-1} \cdot 1 \circ a_k \alpha_l^{m-1} + \alpha_l^m$$

عبارت $(1 \circ b_k + \beta_l)^m$ را با همین روش می‌توان نوشت. با توجه به (*) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sum (1 \circ a_k + \alpha_l)^m &= 1 \circ^m \sum a_k^m + C_m^1 \cdot 1 \circ^{m-1} \sum a_k^{m-1} \sum \alpha_l + \\ &+ C_m^2 \cdot 1 \circ^{m-2} \sum a_k^{m-2} \sum \alpha_l^2 + \dots + C_m^{m-1} \cdot 1 \circ \sum a_k \sum \alpha_l^{m-1} + \\ &+ \sum \alpha_l^m = 1 \circ^m \sum a_k^m + C_m^1 \cdot 1 \circ^{m-1} S_{n, m-1} \sum \alpha_l + \\ &+ C_m^2 \cdot 1 \circ^{m-2} S_{n, m-2} \sum \alpha_l^2 + \dots + C_m^{m-1} S_{n, 1} \sum \alpha_l^{m-1} + \sum \alpha_l^m \end{aligned}$$

و به همین ترتیب

$$\begin{aligned} \sum (1 \circ b_k + \beta_l)^m &= 1 \circ^m \sum b_k^m + C_m^1 \cdot 1 \circ^{m-1} \sum b_k^{m-1} \sum \beta_l + \\ &+ C_m^2 \cdot 1 \circ^{m-2} \sum b_k^{m-2} \sum \beta_l^2 + \dots + C_m^{m-1} \cdot 1 \circ \sum b_k \sum \beta_l^{m-1} + \\ &+ \sum \beta_l^m = 1 \circ^m \sum b_k^m + C_m^1 \cdot 1 \circ^{m-1} S_{n, m-1} \sum \beta_l + \\ &+ C_m^2 \cdot 1 \circ^{m-2} S_{n, m-2} \sum \beta_l^2 + \dots + C_m^{m-1} \cdot 1 \circ S_{n, 1} \sum \beta_l^{m-1} + \sum \beta_l^m \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum A_i^m &= \sum (1 \circ a_k + \alpha_l)^m + \sum (1 \circ b_k + \beta_l)^m = 1 \circ^m S_{n, m} + \\ &+ C_m^1 \cdot 1 \circ^{m-1} S_{n, m-1} S_{1, 1} + C_m^2 \cdot 1 \circ^{m-2} S_{n, m-2} S_{1, 2} + \dots \\ &\dots + C_m^{m-1} \cdot 1 \circ S_{n, 1} S_{1, m-1} + S_{1, m} \end{aligned}$$

اکنون، اگر دوباره از (*) و (**) و دستور دو جمله‌ای استفاده کنیم، بعد از تبدیل‌های لازم، به عبارت مشابهی برای مجموع زیر می‌رسیم:

$$\sum B_j^m = \sum (1 \circ a_k + \beta_l)^m + \sum (1 \circ b_k + \alpha_l)^m$$

که اثبات حکم را کامل می‌کند.

در حالت $m \geq n$ ، برابری مورد نظر برقرار نیست. مثلاً اگر فرض

کنیم $n = m = 1$ آن وقت

$$\sum \alpha_i' = \sum \alpha_i = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20;$$

$$\sum \beta_j' = \sum \beta_j = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

۱۱۴. صورت ناقصی از آرایش مثلثی را، به این ترتیب می‌نویسیم:

دو سطر اول را حذف می‌کنیم و از سطر سوم به بعد، در هر سطر، تنها چهار عدد سمت چپ را نگه می‌داریم؛ در ضمن، هر عدد زوج را با «ز» و هر عدد فرد را با «ف» نشان می‌دهیم. به این جدول می‌رسیم:

ز ف ز ف
ف ز ف ف
ز ز ز ف
ز ف ف ف
ز ف ز ف

می بینیم که سطر پنجم این جدول جدید، بر سطر اول آن منطبق است. از طرف دیگر، زوج یا فرد بودن عددهای هر سطر، دقیقاً به عددهای سطر قبل آن بستگی دارد. به این ترتیب، جدول جدید، حالت تناوبی دارد و هر چهار سطر به چهار سطر، عیناً تکرار می شود. از آن جاکه، در هر یک از چهار سطر اول این جدول، عددی زوج وجود دارد، بنابراین، هر کدام از سطرهای بعدی هم، دست کم شامل یک عدد زوج است.

۱۱۵. ثابت می‌کنیم، مجموع عددهای هر سطر جدول، بر عدد $\frac{1951}{2}$

یعنی بر عدد ۹۷۹ بخش پذیر است و اگر، از سطر دوم آغاز کنیم، مجموع عددهای هر سطر، حتی بر عدد ۱۹۵۸ بخش پذیر می شود. با اثبات این قضیه، مساله حل می شود، زیرا در سطر آخر تنها یک عدد وجود دارد و، بنابراین، باید مضربی از ۱۹۵۸ باشد.

روشن است که مجموع عددهای سطر اول (که آن را S_1 می‌نامیم،

عبارت است از مجموع ۱۹۵۸ عدد طبیعی نخستین و، بنابراین، برابر است با

$$S_1 = \frac{1}{9}(1958 \times 1959)$$

یعنی S_1 بر $\frac{1958}{9}$ بخش پذیر است.

مجموع S_2 از سطر دوم را، با توجه به نوع تشکیل جدول، می‌توان این‌طور نوشت:

$$S_2 = (0+1) + (1+2) + (2+3) + \dots + (1956+1957) + \\ + (1957+1958) = 2S_1 - (0+1958)$$

چون $2S_1$ و ۱۹۵۸ مضربی از ۱۹۵۸ هستند، بنابراین S_2 بر ۱۹۵۸ بخش پذیر است.

به سطر سوم می‌پردازیم اگر مجموع عددهای این سطر را S_3 بنامیم، داریم:

$$S_3 = (1+3) + (3+5) + \dots + (3913+3915) = \\ = 2S_2 - (1+3915)$$

اگر ۳۹۱۵ را به صورت ۱۹۵۸ + ۱۹۵۷ و عدد ۱ را به صورت ۰ + ۱ بنویسیم، داریم:

$$1+3915 = (0+1) + (1957+1958) = (0+1958) + \\ + (1+1957) = 2 \times 1958$$

که بر ۱۹۵۸ بخش پذیر است. به این ترتیب S_3 نیز مضربی از ۱۹۵۸ است. این استدلال را می‌توان ادامه داد. برای S_4 ، مجموع همه عددهای سطر چهارم، به دست می‌آید:

$$S_4 = 2S_3 - (4+7828)$$

عدد $4 = 1+3$ و $7828 = 3913+3915$ ، دو عدد ابتدا و انتهای سطر

چهارم، به ترتیب، برابر مجموع دو عدد ابتدا و مجموع دو عدد انتهایی سطر سوم اند؛ با توجه به قانون تشکیل جدول، داریم:

$$\begin{aligned} 4 + 7828 &= (1+3) + (3913 + 3915) = (0+1) + \\ &+ (1+2) + (1956 + 1957) + (1957 + 1958) = \\ &= (0+1958) + (1+1957) + (1+1957) + \\ &+ (2+1956) = 4 \times 1958 \end{aligned}$$

که مضربی است از ۱۹۵۸؛ یعنی S_4 بر ۱۹۵۸ بخش پذیر است. با همین روش می‌توان ثابت کرد که، هر سطر جدول (به جز سطر اول) مضربی است از ۱۹۵۸ (و اگر مایل باشید، در این جا، از روش استقرای ریاضی هم می‌توان استفاده کرد).

۱۱۶. عددهای روی هر دایره به صورت $\overline{xyz} | \overline{x_1 y_1 z_1}$ است که، در ضمن، داریم $\overline{x_1 y_1 z_1} = 999 - \overline{xyz}$ و در نتیجه $z_1 = 9 - z$ ، $y_1 = 9 - y$ ، $x_1 = 9 - x$ (اگر $x = 9$ یا $x = 0$ آن وقت $x_1 = 0$ یا $x_1 = 9$). از این جا بلافاصله معلوم می‌شود که، اگر $x = y = z$ (که در این صورت $x_1 = y_1 = z_1 = 9 - x$)، آن وقت شرط مساله برقرار است، یعنی در عددهای دایره، بیش از دو رقم به کار نرفته است. در این حالت، ده جواب به دست می‌آید (که متناظرند با فاصله‌های $000 = 000, 111, 222, \dots, 999$ از دایره تا ایستگاه A).

در حالتی که عدد $\overline{xyz}$ با دو رقم متفاوت نوشته شده باشد، باید مجموع $\overline{x_1 y_1 z_1} = \overline{(9-x)(9-y)(9-z)}$ این دو رقم برابر ۹ باشد تا عدد $\overline{xyz}$ به سادگی روشن می‌شود که، از این گونه رقم‌ها، پنج زوج وجود دارد:

$$(4, 5); (3, 6); (2, 7); (1, 8); (0, 9)$$

علاوه بر این، با هر یک از زوج عددها، می‌توان ۶ عدد سه رقمی نوشت (اگر دو رقم را a و b فرض کنیم، سه عدد abb ، bab و bba به کمک یک رقم a و دو رقم b به دست می‌آید و سه عدد baa ، aba و aab به کمک دو رقم برابر

a و يك رقم برابر b). به این ترتیب، $۳۰ = ۵ \times ۶$ دیرك، كه فاصله تا ایستگاه A را نشان می‌دهند، با شرط مساله سازگارند. بنابراین، كل دیرك‌هایی كه، برای نوشتن عددهای روی آن‌ها، تنها از دو رقم استفاده شده باشد، برابر است با $۴۰ = ۳۰ + ۱۰$.

۱۱۷. ۱۰ ساعت اول. از آغاز نخستین سانس تا پایان هفتمین سانس، کمتر از ۱۳ ساعت طول می‌کشد، زیرا سانس اول زودتر از ساعت ۱۲ آغاز نمی‌شود و سانس هفتم قبل از ساعت ۱ بامداد تمام می‌شود. فاصله زمانی از آغاز سانس دوم تا پایان سانس ششم، بیشتر از ۹ ساعت است، زیرا سانس دوم قبل از ساعت ۱۴ آغاز می‌شود و سانس ششم زودتر از ساعت ۲۳ تمام نمی‌شود. چون:

$$۴۸ \text{ دقیقه و } ۱ \text{ ساعت} = \frac{۹}{۵} \text{ ساعت } ۵۲ \text{ دقیقه و } ۱ \text{ ساعت} < \frac{۱۳}{۷} \text{ ساعت}$$

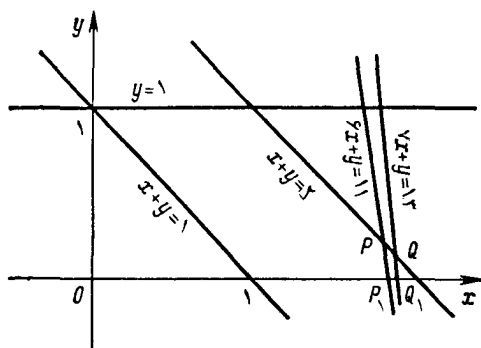
بنابراین، فاصله زمانی از آغاز يك سانس تا آغاز سانس بعدی، از ۱ ساعت و ۵۲ دقیقه کمتر و از ۱ ساعت و ۴۸ دقیقه بیشتر است. معمولاً، مدت يك سانس، برحسب دقیقه، مضربی است از ۵؛ یعنی هر سانس نمایش ۱ ساعت و ۵۰ دقیقه طول می‌کشد.

علاوه بر این، چون سانس اول قبل از ساعت ۱۴ ختم می‌شود، بنابراین یا در ساعت ۱۲ و ۵۰ دقیقه آغاز شده است و یا در ساعت ۱۲ و ۵۵ دقیقه. سانس دوم یا در ساعت ۱۳ و ۵۰ دقیقه آغاز شده است و یا در ساعت ۱۳ و ۵۵ دقیقه و به همین ترتیب تا آخر.

اگر نخواهیم قبول کنیم كه زمان آغاز هر سانس، مضربی از ۵ است، آن وقت مساله، بیش از دو جواب پیدا می‌کند. این حالت را در راه حل دوم مورد بررسی قرار داده ایم.

۱۰ ساعت دوم. $y + ۱۲$ را زمان شروع سانس اول، و x را فاصله زمانی يك سانس فرض می‌کنیم (در این جا x و y را برحسب ساعت گرفته ایم). به این ترتیب:

شروع سانس اول در ساعت $y + ۱۲$ (بین ساعت‌های ۱۲ و ۱۳)؛
شروع سانس دوم در ساعت $x + y + ۱۲$ (بین ساعت‌های ۱۳ و ۱۴)؛



شکل ۱۱

شروع سانس هفتم در ساعت $12 + y + 6x$ (بین ساعت‌های ۲۳ و ۲۴)؛
 شروع سانس هشتم در ساعت $12 + y + 7x$ بین ساعت‌های ۲۴ و ۱
 بامداد).
 بنابراین داریم:

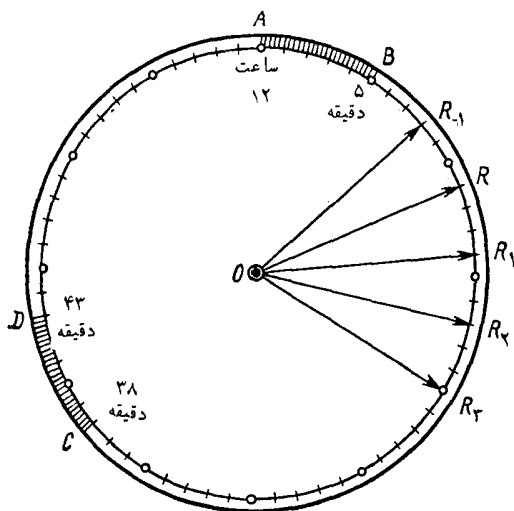
$$\begin{array}{ll} 12 \leq 12 + y < 13, & 0 \leq y < 1 \\ 13 \leq 12 + x + y < 14, & 1 \leq x + y < 2 \\ 23 \leq 12 + 6x + y < 24, & 11 \leq 6x + y < 12 \\ 24 \leq 12 + 7x + y < 25, & 12 \leq 7x + y < 13 \end{array}$$

اگر نابرابری‌های

$$0 \leq y < 1, \quad 1 \leq x + y < 2, \quad 11 \leq 6x + y, \quad 7x + y \leq 13$$

را در يك دستگاه مختصات xOy در نظر بگیریم، به سادگی معلوم می‌شود که هر نقطه متعلق به چهار ضلعی PQQ_1P_1 ، يك جواب مساله است (شکل ۱۱ را ببینید).

۱۱۸. وقتی بزرگ‌راه، به خاطر عبور قطار، به مدت ۵ دقیقه بسته می‌شود، عقب‌رۀ دقیقه‌شمار ساعت فاصله از ۰ تا ۵ دقیقه یا از ۳۸ دقیقه تا ۴۳ دقیقه را طی می‌کند (زیرا قطار در ساعت n و یا در ساعت n و ۳۸ دقیقه



شکل ۱۲

به محل تقاطع می‌رسد) (شکل ۱۲ را ببینید). اکنون، در صفحه ساعت، جای عقربه دقیقه‌شمار را، برای لحظه‌هایی که اتوبوس از تقاطع رد می‌شود، علامت می‌گذاریم: t_0 (دقیقه) را، لحظه عبور نخستین اتوبوس می‌گیریم؛ در این صورت، بعد از هر T دقیقه، یک اتوبوس از تقاطع می‌گذرد؛ بنابراین، نقطه‌های $t_0 + T$ ، $t_0 + 2T$ ، $t_0 + 3T$ ، و غیره، روی صفحه ساعت (و در جهت حرکت عقربه‌ها) علامت گذاری می‌شوند. عددهای t_0 و T باید طوری انتخاب شوند که، هیچ کدام از این علامت‌ها، در فاصله از ۵ تا ۵ دقیقه و یا در فاصله از ۳۸ تا ۴۳ دقیقه (که روی شکل ۱۲، هاشور خورده‌اند) قرار نگیرند.

ابتدا به این نکته توجه کنیم که، اگر برنامه حرکت اتوبوس‌ها طبق خواست مساله تنظیم شده باشد، آن وقت در روی صفحه ساعت، بیش از ۱۲ علامت متفاوت به دست نمی‌آید*. در واقع، فرض کنید R و R_1 دو علامت از

(* در حالت کلی، وقتی که فاصله زمانی T بر حسب دقیقه، نسبت به یک ساعت که متناظر با گردش ۳۶۰ درجه عقربه دقیقه‌شمار است، اندازه ناپذیر باشد ←

صفحه ساعت باشند که کمترین فاصله را با یکدیگر دارند؛ $\widehat{ROR_1} = \alpha^\circ$ را، زاویه متناظر با این دو نقطه می‌گیریم (O ، مرکز صفحه ساعت است). زاویه α° متناظر است با فاصله زمانی τ دقیقه و R و R_1 معرف نقطه‌های متناظر با $t_0 + iT$ و $t_0 + jT$ هستند (i و j عددهایی درست‌اند و مثلاً فرض می‌کنیم $i > j$). بنابراین فاصله زمانی بین لحظه‌هایی که i امین و j امین اتوبوس به تقاطع می‌رسند، برابر است با k ساعت به اضافه یا منهای τ دقیقه (k ، عددی است درست)؛ برای روشن بودن وضع؛ فرض می‌کنیم، فاصله زمانی بین لحظه‌هایی که i امین و j امین اتوبوس به تقاطع می‌رسند، برابر با k ساعت به اضافه τ دقیقه باشد، یعنی کمان $\widehat{RR_1}$ ، روی محیط‌دایره صفحه ساعت، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت قرار گیرد، همان‌طور که در شکل ۱۲ می‌بینید (در حالتی هم که، این فاصله زمانی برابر k ساعت منهای τ دقیقه باشد، می‌توان به همین ترتیب استدلال کرد). در این حالت، اتوبوس $[j + (j - i)]$ ام (یعنی اتوبوس $(2j - i)$ ام) بعد از اتوبوس j ام و پس از k ساعت و τ دقیقه به تقاطع می‌رسد؛ علامت R_2 را برای این اتوبوس در نظر می‌گیریم، به نحوی که $\widehat{R_1R_2} = \widehat{RR_1} = \alpha^\circ$ ، به همین ترتیب، برای اتوبوس $[(2j - i) + (j - i)]$ ام (یعنی اتوبوس $(3j - 2i)$ ام) علامت R_3 را در نظر می‌گیریم، به نحوی که $\widehat{R_2R_3} = \alpha^\circ$ و همین‌طور تا آخر. از طرف دیگر، اتوبوس $[i - (j - i)]$ ام، یعنی اتوبوس $(2i - j)$ ام، k ساعت و τ دقیقه زودتر از اتوبوس j ام به تقاطع می‌رسد، یعنی باید آن را با علامت R_{-1} مشخص کرد، به نحوی که R_{-1} و R_1 در دو طرف علامت R قرار دارد و $\widehat{R_{-1}R} = \widehat{RR_1} = \alpha^\circ$ و غیره. به این ترتیب، به مجموعه‌ای از علامت‌ها می‌رسیم که، کوتاه‌ترین فاصله بین آن‌ها، برابر α درجه یا فاصله زمانی τ

→

تعداد علامت‌ها می‌تواند تا بی‌نهایت هم برسد. در این حالت، یعنی وقتی که تعداد دقیقه‌های عدد T ، عددی دلخواه (کسری یا گنگ) باشد، برای هر نقطه M از صفحه ساعت و هر کمان دلخواه به اندازه ε ، علامت‌هایی وجود دارد، که فاصله کمانی آن‌ها از نقطه M ، بیش از ε نباشد

دقیقه است. روشن است که اگر $\tau < 5$ (یا $\alpha < 30^\circ$)؛ فاصله زمانی ۵ دقیقه، متناظر است با زاویه مرکزی 30° (درجه)، آن وقت، دست کم یکی از علامت‌ها، در داخل کمان‌های AB و CD (که روی شکل ۱۲، هاشور خورده‌اند) قرار می‌گیرد و این، به معنای آن است که اتوبوس وقتی به تقاطع می‌رسد که جاده، برای عبور قطار، بسته است. بنابراین $\tau \geq 5$ ($\alpha \geq 30^\circ$)، که در نتیجه، تعداد علامت‌ها، نمی‌تواند از $\frac{360}{30} = 12$ بیشتر باشد.

بنابراین، برنامه ساعت حرکت اتوبوس‌ها را می‌توان متناظر با k ($k \leq 12$) و با توجه به علامت‌های $R, R_1, R_2, \dots$ منظم کرد؛ در ضمن باید داشته باشیم:

$$\widehat{RR_1} = \widehat{R_1R_2} = \widehat{R_2R_3} = \dots$$

و این به معنای آن است که $RR_1R_2 \dots R_{k-1}$ يك k ضلعی منتظم محاط در صفحه ساعت است (این k ضلعی را با M_k نشان می‌دهیم)، بنابراین، باید همه مقدارهای k ($k \leq 12$) را طوری پیدا کنیم که k ضلعی منتظم M_k قابل محاط در صفحه ساعت باشد و، در ضمن، هیچ راسی از M_k در داخل کمان AB یا کمان CD قرار نگیرد. روشن است که در حالت $k=1$ (یعنی وقتی که اتوبوس‌ها، به فاصله يك ساعت از یکدیگر، پشت سرهم حرکت کنند) و به ازای $k=2$ (یعنی وقتی که فاصله زمانی بین حرکت دو اتوبوس متوالی، برابر نیم ساعت باشد؛ در این حالت، دو علامت R و R_1 به دست می‌آید که در داخل کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ قرار ندارند و دو سر يك قطر را مشخص می‌کنند)، می‌توان برای حرکت اتوبوس‌ها برنامه‌ریزی کرد. شرط $T < 30$ (دقیقه) به این معناست که باید جواب‌های مسأله را متناظر با $k > 2$ پیدا کنیم. روشن است که به ازای $k=12$ (یعنی $\alpha=30^\circ$ و $\tau=5'$) جوابی به دست نمی‌آید. در واقع، در این حالت، برای این که علامت‌ها در درون کمان $\widehat{AB}$ قرار نگیرند، تنها می‌توانند در دو انتهای کمان $\widehat{AB}$ باشند (R منطبق بر A و R_1 منطبق بر B) ولی در این صورت، علامت نهم متناظر با $5 \times 8 + 0$ یعنی ۴۰ دقیقه می‌شود که در درون کمان $\widehat{CD}$ قرار می‌گیرد.

به‌همین ترتیب، برای $k=10, k=9, k=7$ و $k=6$ (متناظر با $\tau = \frac{60}{10} = 6'$)

هم‌جوابی به‌دست نمی‌آید، مثلاً به‌ازای $\tau = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}'$ و $\tau = \frac{60}{9} = 6\frac{2}{3}'$

برای این‌که R در درون $\widehat{AB}$ نباشد و چون R نزدیک‌ترین علامت به A است، باید در فاصله از 5 تا 6 دقیقه قرار گیرد که، در این صورت، اتوبوس هفتم، در داخل فاصله

از $5 + 6 \times 6 = 41'$ تا $6 + 6 \times 6 = 42'$

یعنی در داخل کمان $\widehat{CD}$ قرار می‌گیرد (از خواننده می‌خواهیم خود تحقیق

کند که، اگر R در فاصله از 5 دقیقه تا $6\frac{2}{3}'$ دقیقه یا در داخل فاصله از 5 دقیقه

تا $8\frac{4}{7}'$ دقیقه باشد، آن وقت به‌ترتیب، ششمین و پنجمین اتوبوس در داخل

کمان $\widehat{CD}$ واقع می‌شود) سرانجام، مقدارهای $k=11, k=8, k=6$ ، $k=5, k=4$ و $k=3$ ما را به‌جواب می‌رسانند که به‌ترتیب متناظرند با

$\tau = 5\frac{5}{11}', \tau = 7\frac{1}{7}', \tau = 10', \tau = 12', \tau = 15', \tau = 20'$. مثلاً

به‌ازای $k=11$ ، برنامه حرکت اتوبوس‌ها را می‌توان طوری تنظیم کرد که با بسته‌بودن راه مواجه نشوند؛ لحظه‌های رسیدن آن‌ها به تقاطع چنین است:

$$5', 10\frac{5}{11}', 15\frac{10}{11}', 21\frac{4}{11}', 26\frac{9}{11}', 32\frac{3}{11}', 37\frac{8}{11}',$$

$$43\frac{2}{11}', 48\frac{7}{11}', 54\frac{1}{11}', 59\frac{6}{11}'$$

و برای $k=5$:

$$8', 20', 32', 44', 56'$$

به این ترتیب، با شرط $T < 30'$ ، برنامه حرکت اتوبوس‌ها را می‌توان

برای $T=۲۰'$ ، $T=۱۵'$ ، $T=۱۲'$ ، $T=۷\frac{۱}{۲}'$ و $T=۵\frac{۵}{۱۱}'$ ، و تنها برای همین مقدارهای T ، تنظیم کرد.

۰۱۱۹ عدد سه‌رقمی N را به صورت $\overline{abc}$ در نظر می‌گیریم. روشن است که برای عددهای

$$N=۱۰۰، N=۲۰۰، N=۳۰۰، \dots، N=۹۰۰$$

داریم: $\frac{N}{a+b+c}=۱۰۰$. اگر عدد N به دو رقم برابر صفر ختم نشده باشد، آن وقت $b+c > ۰$ و $a+b+c \geq a+۱$. چون رقم a در مرتبه صدگان عدد قرار دارد، بنابراین $N < ۱۰۰(a+۱)$ و

$$\frac{N}{a+b+c} < \frac{۱۰۰(a+۱)}{a+۱} = ۱۰۰$$

به این ترتیب، حداکثر مقدار نسبت یک عدد سه‌رقمی به مجموع رقم‌های آن برابر است با ۱۰۰، و این حداکثر مقدار، تنها وقتی به دست می‌آید که عدد سه‌رقمی، مضربی از ۱۰۰ باشد.

یادداشت. با همین روش می‌توان ثابت کرد که نسبت یک عدد k رقمی به مجموع رقم‌های آن، تنها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که $(k-۱)$ رقم سمت راست عدد، برابر صفر باشد.

۰۱۲۰. عددی که در صورت مساله داده شده است، ۱۹۲ رقم دارد و، بنابراین، وقتی ۱۰۰ رقم آن را حذف کنیم، به عددی ۹۲ رقمی می‌رسیم. (a) از سمت چپ عدد آغاز می‌کنیم و، به جز رقم‌های برابر ۹، همه دیگر رقم‌ها را حذف می‌کنیم، به نحوی که ۵ رقم سمت چپ عدد باقی‌مانده برابر ۹ باشند، این پنج رقم برابر ۹، مربوط به عددهای ۹، ۱۹، ۲۹، ۳۹ و ۴۹ هستند. تا این‌جا، به تعداد

$$۸+۱۹+۱۹+۱۹+۱۹=۸۴$$

رقم حذف می‌شود. رقم بعدی را نمی‌توانیم، برابر ۹ در نظر بگیریم، زیرا

با نخستین رقم ۹، در عدد ۵۹ برخورد می‌کنیم و، برای رسیدن به آن، باید ۱۹ رقم را حذف کرد که، در این صورت، تعداد رقم حذف شده از ۱۰۰ تجاوز می‌کند ($۱۹ + ۸۴ = ۱۰۳$). حتی نمی‌توانیم همه رقم‌های بعد از ۴۹ را حذف کنیم تا به رقم ۸ برسیم، زیرا نخستین رقم ۸ در عدد ۵۸ است و، برای رسیدن به آن، باید ۱۷ رقم را حذف کنیم و، دوباره، تعداد رقم‌های حذف شده از ۱۰۰ تجاوز می‌کند ($۱۷ + ۸۴ = ۱۰۱$). بنابراین، بهترین راه این است که، بعد از ۴۹، ۱۵ رقم را حذف کنیم و رقم ۷ را که متعلق به ۵۷ است نگه‌داریم. تا این‌جا روی هم $۱۵ + ۸۴$ ، یعنی ۹۹ رقم حذف کرده‌ایم. تنها یک رقم دیگر می‌توانیم حذف کنیم و، روشن است که این رقم، باید رقم ۵ متعلق به عدد ۵۸ باشد. عدد زیر باقی می‌ماند که بزرگترین عدد ممکن، با حذف ۱۰۰ رقم از عدد اولیه است:

$$۹۹۹۹۹۷۸۵۹۶۰۶۱۰۰۰۹۹۱۰۰$$

(b) می‌توانیم با حذف ۸۶ رقم، به عددی برسیم که با پنج رقم برابر صفر آغاز شده است. این صفر مربوط به عددهای ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ هستند و تعداد رقم‌های حذف شده برابر است با

$$۱۰ + ۱۹ + ۱۹ + ۱۹ + ۱۹ = ۸۴$$

برای رقم ششم (از سمت چپ) نمی‌توان صفر را انتخاب کرد، زیرا نخستین صفر مربوط به عدد ۶۰ است که، برای رسیدن به آن، باید ۱۹ رقم دیگر حذف کرد و تعداد رقم‌های حذف شده از ۱۰۰ تجاوز می‌کند. ولی می‌توانیم با حذف رقم ۵ از عدد ۵۱، برای ششمین رقم (از سمت چپ) به رقم برابر ۱ برسیم. اگر همین روش را ادامه دهیم، می‌توانیم با حذف

$$۸۶ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۹۰$$

رقم، به عددی برسیم که با رقم‌های ۰۰۰۰۰۱۲۲۳۴ آغاز شده است. به دنبال آن، عدد

$$۵۵۵۶۵۷۵۸۵۹۶۰۶۱۰۰۰$$

قرار دارد. کوچکترین رقمی که می‌توان از این‌جا به بعد در نظر گرفت رقم ۵ است (هر کدام از رقم‌های ۵ متعلق به یکی از عددهای ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸ یا ۵۹). سرانجام می‌توان رقم برابر صفر را نگه داشت (قبل از رقم ۵ در عدد ۱۱، ۶۰ رقم وجود دارد که با نگه داشتن یکی از رقم‌های ۵، باید ۱۰ رقم را حذف کنیم). به این ترتیب، با حذف صفرهای سمت چپ، به عدد ۸۷ رقمی زیر می‌رسیم:

$$۱۲۳۴۵۰۶۱۶۲۶۳۶۴...۱۰۰$$

۱۲۱. a) رقم‌های سمت چپ سه عدد مورد نظر باید کمترین مقدار ممکن را داشته باشند. بنابراین، سه عدد را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\overline{1Aa}, \overline{2Bb}, \overline{3Cc}$$

سه واقعیت را ثابت می‌کنیم: ۱) $A < B < C$ ؛ ۲) $a < b < c$ ؛ ۳) هر یک از رقم‌های a و b و c از هر یک از رقم‌های A و B و C بزرگ‌ترند. ۱) اگر داشته باشیم $A > B$ ، آن وقت $\overline{Aa} > \overline{Bb}$ و

$$\overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} - \overline{2Aa} \cdot \overline{1Bb} = (100 + \overline{Aa})(200 + \overline{Bb}) - (200 + \overline{Aa})(100 + \overline{Bb}) = 100(\overline{Aa} - \overline{Bb}) > 0$$

که در نتیجه به دست می‌آید:

$$\overline{1Bb} \cdot \overline{2Aa} \cdot \overline{3Cc} < \overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} \cdot \overline{3Cc}$$

که با فرض ما متناقض است.

۲) اگر $a > b$ ، آن وقت

$$\overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} - \overline{1Ab} \cdot \overline{2Ba} = (10 \cdot \overline{1A} + a)(10 \cdot \overline{2B} + b) - (10 \cdot \overline{1A} + b)(10 \cdot \overline{2B} + a) = (10 \cdot \overline{2B} - 10 \cdot \overline{1A})(a - b) > 0$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود

$$\overline{1Ab} \cdot \overline{2Ba} \cdot \overline{3Cc} < \overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} \cdot \overline{3Cc}$$

(۳) اگر $C > a$ ، یعنی $C = a + x$ ($x > 0$) (با توجه به (۱ و (۲) C از بین A و B و C بزرگترین و a از بین a و b و c کوچکترین است) آن وقت داریم:

$$\overline{1Aa} \cdot \overline{2Cc} - \overline{1Ac} \cdot \overline{3ac} = \overline{1Aa}(\overline{3ac} + 10x) -$$

$$- (\overline{1Aa} + x)(\overline{3ac}) = x(10 \cdot \overline{1Aa} - \overline{3ac}) > 0$$

که از آن جا $\overline{1Aa} + \overline{2Bb} + \overline{3Cc} > \overline{1AC} \cdot \overline{2Bb} \cdot \overline{3ac}$

از (۱ و (۲ و (۳ نتیجه می‌شود:

$$A < B < C < a < b < c$$

و بنابراین، حاصل ضرب مورد نظر، چنین است:

$$147 \times 258 \times 369$$

(b حاصل ضرب مطلوب به این صورت است:

$$\overline{9Aa} \cdot \overline{8Bb} \cdot \overline{7Cc}$$

شبه حالت (a)، در این جا می‌توانیم ثابت کنیم: (۱ $A < B < C$ ؛ (۲ $a < b < c$ ؛ (۳ هر يك از رقم‌های a و b و c کوچکتر از هر يك از رقم‌های A و B و C است؛ یعنی

$$a < b < c < A < B < C$$

و حاصل ضرب مطلوب، چنین می‌شود:

$$941 \times 852 \times 763$$

۱۲۲. بنابراین شرط مساله باید داشته باشیم:

$$m + (m+1) + (m+2) + \dots + (m+k) = 1000$$

که با توجه به مجموع جمله‌های يك تصاعد حسابی به دست می‌آید:

$$\frac{2m+k}{2}(k+1) = 1000$$

$$(2m+k)(k+1) = 2000$$

یعنی

چون تفاضل $2m - 1 = (k + 1) - (2m + k)$ عددی فرد است، بنابراین از دو عدد $2m + k$ و $k + 1$ ، یکی زوج و دیگری فرد است. علاوه بر این روشن است که $2m + k > k + 1$. به جواب‌های زیر می‌رسیم:

$$2m + k = 2000, k + 1 = 1 \text{ یعنی } m = 1000, k = 0;$$

$$2m + k = 400, k + 1 = 5 \text{ یعنی } m = 198, k = 4;$$

$$2m + k = 80, k + 1 = 25 \text{ یعنی } m = 28, k = 24;$$

$$2m + k = 125, k + 1 = 16 \text{ یعنی } m = 55, k = 15$$

۱۲۳. N را عددی مخالف با توان ۲ می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$N = 2^k(2l + 1)$$

که در آن، 2^k ، بزرگترین توان عدد ۲ است که N می‌تواند بر آن بخش شود (k برابر صفر هم می‌تواند باشد) و $2l + 1$ ، بزرگترین مقسوم علیه فرد عدد N است. به‌جز این داریم:

$$\begin{aligned} & (2^k - 1) + (2^k - 1 + 1) + \dots + (2^k - 1 + 2l - 1) + \\ & + (2^k - 1 + 2l) = \frac{(2l + 1)(2^k - 1 + 2^k - 1 + 2l)}{2} = \\ & = 2^k(2l + 1) = N \end{aligned}$$

اگر در بین این $2l + 1$ عدد درست متوالی، چندتایی منفی باشند (یعنی اگر $l > 2^k$)، آن وقت، این عددهای منفی با عددهای مثبت قرینه خود حذف می‌شوند و، باز هم، عدد N به صورت مجموع چند عدد درست و مثبت (که از $2l + 1$ کوچکترند) درمی‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم، عدد مفروض به صورت 2^k باشد و توانسته باشیم آن را به صورت مجموع m عدد متوالی درست و مثبت بنویسیم:

$$n, n + 1, n + 2, \dots, n + m - 2, n + m - 1$$

از این‌جا می‌توان به دست آورد:

$$2^{k+1} = 2[n + (n+1) + (n+2) + \dots$$

$$\dots + (n+m-2) + (n+m-1)] = m(n+n+m-1) = \\ = m(2n+m-1)$$

تفاضل $2n+m-1 - m = 2n-1$ عددی فرد است و، بنابراین، از عددهای m و $2n+m-1$ باید یکی زوج و دیگری فرد باشد (درضمن، هر دو عدد غیر از واحدند، زیرا $m > 1$ و $n > 0$) به این ترتیب، برابری اخیر نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا 2^{k+1} نمی‌تواند مقسوم‌علیه فردی به جز واحد داشته باشد.

(b) داریم:

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \dots + (2m-1) = \\ = \frac{(2n+1)(2m-1)}{2}(m-n) = (m+n)(m-n)$$

بنابراین، اگر N عددی فرد باشد که، درضمن، بتوان آن را به صورت مجموع چند عدد فرد متوالی نشان داد، به ناچار باید عددی مرکب باشد، (زیرا به صورت ضرب دو عامل $m+n$ و $m-n$ درمی‌آید). از طرف دیگر، هر عدد فرد مرکب N را می‌توان به صورت ضرب دو عامل فرد a و b ($a > b$)

$$\text{نشان داد که، اگر } m = \frac{a+b}{2} \text{ و } n = \frac{a-b}{2} \text{ بگیریم، آن وقت}$$

$$N = a.b = (m+n)(m-n)$$

و این، به معنای آن است که N ، برابر است با مجموع عددهای فرد از $a-b+1$ تا $a+b-1$.

سپس، عددهای $m+n$ و $m-n$ در عدد $N = (m+n)(m-n)$ ، یا هر دو زوج اند و یا هر دو فرد. اگر N عددی زوج باشد، به ناچار هر دو عامل $m+n$ و $m-n$ عددی زوج می‌شوند، یعنی N باید مضربی از ۴ باشد. به این ترتیب، اگر N عددی زوج باشد، ولی مضربی از ۴ نباشد، نمی‌توان

آن را به صورت مجموعی از عددهای فرد متوالی نوشت. ولی اگر N مضربی از ۴ باشد ($N = 4n$)، می‌توان آن را به صورت مجموع دو عدد فرد متوالی $2n-1$ و $2n+1$ نوشت.

(c) روشن است که

$$\begin{aligned} & (n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + \dots + (n^{k-1} - 1) + \\ & + (n^{k-1} + 1) + \dots + (n^{k-1} + n - 3) + (n^{k-1} + n - 1) = \\ & = \frac{(n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} + n - 1)}{2} \cdot n = n^k \end{aligned}$$

(همه عبارت‌های داخل پرانتزها در این مجموع، عددهایی فردند، زیرا دو عدد n^{k-1} و n ، یا هر دو فردند و یا هر دو زوج).

۱۲۴. چهار عدد متوالی را n ، $n+1$ ، $n+2$ و $n+3$ می‌گیریم.

داریم:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= [n(n+3)][(n+1)(n+2)] + 1 = \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = \\ &= (n^2 + 3n + 1)^2 \end{aligned}$$

یعنی اگر حاصل ضرب این چهار عدد طبیعی متوالی را با واحد جمع کنیم، مجذور عدد طبیعی $n^2 + 3n + 1$ به دست می‌آید.

۱۲۵. ثابت می‌کنیم، این عددها، بیش از چهار مقدار مختلف نمی‌توانند

داشته باشند. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم پنج عدد مختلف a_1, a_2, a_3, a_4 و a_5 در بین $4n$ عدد وجود داشته باشد؛ برای روشن بودن وضع $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ می‌گیریم. بنابه فرض، باید عددهای a_1, a_2, a_3 و a_4 به تصاعد هندسی باشند، یعنی داشته باشیم:

$$a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3$$

اکنون، عددهای a_1, a_2, a_3 و a_5 را در نظر می‌گیریم. بنابه فرض،

این چهار عدد هم باید به تصاعد هندسی باشند، یعنی باید داشته باشیم:

$$a_1 \cdot a_5 = a_2 \cdot a_4$$

از این دو برابری نتیجه می‌شود: $a_1 a_5 = a_2 a_4$ ، یعنی $a_5 = a_4$ که با فرض مختلف بودن پنج عدد متناقض است. به این ترتیب، در بین این $4n$ عدد، بیش از ۴ عدد مختلف وجود ندارد و، طبیعی است که، دست کم یکی از این ۴ عدد، باید حداقل n بار تکرار شده باشد.

۱۲۶. نه وزنه به ترتیب به وزن‌های n^2 ، $(n+1)^2$ ، $(n+2)^2$ ، ...، $(n+8)^2$ را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را به سه گروه تقسیم می‌کنیم:

گروه اول: n^2 ، $(n+5)^2$ ، $(n+7)^2$ ؛

گروه دوم: $(n+1)^2$ ، $(n+3)^2$ ، $(n+8)^2$ ؛

گروه سوم: $(n+2)^2$ ، $(n+4)^2$ ، $(n+6)^2$.

وزن هر يك از این سه گروه به ترتیب چنین است:

$$\text{گروه اول: } n^2 + (n+5)^2 + (n+7)^2 = 3n^2 + 24n + 74$$

$$\text{گروه دوم: } (n+1)^2 + (n+3)^2 + (n+8)^2 = 3n^2 + 24n + 74$$

$$\text{گروه سوم: } (n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 = 3n^2 + 24n + 56$$

می‌بینیم گروه‌های اول و دوم هم وزن‌اند و گروه سوم ۱۸ گرم سبك‌تر از هر يك

از دو گروه دیگر است. اکنون با همان روش، وزنه‌های $(n+9)^2$ ،

$(n+10)^2$ ، ...، $(n+17)^2$ گرمی را طوری به سه گروه تقسیم می‌کنیم که،

مجموع وزنه‌ها در دو گروه اول و سوم، یکسان باشد، ولی گروه دوم ۱۸ گرم

از هر يك از دو گروه دیگر سبك‌تر شود. سرانجام، ۹ وزنه با وزن‌های

$(n+18)^2$ ، $(n+19)^2$ ، ...، $(n+26)^2$ گرم را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را

طوری به سه گروه تقسیم می‌کنیم که وزن گروه‌های دوم و سوم برابر و وزن

گروه اول، ۱۸ گرم کمتر از هر يك از دو گروه دیگر باشد. اکنون اگر سه گروه

اول را باهم، سه گروه دوم را باهم و سه گروه سوم را باهم ترکیب کنیم،

۲۷ وزنه مفروض، با وزن‌های n^2 ، $(n+1)^2$ ، ...، $(n+26)^2$ گرم،

به سه گروه با وزن‌های برابر تقسیم می‌شوند.

۱۲۷. قبل از همه با توجه به شرط‌های مساله می‌توان نتیجه گرفت که وزن ۱۳ وزنه بر حسب گرم، یا به‌طور هم‌زمان با عددهایی فرد و یا به‌طور هم‌زمان با عددهای زوج بیان می‌شوند. در واقع، وقتی ۱۲ وزنه را به‌دلخواه انتخاب کنیم، می‌توان آن‌ها را به دو گروه شش وزنه‌ای با وزن‌های برابر تقسیم کرد، بنابراین باید وزن ۱۲ وزنه روی هم، عددی زوج باشد؛ علاوه بر آن، وقتی یکی از این وزنه‌ها را با وزن ۱۲ سیزدهم عوض کنیم، باز هم مجموع وزن‌های ۱۲ وزنه جدید بر حسب گرم، باید عددی زوج باشد و این ممکن نیست، مگر این که وزن هر یک از این ۱۲ وزنه با وزن ۱۲ سیزدهم، به‌طور هم‌زمان فرد یا به‌طور هم‌زمان زوج باشند.

اکنون، مجموعه تازه‌ای از ۱۳ وزنه را در نظر می‌گیریم که، وزن هر کدام از آن‌ها، برابر باشد با وزن اصلی آن منهای وزن سبک‌ترین وزنه‌ها (اگر از این گونه وزنه‌های سبک‌تر از همه، چندتا داشته باشیم، مجموع وزن‌های آن‌ها را از وزن هر یک از ۱۳ وزنه کم می‌کنیم). روشن است که مجموعه جدید هم باید با شرط‌های مساله سازگار باشد، یعنی هر ۱۳ وزنه جدید، از لحاظ وزن خود بر حسب گرم، یا با عددهایی فرد بیان شوند و یا همه آن‌ها، با عددهایی زوج. ولی در مجموعه جدید، وزنه یا وزنه‌هایی به «وزن» صفر وجود دارد (و صفر، عددی است زوج)؛ بنابراین همه وزن‌ها در مجموعه جدید، باید با عددهایی زوج بیان شوند. اکنون مجموعه سومی شامل ۱۳ وزنه را در نظر می‌گیریم که، وزن هر کدام از آن‌ها نصف وزن وزنه متناظر خود در مجموعه دوم باشد. مجموعه سوم هم با شرط‌های مساله سازگار است. اکنون فرض می‌کنیم، در مجموعه اول، همه وزن‌ها برابر با هم نباشند؛ به این ترتیب، در مجموعه دوم، باید وزنه‌هایی داشته باشیم که وزن آن‌ها مخالف صفر باشد. بنابراین می‌توانیم با نصف کردن متوالی وزن‌ها (و تشکیل مجموعه‌هایی از نوع مجموعه سوم)، سرانجام به جایی برسیم که وزن بعضی از وزنه‌ها عددی زوج (و مثلاً صفر) و وزن بعضی دیگر عددی فرد باشد، در حالی که باید همه این مجموعه‌های جدید، با شرط‌های مساله سازگار باشند، یعنی عددهای معرف وزن‌ها، همگی زوج یا همگی فرد باشند. تناقض حاصل،

درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

یادداشت. مساله، وزن هریک از وزنه‌ها را عددی درست دانسته است، ولی اگر به گویا بودن وزن هریک از وزنه‌ها اکتفا کنیم، بازهم همان نتیجه به دست می‌آید. درواقع، اگر عدد وزن همه وزنه‌ها را، در مخرج مشترک عددهای گویای معرف وزن آن‌ها ضرب کنیم، به مجموعه‌ای از وزنه‌های رسمیم که، وزن هر کدام از آن‌ها، با عددی درست بیان شده است.

درحالی که وزن‌ها، با عددهایی گنگ بیان شده باشند، بازهم حکم مساله درست است. دراین حالت، باید از عددهای گویایی استفاده کرد که، به اندازه دلخواه، به عددهای گنگ مفروض، نزدیک‌اند (اثبات این حالت کلی را، که در ضمن کم و بیش طولانی است، به عهده خواننده می‌گذاریم).

۱۲۸. ابتدا توجه کنیم که، اگر گروه چهارتایی a_k, b_k, c_k, d_k بر گروه چهارتایی a_l, b_l, c_l, d_l منطبق باشد (k و l عددهایی طبیعی و $k \neq l$)، آن وقت یا عددهای $a_k = a_l, b_k = b_l, c_k = c_l, d_k = d_l$ برابر صفرند و یا همه آن‌ها عددهایی مثبت‌اند. درواقع، اگر دست کم یکی از عددهای a, b, c و d برابر صفر باشد، آن وقت حداقل در «پله» چهارم به گروه چهارتایی شامل صفرها می‌رسیم که، بعد از آن و در پله‌های بعدی، همین صفرها تکرار می‌شوند. در ضمن، در بین گروه‌های چهارتایی قبلی، نمی‌توان دو گروه منطبق برهم پیدا کرد. مثلاً فرض کنید، تنها یکی از عددها، و مثلاً a ، برابر صفر باشد، آن وقت به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{array}{cccc} \circ & d & c & d \\ \circ & bc & cd & \circ \\ \circ & bc^2d & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$$

که در بین آن‌ها، دو گروه منطبق برهم وجود ندارد. به همین ترتیب، اگر در بین a, b, c, d ، بیش از یکی برابر صفر باشند، بازهم در پله سوم یا دوم به گروهی از صفرها می‌رسیم و به سادگی قابل تحقیق است که، گروه‌های

قبلی (که همه عضوهای آن‌ها صفر نیستند) نمی‌توانند برهم منطبق باشند. همه این‌ها مربوط به حالتی است که داشته باشیم: $abcd = 0$. اکنون فرض می‌کنیم $abcd \neq 0$. روشن است که، در این حالت، هیچ کدام از گروه‌های چهارتایی شامل عدد صفر نیستند. علاوه بر این، اگر در بین عددهای a, b, c و d ، تنها یکی، و مثلاً a ، منفی باشد، آن وقت اگر تنها به علامت‌ها توجه داشته باشیم، بعد از پنج پله به چهار عدد مثبت می‌رسیم (در این جا، خود عددها را ننوشته‌ایم؛ عددهای مثبت را با «+» و عددهای منفی را با «-» نشان داده‌ایم):

-	+	+	+
-	+	+	-
-	+	-	+
-	-	-	-
+	+	+	+

به این ترتیب، در گروه چهارتایی پنجم، فقط به عددهای مثبت می‌رسیم و در بین گروه‌های قبلی، نمی‌توان دو گروه پیدا کرد که برهم منطبق باشند. (درست است که در هر دو گروه دوم و سوم، با دو علامت «+» و دو علامت «-» سروکار داریم، ولی جای آن در دو گروه، یکی نیست). همین طرح نشان می‌دهد که، اگر در گروه چهارتایی، با دو علامت منفی غیر مجاور (سطر سوم) یا دو علامت منفی مجاور (سطر دوم) سروکار داشته باشیم، باز هم سرانجام به گروهی شامل چهار عدد مثبت می‌رسیم (توجه کنید، حرکت در هر گروه، یک حرکت دوری است و بنابراین دو عدد چهارم و اول را باید مجاور هم به حساب آورد). همچنین در حالتی هم که با چهار عدد منفی روبه‌رو باشیم (سطر چهارم)، در پله بعدی، به چهار عدد مثبت می‌رسیم. حالتی را هم که با سه عدد منفی سروکار داشته باشیم، می‌توان به سادگی مورد آزمایش قرارداد؛ این حالت بلافاصله و در همان گام اول به حالت سطر دوم می‌رسد و، بنابراین باز هم

به چهار عدد مثبت منجر می‌شود.

$$\begin{array}{cccc} + & - & - & - \\ - & + & + & - \\ - & + & - & + \\ - & - & - & - \\ + & + & + & + \end{array}$$

بنابراین، از این جا به بعد می‌توانیم همه عددهای a, b, c, d را مثبت فرض کنیم. درضمن، قرار می‌گذاریم: $abcd = p$. روشن است که

$$a_1 b_1 c_1 d_1 = (ab)(bc)(cd)(da) = (abcd)^2 = p^2$$

به همین ترتیب:

$$a_2 b_2 c_2 d_2 = (a_1 b_1 c_1 d_1)^2 = p^4, \quad a_3 b_3 c_3 d_3 = p^8$$

و به طور کلی:

$$a_k b_k c_k d_k = (p)^{2^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(در این جا، منظور از a_0, b_0, c_0, d_0 همان عددهای اصلی a, b, c, d است).

به این ترتیب، اگر گروه چهارتایی a_k, b_k, c_k, d_k بر گروه چهارتایی a_l, b_l, c_l, d_l منطبق باشد ($l > k$)، باید داشته باشیم:

$$p^{2^k} = a_k b_k c_k d_k = a_l b_l c_l d_l = p^{2^l}$$

از این جا نتیجه می‌شود $p^{2^k - 2^l} = 1$ ، یعنی $p = 1$. بنابراین کافی است تنها به حالتی پردازیم که $abcd = 1$. چون $cd = \frac{1}{ab}$ ، بنابراین، از دو عدد ab و cd ، یکی کمتر از واحد و دیگری بیشتر از واحد نیست. برای روشن بودن

موقعیت فرض می‌کنیم: $ab = \alpha \geq 1$ و $cd = \frac{1}{\alpha} \leq 1$. به همین ترتیب، برای

دو عدد da و bc فرض می‌کنیم: $bc = \beta \geq 1$ و $da = \frac{1}{\beta} \leq 1$ و در ضمن

$\alpha \geq \beta$ (همه حالت‌های دیگر را هم می‌توان، کاملاً شبیه حالتی که در نظر گرفته‌ایم، مورد بررسی قرارداد) در این حالت، به ترتیب به دست می‌آید:

a	b	c	d
α	β	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\beta}$
$\alpha\beta$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta}$
β^2	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\beta^2}$	α^2

در این جا، بزرگترین عدد سطر دوم برابر α ، بزرگترین عدد سطر سوم برابر $\alpha\beta$ ، بزرگترین عدد سطر چهارم برابر α^2 ($\alpha^2 \geq \alpha\beta$) است و غیره (توجه به این نکته لازم است که اختلاف بین سطرهاى دوم و چهارم، تنها در این است که نقش α و β ، به عهده α^2 و β^2 گذاشته شده است).

می‌بینیم، وقتی از يك گروه چهارتایی به گروه چهارتایی بعدی عبور می‌کنیم، مقدار بزرگترین عدد گروه، کاهش پیدا نمی‌کند؛ اگر $\alpha > 1$ و $\beta > 1$ ، آن وقت، این بزرگترین عدد، حتی افزایش پیدا می‌کند. بنابراین، در این حالت، نمی‌توان به دو گروه برخورد کرد که با گروه اول متفاوت، ولی برهم منطبق باشند. به جز این، اگر دست کم یکی از دو عدد α و β ، مخالف واحد باشد، باز هم به دو گروه بر نمی‌خوریم که با گروه اول متفاوت و برهم منطبق باشند. اگر $\alpha > 1$ و $\beta = 1$ ، آن وقت از گروه دوم به بعد، به این صورت در می‌آیند:

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha & 1 & \frac{1}{\alpha} & 1 \\
 \alpha & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \alpha \\
 1 & \frac{1}{\alpha^2} & 1 & \alpha^2
 \end{array}$$

به این ترتیب، بعد از دو گام، بزرگترین عدد گروه، افزایش می‌یابد و، گروه حاصل، نمی‌تواند بر هیچ کدام از گروه‌های قبلی منطبق شود. عددهای دو گروه اول هم، با یکدیگر فرق دارند. در نتیجه، اگر دو گروه k ام و l ام بر هم منطبق باشند ($l > k$)، آن وقت $\alpha = \beta = 1$. در این حالت، با آغاز از گروه دوم، همه گروه‌ها بر هم منطبق اند (گروه دوم، تنها شامل عددهای برابر ۱ خواهد بود).

تا این جا، به گروه چهار تایی a, b, c و d توجه نکردیم؛ باید روشن کنیم که، این گروه، چگونه می‌تواند بر یکی از گروه‌های بعدی منطبق شود! در واقع، این انطباق ممکن نیست، زیرا تا آغاز از گروه دوم، با عددهایی سروکار داریم که حاصل ضرب‌های دو به دوی آن‌ها، برابر واحد است (دقیق‌تر: در گروه دوم، حاصل ضرب دو عدد اول و سوم و، همچنین، حاصل ضرب دو عدد دوم و چهارم، برابر واحد است). اگر $bc = \beta > 1$ و $ab = \alpha \geq \beta$ ، آن گاه چون $cd = \frac{1}{\alpha} < 1$ و $da = \frac{1}{\beta} < 1$ ، باید فرض کنیم $ac = bd = 1$. و این فرض، مقادیرهای زیر را برای عددهای گروه اول، به ما می‌دهد:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \sqrt{\alpha\beta}, \quad \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

(چرا؟) و دوباره به این جا می‌رسیم که عددهای α و $\sqrt{\alpha\beta}$ (به ترتیب، بزرگترین عددهای گروه دوم و گروه اول) را با هم مقایسه کنیم. این دو عدد، تنها وقتی بر هم منطبق اند که داشته باشیم $\beta = \alpha$ ، یعنی وقتی که گروه

اول بر گروه دوم منطبق باشد و $\beta = ۱$ و این حالت را قبلاً بررسی کرده‌ایم. به این ترتیب، اثبات قضیه کامل می‌شود.

یادداشت. روش حل مساله به ما امکان می‌دهد که، تعداد عمل‌های لازم برای رسیدن به گروه‌های منطبق برهم را (در حالتی که همه گروه‌ها مختلف نباشند) حدس بزنیم. همان‌طور که دیدیم، در حالت $abcd = ۰$ ، همه گروه‌ها، با آغاز از گروه چهارم، برهم منطبق‌اند. در حالتی که a, b, c و d عددهایی مثبت و

$$ab = bc = cd = da = ۱$$

آن وقت، با آغاز از گروه دوم، همه گروه‌ها برهم منطبق‌اند (اگر برابری‌های اخیر برقرار نباشند، نمی‌توان به دو گروه منطبق برهم رسید). در حالتی که عددهای منفی هم وجود داشته باشند، بیش از چهار مرحله لازم است تا همه عددهای گروه مثبت شوند.

۱۲۹. چون مجذور هر یک از عددهای a_i ($i = ۱, ۲, \dots, N = ۲^k$) برابر واحد است، بنابراین، سه دنباله عددی نخست، به این صورت می‌آیند:

$$a_1; a_2; \dots; a_{N-1}; a_N$$

$$a_1 a_2; a_2 a_3; \dots; a_{N-1} a_N; a_N a_1$$

$$a_1 a_2^2 a_3 = a_1 a_3; a_2 a_3^2 a_4 = a_2 a_4; \dots; a_{N-1} a_N^2 a_1 =$$

$$= a_{N-1} a_1; a_N a_1^2 a_2 = a_N a_2$$

به این ترتیب: هر عدد متعلق به دنباله سوم، برابر است با حاصل ضرب دو عدد از دنباله اول، به نحوی که در هر جمله، اندیس عامل اول، دو واحد از اندیس عامل دوم کمتر است (عددهای $a_1, a_2, \dots, a_N$ را باید به صورت دوری در نظر گرفت: a_2 بعد از a_1 ، a_3 بعد از a_2 ، $\dots$ ، a_N بعد از a_{N-1} ، a_1 بعد از a_N). به همین ترتیب، اگر دو مرحله دیگر جلو برویم، به دنباله‌ای از عددها می‌رسیم که به کمک عددهای دنباله سوم به دست آمده‌اند (به همان صورتی که عددهای دنباله سوم از روی عددهای دنباله اول به دست آمده

بودند)؛ این دنباله، چنین است:

$$(a_1 a_3)(a_3 a_5) = a_1 a_5; (a_2 a_4)(a_4 a_6) = \\ = a_2 a_6; \dots; (a_N a_2)(a_2 a_4) = a_N a_4$$

در این جا، هر جمله دنباله، از حاصل ضرب دو جمله دنباله اول به دست آمده است، به نحوی که اندیس عامل دوم، چهار واحد از اندیس عامل اول بیشتر است. اگر چهار مرحله دیگر پیش برویم، به دنباله‌ای از عددها می‌رسیم که، جمله‌های آن، به همان ترتیبی از جمله‌های دنباله پنجم به دست آمده‌اند که، جمله‌های دنباله پنجم، از روی جمله‌های دنباله اول به دست آمده بود، یعنی

$$(a_1 a_5)(a_5 a_9) = a_1 a_9; (a_2 a_6)(a_6 a_{10}) = \\ = a_2 a_{10}; \dots; (a_N a_4)(a_4 a_8) = a_N a_8$$

هر جمله این دنباله، حاصل ضرب دو جمله از دنباله اول است، به نحوی که اندیس‌های دو جمله، ۸ واحد با هم اختلاف دارند. به‌طور کلی، بعد از 2^p مرحله، به دنباله‌ای به این صورت می‌رسیم:

$$a_1 a_{2^p+1}; a_2 a_{2^p+2}; \dots; a_N a_{2^p}$$

که هر عضو آن از ضرب دو عضو دنباله اول به دست آمده است و اختلاف اندیس‌های این دو عضو برابر است با 2^p . از این جا نتیجه می‌شود که اگر خود را به مرحله (2^k) ام برسانیم، دنباله‌ای از عددها به دست می‌آید که، هر عضو آن، از ضرب دو عضو دنباله اول، با اختلاف اندیس‌های $2^k = N$ به دست آمده است، یعنی به این دنباله

$$a_1 a_1 = a_1^2 = 1; a_2 a_2 = a_2^2 = 1; \dots; a_N a_N = a_N^2 = 1$$

که تنها شامل عددهای ± 1 است.

۱۳۰. قبل از همه روشن می‌کنیم که وقتی از دنباله عددهای

$a_1, a_2, \dots, a_n$ به دنباله عددهای $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ عبور می‌کنیم، تفاضل‌های بین عددها، به مفهومی «هموار» می‌شوند، به این معنا که ضمن

تبدیل يك دنباله به دنباله بعدی، تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین عددهای دنباله، افزایش پیدا نمی‌کند. در واقع، واسطه عددی دوعدد، از عدد بزرگتر تجاوز نمی‌کند (و وقتی با «بزرگترین» عدد برابر می‌شود که دو عدد با هم برابر باشند)؛ بنابراین بزرگترین عدد از دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n$ از بزرگترین عدد دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n$ تجاوز نمی‌کند: ضمن عبور از يك دنباله به دنباله بعدی، بزرگترین عدد فقط می‌تواند کوچکتر شود. در ضمن، بزرگترین عدد از عددهای a_i تنها وقتی می‌تواند با بزرگترین عدد از عددهای a_i برابر باشد که بزرگترین عدد A از دنباله a_i ، چندبار در دنباله a_i تکرار شده باشد؛ در این صورت، واسطه عددی دو عدد مجاور در a_i و a_n را هم مجاور به حساب می‌آوریم)، برابر با هریک از دو عدد می‌شود. علاوه‌براین، به سادگی روشن می‌شود که، اگر طولانی‌ترین زنجیره عددهای برابر در a_i ، طولی برابر k داشته باشد ($k < n$)، آن وقت در دنباله a_i ، زنجیری شامل $k-1$ عدد برابر به دست می‌آید.

مثلاً اگر $a_{i+1} = a_{i+2} = \dots = a_{i+k} = A$ (و در ضمن $a_i < A$ و $a_{i+k+1} > A$)، آن وقت $a'_{i+1} = a'_{i+2} = \dots = a'_{i+k-1} = A$ (در حالی که $a'_i < A$ و $a'_{i+k} > A$) بنابراین، بعد از $(k-1)$ مرحله، به دنباله $a_1^{(k-1)}, \dots, a_n^{(k-1)}$ می‌رسیم که، در بین جمله‌های آن، حتی دوعدد برابر A وجود ندارد که مجاور هم باشند و، سپس، در مرحله k ام، بزرگترین عدد از عددهای دنباله، کاهش پیدا می‌کند. به این ترتیب، اگر همه عددهای a_i با هم برابر نباشند بعد از گذشت $(n-1)$ مرحله حتماً، بزرگترین عدد دنباله، کوچکتر می‌شود.

باهمین روش روشن می‌شود که، ضمن عبور از يك دنباله، به دنباله بعدی، مقدار کوچکترین عدد دنباله، کاهش نمی‌یابد و اگر همه عددها با هم برابر نباشند، بعد از $(n-1)$ مرحله، مقدار کوچکترین عدد دنباله، بدون تردید بزرگتر می‌شود. اگر عددهای دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n$ و، همچنین همه عددهای دنباله‌های بعدی، عددهایی درست باشند، آن وقت «هموار شدن» آن‌ها به معنای کاهش مرتب تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین عدد دنباله

است و سرانجام درحالتی به پایان می‌رسد که، این تفاضل برابر صفر شود؛ و این، به معنای آن است که عددهای دنباله باهم برابر باشند. در واقع، اگر $\min a_i = a$ و $\max a_i = A$ و، در ضمن، $A - a = p$ عدد درستی باشد، وقتی که A کاهش و a افزایش می‌یابد، تفاضل آن‌ها به اندازه‌ای که از واحد کمتر نیست، کاهش پیدا می‌کند و، در نتیجه، بعد از p مرحله، این تفاضل برابر صفر می‌شود. بنابراین، مساله به این جا منجر می‌شود که ثابت کنیم، اگر عددهای اصلی $a_1, a_2, \dots, a_n$ باهم برابر نباشند، به دنباله‌ای از عددهای برابر نمی‌رسیم.

فرض می‌کنیم، عددهای $b_1 = a_1^{(m)}, b_2 = a_2^{(m)}, \dots, b_n = a_n^{(m)}$ از عددهای زیر به دست آمده باشند:

$$c_1 = a_1^{(m-1)}, c_2 = a_2^{(m-1)}, \dots, c_n = a_n^{(m-1)}$$

به نحوی که در دنباله اخیر، همه عددها با هم برابر نباشند.

روشن است که اگر نخواهیم عددهای b_i با هم برابر باشند، باید در دنباله عددهای $c_1, c_2, \dots$ ، عددهای با اندیس فرد با یکدیگر، و عددهای با اندیس زوج با یکدیگر برابر باشند، یعنی

$$c_1 = c_3 = c_5 = \dots = c; \quad c_2 = c_4 = c_6 = \dots = C \quad (*)$$

چون عددها را به صورت دوری در نظر می‌گیریم و c_1 را به دنبال c_n به حساب می‌آوریم ($c_{n+1} = c_1$)، در نتیجه، برابری‌های (*)، برای $c \neq C$ نمی‌توانند در حالت فرد بودن n ($n = 2l + 1$) برقرار باشند. بنابراین، کافی است حالتی را در نظر بگیریم که n ، عددی زوج است: $n = 2l$. یک مرحله به عقب برمی‌گردیم و عددهای

$$d_1 = a_1^{(m-2)}, d_2 = a_2^{(m-2)}, \dots, d_n = a_n^{(m-2)}$$

را که قبل از عددهای $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ قرار دارند، در نظر می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$c_1 = \frac{d_1 + d_2}{2}, c_3 = \frac{d_3 + d_4}{2}, \dots, c_{2l-1} = \frac{d_{2l-1} + d_{2l}}{2} \quad (**)$$

$$c_2 = \frac{d_2 + d_3}{2}, c_4 = \frac{d_4 + d_5}{2}, \dots, c_{2l} = \frac{d_{2l} + d_1}{2} \quad (***)$$

با توجه به برابری‌های (*) و (**) نتیجه می‌شود:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2l} = 2lc$$

و با توجه به برابری‌های (*) و (***):

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2l} = 2lc \neq 2lc$$

تناقض حاصل، حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۱۳۱. ببینیم، به ازای چه مقدارهایی از عددهای x, y, z ، امکان

انطباق سه‌تایی (x_n, y_n, z_n) بر سه‌تایی (x, y, z) وجود دارد؟ چون با آغاز از سه‌تایی (x_1, y_1, z_1) ، با عددهایی غیرمنفی سروکار داریم، می‌توان عددهای x, y, z را هم غیرمنفی گرفت. علاوه بر این، فرض می‌کنیم $x \geq y \geq z$ و $x_i \geq y_i \geq z_i$ ($i = 1, 2, \dots$) چون به ازای هر $i \geq 1$ داریم: $x_i = x_{i-1} - y_{i-1}$ (در این جا $x_0 = y_0$ به معنای x و y اند)، بنابراین باید داشته باشیم: $x \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots$ و اگر دست کم یکی از y_i ها مثبت باشد، آن وقت $x_{i+1} < x_i < x$ (و همچنین به ازای هر $i < j$ ، $x_j < x$). بنابراین، اگر $x_n = x$ آن وقت برای هر $i = 0, 1, \dots, n-1$ باید داشته باشیم $y_i = 0$. از این جا، چون $y = 0$ و $y_1 = 0$ ، پس یا $x = z$ (و سپس $z_1 = x - z = 0$ و یا $y = z = 0$ (و سپس $y_1 = y - z = 0$). به این ترتیب، اگر بخواهیم سه‌تایی (x, y, z) بر سه‌تایی (x_n, y_n, z_n) منطبق باشد، باید (به ازای $x = 1$) سه‌تایی اصلی به صورت $(1, 0, 1)$ یا $(1, 0, 0)$ باشد. حالت دوم را باید حذف کرد، زیرا از سه‌تایی $(1, 0, 0)$ به سه‌تایی $(1, 0, 1)$ می‌رسیم و، سپس از آن، هرگز سه‌تایی اصلی $(1, 0, 0)$ به دست نمی‌آید. بنابراین برای این که سه‌تایی (x, y, z) بر سه‌تایی (x_n, y_n, z_n) منطبق باشد باید سه‌تایی اصلی به صورت $(1, 0, 1)$ باشد.

۱۳۲. a) تفاضل دو عدد زوج یا دو عدد فرد عددی زوج و تفاضل دو

عددی که یکی زوج و دیگری فرد باشد، عددی فرد است. هر عدد زوج را با

حرف e و هر عدد فرد را با حرف o نشان می‌دهیم. برای عددهای اصلی A, B, C و D ، ترکیب مختلف پیش می‌آید:

$$1) e, e, e, e; \quad 2) e, e, e, o; \quad 3) e, e, o, o;$$

$$4) e, o, e, o; \quad 5) e, o, o, o; \quad 6) o, o, o, o$$

همه ترکیب‌های دیگر را می‌توان از این ۶ ترکیب، با تبدیل دوری، به دست آورد. ثابت می‌کنیم، در همه این حالت‌ها، حداکثر بعد از چهار مرحله، به گروهی از عددهای زوج می‌رسیم.

ترکیب ۱) شامل چهار عدد زوج است، از ترکیب ۶) بعد از یک مرحله، به ترکیب ۱) می‌رسیم؛ ترکیب ۴) در مرحله اول به ترکیب ۶) و در مرحله دوم به ترکیب ۱) می‌رسد؛ ترکیب ۳) در مرحله اول به ترکیب ۴)، از آنجا به ترکیب ۶) و سرآخر به ترکیب ۱) منجر می‌شود (سه مرحله)؛ سرانجام از ترکیب‌های ۲) یا ۵) بعد از مرحله اول به ترکیب ۳) می‌رسیم (در واقع ترکیب ۵) بعد از یک مرحله، به ترکیب ۳) با استفاده از تبدیل دوری می‌رسد) و، سپس، بعد از سه مرحله دیگر به تبدیل ۱) منجر می‌شود (روی هم چهار مرحله). به این ترتیب، با هر ترکیبی سروکار داشته باشیم، بعد از حداکثر چهار مرحله، به ترکیبی از چهار عدد زوج می‌رسیم.

اکنون، چهار عدد را زوج می‌گیریم (بخش‌پذیر بر ۲) با همان روش قبل، می‌توان ثابت کرد که، اگر چهار مرحله دیگر جلو برویم، به عددهایی می‌رسیم که بر ۴ بخش‌پذیرند و، سپس، بعد از ۴ مرحله دیگر، عددهایی از مضرب ۸ به دست می‌آید و غیره. به این ترتیب، اگر این روند را به همین ترتیب و به اندازه کافی ادامه دهیم به چهار عدد می‌رسیم که هر کدام از آن‌ها، باید بر هر توان دلخواهی از ۲ بخش‌پذیر باشد. از طرف دیگر، با توجه به قانون پیدا کردن چهارتایی‌های جدید، روشن است که، در هر چهارتایی، بزرگترین عدد (که مقداری مثبت است)، از بزرگترین عدد چهارتایی قبلی، کوچکتر است، بنابراین به ناچار باید سرانجام به گروهی از چهار عدد برابر صفر برسیم (وقتی همه عددهای A, B, C و D از 2^n کوچکتر باشند و، در ضمن، بخواهیم بعد از طی $4n$ مرحله، عددهای حاصل بر 2^n بخش‌پذیر باشند، به ناچار باید

به گروهی از چهار عدد برابر صفر رسیده باشیم).

یادداشت. با همین روش می‌توان ثابت کرد که، اگر به‌طور کلی با تعداد $m = 2^k$ عدد مثبت سروکار داشته باشیم، بعد از گذشت چند مرحله (به تعدادی متناهی) به گروهی از m عدد برابر صفر می‌رسیم. ولی اگر m برابر با توانی از ۲ نباشد، موقعیت فرق می‌کند. مثلاً اگر سه‌تایی (۵، ۵، ۴) را در نظر بگیریم، هرگز به سه‌تایی (۰، ۰، ۰) نخواهیم رسید:

۵	۵	۴
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۰
۰	۱	۱

و می‌بینیم که از سطر دوم به بعد، حالت تناوبی پیدا می‌کند و در سطرهای بعدی، همین چهار سطر (از سطر دوم تا سطر پنجم) تکرار می‌شود.

(b) وقتی با عددهای گویای $A = \frac{a_1}{a_0}$ ، $B = \frac{b_1}{b_0}$ ، $C = \frac{c_1}{c_0}$ ، $D = \frac{d_1}{d_0}$

سروکار داشته باشیم، با ضرب همه آن‌ها در عامل k (مثلاً برابر با کوچکترین مخرج مشترک کسرها) به عددهای درست $A' = kA$ ، $B' = kB$ ، $C' = kC$ و $D' = kD$ می‌رسیم که، بنا بر حالت قبل مساله، بعد از چند مرحله، به گروهی از چهار عدد برابر صفر می‌رسند. به این ترتیب، حکم مساله، در مورد عددهای گویا هم معتبر است.

وقتی که با عددهای حقیقی و مثبت A ، B ، C و D (که ممکن است گنگ هم باشند) سروکار داشته باشیم، ممکن است حکم مساله درست از آب در نیاید. برای اثبات، کافی است بتوانیم مثالی برای چهار عدد از این گونه پیدا کنیم.

فرض می‌کنیم $A = 1$ ، $B = x$ ، $C = x^2$ و $D = x^3$ ؛ در این جا، x را عددی مثبت و دلخواه گرفته‌ایم. روشن است که

$$A_1 = |x - 1|; B_1 = |x^2 - x| = x|x - 1|;$$

$$C_1 = |x^3 - x^2| = x^2|x - 1|; D = |x^3 - 1| = (x^2 + x + 1)|x - 1|$$

عددهای A, B, C, D ، باعددهای $1, x, x^2$ و $x^2 + x + 1$ متناسب‌اند.

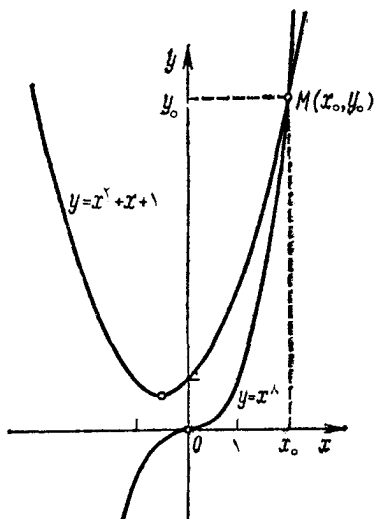
بنابراین، اگر x را طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم:

$$x^2 + x + 1 = x^2 \quad (*)$$

آن وقت، عددهای A, B, C, D ، باعددهای A_1, B_1, C_1, D_1 متناسب می‌شوند و روند تشکیل چهارتایی جدید نامعین می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱۳ دیده می‌شود، نمودار تابع‌های

$$y = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \quad y = x^2$$

یکدیگر را در نقطه $M(x_0, y_0)$ قطع می‌کنند. بنابراین $x = x_0$ ریشه معادله $(*)$ است. به این ترتیب، عددهای $A = 1, B = x_0, C = x_0^2$ و $D = x_0^3$ و $D = x_0^3 = x_0^2 + x_0 + 1$ (عددی گنگ است) به گونه‌ای هستند که حکم مساله ۱۳۲، (a) در مورد آن‌ها نادرست است.



شکل ۱۳

۱۳۳. a) به روشنی معلوم است که اگر ۱۰۰ عدد طبیعی نخستین را به صورت زیر مرتب کنیم، شرط مساله در مورد آن صدق می‌کند:

۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱
۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۴۰	۳۹	۳۸	۳۷	۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱
۵۰	۴۹	۴۸	۴۷	۴۶	۴۵	۴۴	۴۳	۴۲	۴۱	۶۰	۵۹	۵۸	۵۷	۵۶	۵۵	۵۴	۵۳	۵۲	۵۱
۷۰	۶۹	۶۸	۶۷	۶۶	۶۵	۶۴	۶۳	۶۲	۶۱	۸۰	۷۹	۷۸	۷۷	۷۶	۷۵	۷۴	۷۳	۷۲	۷۱
۹۰	۸۹	۸۸	۸۷	۸۶	۸۵	۸۴	۸۳	۸۲	۸۱	۱۰۰	۹۹	۹۸	۹۷	۹۶	۹۵	۹۴	۹۳	۹۲	۹۱

b) در دنباله‌ای که به ترتیبی دلخواه، از عددهای ۱ تا ۱۰۱ تشکیل داده‌ایم، جمله اول را $a_1^{(1)}$ می‌نامیم. سپس در بین جمله‌های بعدی دنباله، نخستین عددی را پیدا می‌کنیم که از $a_1^{(1)}$ بزرگتر باشد و آن را $a_2^{(1)}$ می‌نامیم. به همین ترتیب، نخستین جمله بزرگتر از $a_2^{(1)}$ را (که بعد از آن قرار دارد) $a_3^{(1)}$ می‌نامیم و غیره. اگر تعداد عددهایی که به این ترتیب انتخاب می‌شوند از ۱۰ بیشتر باشد:

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots, a_{i_1}^{(1)}, (i_1 > 10)$$

به جواب مساله رسیده‌ایم. در حالتی که $i_1 \leq 10$ ، همه عددهای $a_1^{(1)}$ ، $a_2^{(1)}$ ، $\dots$ ، $a_{i_1}^{(1)}$ را از دنباله خود کنار می‌گذاریم و، با همان روش قبل، دنباله صعودی جدید عددهای $a_1^{(2)}$ ، $a_2^{(2)}$ ، $\dots$ ، $a_{i_2}^{(2)}$ را از بین $101 - i_1$ عدد باقی‌مانده تشکیل می‌دهیم. با ادامه این روش، مجموعه‌ای شامل دنباله‌های صعودی، از بین ۱۰۱ عدد مفروض به دست می‌آید. اگر دست کم یکی از این دنباله‌ها، شامل بیش از ۱۰ عضو باشد، جواب مساله را پیدا کرده‌ایم. بنابراین، تنها این می‌ماند که حالتی را مورد بررسی قرار دهیم که، در آن، هیچ کدام از دنباله‌های مجموعه حاصل، بیش از ۱۰ عضو نداشته باشند.

تعداد همه عددهای طبیعی دنباله مفروض در این حالت، برابر است با ۱۰۱ و، بنابراین در حالت کلی (وقتی که تعداد عضوها در همه زيردنباله‌ها از ۱۰ بیشتر نباشد)، تعداد k دنباله صعودی که به ترتیب بالا انتخاب کرده‌ایم،

نمی‌تواند از ۱۱ کمتر باشد. ثابت می‌کنیم، در این حالت، می‌توان از بین ۱۰۱ عدد دنباله مفروض، دست کم ۱۱ عدد را انتخاب کرد که به ترتیب نزولی باشند. این عددها را، با آغاز از آخرین زیر دنباله، به روش زیر انتخاب می‌کنیم. آخرین جمله آخرین زیر دنباله (یعنی زیر دنباله k ام) را $a_i^{(k)}$ می‌گیریم. سپس، به سراغ زیر دنباله قبلی می‌رویم و آخرین جمله آن را در نظر می‌گیریم؛ این جمله از $a_i^{(k)}$ بزرگتر است، زیرا اگر $a_i^{(k)}$ از آخرین زیر دنباله قبلی بزرگتر بود، می‌بایستی به دنبال آخرین جمله زیر دنباله قبلی بیایید، بعد آخرین جمله زیر دنباله قبل از آن (زیر دنباله سوم از آخر) را در نظر می‌گیریم و غیره. با این روش، دنباله‌ای صعودی شامل k عدد به دست می‌آید که در دنباله مفروض از راست به چپ قرار دارند. به این ترتیب، چون $k \geq 11$ ، توانسته‌ایم دنباله‌ای نزولی از دنباله مفروض پیدا کنیم که، دست کم، ۱۱ عضو داشته باشد.

یادداشت. با همین روش می‌توان ثابت کرد که، دنباله شامل $(n-1)^2$ عدد درست مثبت را می‌توان طوری مرتب کرد که نتوان n جمله آن را طوری انتخاب کرد که به ردیف صعودی یا نزولی باشند. ولی در هر دنباله‌ای که به تعداد $(n-1)^2 > k$ عضو داشته باشد، همیشه می‌توان n جمله آن را پیدا کرد که به ترتیب صعودی یا نزولی قرار گرفته باشند.

۱۳۴. (a) حل اول. بزرگترین مقسوم علیه فرد هر یک از ۱۰۱ عدد انتخابی را در نظر می‌گیریم. این بزرگترین مقسوم علیه، از راه تقسیم عدد بر بزرگترین توان ممکن ۲ به دست می‌آید. از آن جا که تنها ۱۰۰ عدد فرد متفاوت وجود دارد که از ۲۰۰ تجاوز نمی‌کنند، بنابراین، بین این بزرگترین مقسوم علیه‌های فرد ۱۰۱ عدد، باید دو عدد برابر پیدا شود. یعنی بین ۱۰۱ عدد انتخابی، دو عدد وجود دارد که، ضمن تجزیه آن‌ها به عامل‌های اول، تنها در توانی از ۲ با هم تفاوت دارند؛ و روشن است که، بین این دو عدد، عدد بزرگتر بر عدد کوچکتر بخش پذیر است.

دو. اثبات را می‌توان با روش استقرای ریاضی انجام داد. ابتدا

ثابت می‌کنیم، اگر از بین چهار عدد ۱، ۲، ۳ و ۴، سه عدد به دلخواه انتخاب کنیم، آن وقت، در بین این سه عدد، حتماً یکی برد دیگری بخش پذیر است. درستی این حکم روشن است: اگر عدد ۱ در بین این سه عدد وجود داشته باشد، آن وقت هر یک از دو عدد دیگر بر ۱ بخش پذیر است؛ و اگر سه عدد را ۲ و ۳ و ۴ در نظر بگیریم، آن وقت ۴ بر ۲ بخش پذیر است.

اکنون فرض می‌کنیم، اگر $n+1$ عدد را از بین $2n$ عدد از ۱ تا $2n$ انتخاب کنیم، در بین آن‌ها دو عدد پیدا می‌شود که یکی برد دیگری بخش پذیر باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، در مجموعه‌ای هم که شامل $n+2$ عدد از بین $2(n+1)$ عدد طبیعی نخستین باشد، می‌توان دو عدد پیدا کرد که یکی از آن‌ها برد دیگری بخش پذیر باشد.

فرض می‌کنیم $n+2$ عدد را از بین $2(n+1)$ عدد طبیعی نخستین انتخاب کرده باشیم. اگر مجموعه‌ای $n+2$ عدد شامل $2n+1$ و $2n+2$ نباشد و یا تنها شامل یکی از آن‌ها باشد، آن وقت در این مجموعه، می‌توان $n+1$ عدد پیدا کرد که هیچ کدام از آن‌ها از $2n$ تجاوز نکنند و، بنابراین، طبق فرض استقرا، دو عدد در بین آن‌ها وجود دارد، به نحوی که یکی برد دیگری بخش پذیر است. اگر این $n+2$ عدد شامل هر دو عدد $2n+1$ و $2n+2$ و نیز شامل $n+1$ باشد، آن وقت روشن است که $2n+2$ بر $n+1$ بخش پذیر است. اگر مجموعه‌ای $n+2$ عدد شامل عددهای $2n+1$ و $2n+2$ باشد، ولی شامل عدد $n+1$ نباشد، دو عدد $2n+1$ و $2n+2$ را کنار می‌گذاریم و عدد $n+1$ را به آن‌ها اضافه می‌کنیم؛ $n+1$ عدد به دست می‌آید که هیچ کدام از $2n$ تجاوز نمی‌کند و، بنا بر فرض استقرا، یکی برد دیگری بخش پذیر است؛ اگر در بین این دو عدد، $n+1$ وجود نداشته باشد، حکم ثابت شده است، و اگر $n+1$ ، یکی از این دو عدد باشد، آن وقت $2n+2$ بر عدد دوم بخش پذیر است.

(b) صد عدد مورد نظر را به این ترتیب انتخاب می‌کنیم: عددهای فرد از ۱۰۱ تا ۱۹۹ (۵۰ عدد)؛ دو برابر همه عددهای فرد از ۵۱ تا ۹۹ (۲۵ عدد)؛ چهار برابر همه عددهای فرد از ۲۷ تا ۴۹ (۱۲ عدد)؛ هشت برابر همه عددهای

فرد از ۱۳ تا ۲۵ (۷ عدد)؛ شانزده برابر همه عددهای فرد از ۷ تا ۱۱ (۳ عدد)؛ و سرانجام، عددهای ۳×۳۲ ، ۵×۳۲ و ۱×۶۴ .

c) فرض می‌کنیم، بین عددهای از ۱ تا ۲۰۰، صد عدد طوری انتخاب کرده باشیم که هیچ کدام از آن‌ها، بر یکی دیگر بخش پذیر نباشد. ثابت می‌کنیم که در این صورت، هیچ یک از عددهای از ۱ تا ۱۵، بین عددهای انتخابی نیستند.

شبه حل مساله ۱۳۴، a) بزرگترین مقسوم علیه فرد هر یک از عددهای انتخاب شده را در نظر می‌گیریم. روشن است، این مقسوم علیه‌ها، مجموعه همه عددهای فرد را، که از ۲۰۰ تجاوز نکنند، تشکیل می‌دهند. به خصوص، عددهای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱ و ۱۳، عضو این مجموعه‌اند. چون فرض را بر این گرفته‌ایم که، بین این مقسوم علیه‌ها، دو عدد پیدا نمی‌شود که یکی از آن‌ها بر دیگری بخش پذیر باشد، بنابراین، عددی که شامل عامل ۲۷ است باید بر توانی از عدد ۲، که نمای آن کمتر از ۱ نیست، بخش پذیر باشد؛ همچنین، عدد شامل عدد فرد ۹، باید دست کم بر $۲^۲$ بخش پذیر باشد و عدد شامل عامل فرد ۳، دست کم بر $۲^۳$ و عدد شامل عامل فرد ۱ بر $۲^۴$ بخش پذیر باشد. به این ترتیب، عددهای $۱ \times ۲ = ۲$ ، $۳ \times ۲^۲ = ۱۲$ ، $۴ \times ۲ = ۸$ ، $۶ \times ۲^۳ = ۴۸$ و $۱۲ \times ۲^۲ = ۴۸$ نمی‌توانند در بین ۱۰۰ عدد انتخابی باشند. به همین ترتیب، اگر مقسوم علیه‌های فرد ۵، ۱۵ و ۴۵ را در نظر بگیریم، به این نتیجه می‌رسیم که عددهای $۵ \times ۲ = ۱۰$ و $۱۵ \times ۲ = ۳۰$ هم جزو عددهای انتخابی نیستند. با همین روش می‌توان تحقیق کرد که در بین عددهای انتخابی عدد ۷ هم وجود ندارد (برای این منظور، باید مقسوم علیه‌های فرد ۷ و ۲۱ را در نظر گرفت). علاوه بر این، با در نظر گرفتن مقسوم علیه‌های فرد ۱۱ و ۳۳، عدد ۱۱ و با در نظر گرفتن مقسوم علیه‌های فرد ۱۳ و ۳۹، عدد ۱۳ هم حذف می‌شود.

یادداشت. باروشی مشابه حل مساله ۱۳۴، می‌توان ثابت کرد که، اگر از بین $۲n$ (یا کمتر) عدد طبیعی نخستین، $n+۱$ عدد انتخاب کنیم، حتماً در بین عددهای انتخابی می‌توان دو عدد پیدا کرد، به نحوی که یکی از آن‌ها

بردیگری بخش‌پذیر باشد. درحالی‌که از بین آن‌ها، می‌توان n عدد (یا کمتر) به نحوی انتخاب کرد که، در بین آن‌ها، هیچ عددی بر عدد دیگر بخش‌پذیر نباشد. علاوه بر این، اگر $3^{k+1} < 2n < 3^k$ ، آن وقت از بین $2n$ عدد طبیعی نخستین، نمی‌توان n عدد طوری انتخاب کرد که دست‌کم یکی از آن‌ها از 2^k کوچکتر باشد و، در ضمن، در بین آن‌ها، هیچ عددی بر عدد دیگر بخش‌پذیر نباشد؛ کوچکترین عددی که، برای این منظور، می‌توان انتخاب کرد، عدد 2^k است. (مثلاً اگر بخواهیم از بین ۲۰۰ عدد طبیعی نخستین، ۱۰۰ عدد را طوری انتخاب کنیم که هیچ‌یک از آن‌ها بر دیگری بخش‌پذیر نباشد، باید کوچکترین عدد انتخاب شده از ۱۶ کمتر نباشد).

(۱۳۵. a) عددهای مفروض را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم، به نحوی که قدر مطلق باقی‌مانده حاصل از تقسیم، کوچکتر از ۵۰ و یا مساوی با آن باشد (یعنی، درحالی‌که باقی‌مانده مثبت حاصل از تقسیم بر ۱۰۰، عددی مثبت و بزرگتر از ۵۰ شد، باقی‌مانده منفی را در نظر می‌گیریم، یعنی عدد را به صورت $a = 100q - r$ می‌نویسیم که در آن $0 < r < 50$). درست ۵۱ عدد درست غیر منفی وجود دارد که از ۵۰ تجاوز نمی‌کنند (عددهای ۰، ۱، ۲، ...، ۵۰)، درحالی‌که تعداد باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم بر ۱۰۰، برابر ۵۲ است؛ به این ترتیب باید دو عدد در بین این باقی‌مانده‌ها وجود داشته باشد که قدر مطلق برابر دارند. اگر این دو باقی‌مانده هم علامت باشند، تفاضل عددهای متناظر با آن‌ها، و اگر با علامت‌های مختلف باشند، مجموع دو عدد متناظر با آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

(b) عددهائی مفروض را $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ می‌گیریم (که ترتیب آن‌ها را می‌توان دلخواه گرفت). مجموع‌های زیر را در نظر می‌گیریم،

$$s_1 = a_1 \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad \dots$$

$$\dots \quad s_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$$

تعداد این مجموع‌ها برابر است با ۱۰۰. اگر هیچ‌کدام از این مجموع‌ها بر ۱۰۰ بخش‌پذیر نباشد (یعنی در تقسیم بر ۱۰۰ به باقی‌مانده‌ای برابر صفر

نرسد)، آن وقت باید دست کم دوتا از این مجموع‌ها، در تقسیم بر ۱۰۰، به باقی مانده‌های برابر برسند (زیرا، اگر باقی مانده‌ای برابر صفر وجود نداشته باشد، تعداد باقی مانده‌های مختلف می‌تواند حداکثر برابر ۹۹ باشد). این دو مجموع را، که در تقسیم بر ۱۰۰ به باقی مانده‌های برابر رسیده‌اند، از هم کم می‌کنیم (مجموع کوچکتر را از مجموع بزرگتر) به مجموعی به صورت

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_m$$

می‌رسیم که بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

یادداشت. روشن است که باهمین روش می‌توان ثابت کرد که از بین هر n عدد طبیعی دلخواه می‌توان چند عدد پیدا کرد که، مجموع آن‌ها، مضربی از n باشد.

(c) در حالتی که هر ۱۰۰ عدد با هم برابر (و در نتیجه، هریک از آن‌ها برابر ۲) باشند، درستی حکم روشن است، زیرا در این حالت، مجموع هر ۵۰ عدد از آن‌ها برابر است با ۱۰۰.

اکنون مثلاً فرض می‌کنیم $a_1 \neq a_2$ و مجموع‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$s_1 = a_1; s_2 = a_2; s_3 = a_1 + a_2; s_4 = a_1 + a_2 + a_3; \dots$$

$$\dots; s_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{99}$$

شبهه حالت (b) نتیجه می‌گیریم که در بین این مجموع‌ها، یایکی برابر است با ۱۰۰ و یا دو مجموع را می‌توان پیدا کرد که، در تقسیم بر ۱۰۰، باقی مانده‌ای برابر داشته باشند. در حالت اخیر، تفاضل $s_i - s_j$ این دو مجموع، که خود مجموعی از چند عدد از بین ۱۰۰ عدد است، مضربی از ۱۰۰ می‌شود (توجه کنیم، چون $a_1 \neq a_2$ و a_1 و a_2 از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کنند، بنابراین مانده‌های حاصل از تقسیم $s_1 = a_1$ و $s_2 = a_2$ بر ۱۰۰ با هم برابر نیستند). از این گذشته، اگر مجموع بعضی از عددهای مفروض بر ۱۰۰ بخش پذیر باشد، از آن‌جا که این مجموع از ۲۰۰ کمتر است (زیرا، این مجموع، دست کم شامل یکی از

عددها، یعنی a_{100} نیست)، بنابراین برابر با ۱۰۰ است.

(d) ابتدا توجه می‌کنیم که، از بین هر چهار عدد درست همواره می‌توان دو عدد پیدا کرد که، مجموع آن‌ها، مضربی از ۲ باشد؛ همچنین از بین هر ۱۰ عدد درست، همیشه می‌توان پنج عدد پیدا کرد، به نحوی که مجموع آن‌ها مضربی از ۵ باشد. این قضیه‌های کمکی شبیه قضیه‌ای هستند که باید ثابت کنیم، ولی البته از آن ساده‌ترند (به جزاین، در حل مساله از آن‌ها استفاده خواهیم کرد). این ارزیابی‌ها را می‌توان دقیق‌تر کرد: بین هر ۳ عدد، دو عدد وجود دارد که مجموع آن‌ها بر ۲ بخش‌پذیر است، و بین هر ۹ عدد، پنج عدد وجود دارد که مجموع آن‌ها مضربی از ۵ است؛ و مساله خودمان را به این صورت درآوریم که از بین هر ۱۹۹ عدد، می‌توان ۱۰۰ عدد پیدا کرد که مجموع آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد (یادداشت پایان همین مساله را ببینید).

پشت‌سرهم، درستی سه گزاره را ثابت می‌کنیم:

۰۱. سه عدد a_1 ، a_2 و a_3 مفروض‌اند؛ در بین این سه عدد، ۲ عدد وجود دارد که مجموع آن‌ها، مضربی است از ۲. درستی این گزاره روشن است، زیرا می‌توان این دو عدد را طوری انتخاب کرد که هر دو زوج و یا هر دو فرد باشند (در بین سه عدد، همیشه می‌توان یا دو عدد زوج پیدا کرد و یا دو عدد فرد). در واقع، این استدلال ساده بر مبنای این واقعیت بنا نهاده شده است که اگر باقی‌مانده حاصل از تقسیم سه عدد a_1 ، a_2 و a_3 بر ۲ را به ترتیب برابر r_1 ، r_2 و r_3 فرض کنیم و، به جای عددها، این باقی‌مانده‌ها را در نظر بگیریم، آن وقت، وقتی مجموع دو باقی‌مانده مضربی از ۲ باشد، مجموع دو عدد متناظر آن‌ها، مضربی از ۲ خواهد بود. می‌دانید که هر یک از باقی‌مانده‌های r_1 ، r_2 و r_3 تنها می‌تواند برابر یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ باشد، بنابراین در بین آن‌ها همیشه دو عدد وجود دارد که، مجموع آن‌ها، مضربی از ۲ باشد.

۰۲. اکنون ۹ عدد a_1 ، a_2 ، $\dots$ ، a_9 را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم، در بین آن‌ها، پنج عدد پیدا می‌شود که مجموعی بخش‌پذیر بر ۵ دارند. دوباره به جای a_i ‌ها، r_i ‌ها، یعنی باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم آن‌ها بر ۵ در نظر می‌گیریم (۹، $\dots$ ، ۲، ۱). روشن است که هر r_i تنها می‌تواند یکی از

عددهای ۵، ۱، ۲، ۳ یا ۴ را قبول کند (و معقول این است که به جای عددهای a_i ، عددهای کوچکتر r_i را مورد استفاده قرار دهیم). علاوه بر این، اگر به هر ۹ باقی‌مانده r_i ، عددی مثل c را اضافه کنیم، یا عددی مثل c را از همه آن‌ها کم کنیم، باقی‌مانده حاصل از تقسیم هر پنج عدد دلخواه از بین آن‌ها، بر ۵، تغییر نمی‌کند (موافقت کنید، وقتی که بعد از «اضافه کردن» c یا $-c$ به باقی‌مانده‌ها، عددهای حاصل $r'_i = r_i \pm c$ را دوباره بر ۵ تقسیم کنیم و باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم را با همان نماد r_i نشان دهیم).

از تقسیم ۹ عدد مفروض بر ۵، باقی‌مانده‌هایی برای r_i به دست می‌آیند که هر کدام برابر ۵، ۱، ۲، ۳ یا ۴ هستند. به ندرت پیش می‌آید که تعداد باقی‌مانده‌های برابر صفر، بیشتر از دیگران باشد. فرض کنید، در بین باقی‌مانده‌های r_i ، عدد k بیش از دیگران ظاهر شده باشد، در این صورت، k را از همه r_i ‌ها کم می‌کنیم تا در بین عددهایی که به جای باقی‌مانده‌ها قبول می‌کنیم، عدد صفر از همه بیشتر ظاهر شده باشد. در ضمن، اگر تعداد این صفرها را برابر t بگیریم، باید داشته باشیم $2 \leq t \leq 9$ (۱) $t > 1$ ، زیرا در بین باقی‌مانده‌ها، دست کم یکی از آن‌ها، دوبار ظاهر می‌شود). همچنین باید توجه کنیم که، در حالت $t \geq 5$ ، دست کم پنج عدد بخش‌پذیر بر ۵ وجود دارد که، البته، مجموع آن‌ها هم بر ۵ بخش‌پذیر است.

دنباله استدلال ساده، ولی اندکی طولانی است. اگر $t = 2$ ، آن‌گاه هیچ کدام از ۹ باقی‌مانده r_i ، بیش از دوبار تکرار نشده است؛ از طرف دیگر، در بین ۹ باقی‌مانده r_i ، چهار باقی‌مانده وجود دارد که، هر کدام، دوبار تکرار شده است و تنها یکی از باقی‌مانده‌ها، یکبار ظاهر شده است. دوباره با استفاده از همان روش «اضافه کردن» c به باقی‌مانده‌ها، می‌توانیم باقی‌مانده‌ای را که تکرار نشده است، برابر با ۴ کنیم که، در این صورت، باقی‌مانده‌های جدید را می‌توان با عددهای مرتب‌شده $r_1, r_2, \dots, r_9$ نشان داد، به نحوی که به صورت

$$4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 0, 0$$

باشند و، مثلاً، مجموع $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5$ مضربی از ۵ است

(این مجموع، به‌طور ساده، برابر است با ۵).

اگر $t=3$ یا $t=4$ ، آن‌وقت فرض کنید $r_1=r_2=r_3=0$ و همهٔ عددهای $r_4, \dots, r_6, r_8, r_9$ مخالف صفر باشند (r_4 می‌تواند برابر صفر یا مخالف صفر باشد که برای ما مهم نیست). علاوه بر این، بین باقی‌مانده‌های r_4, r_5, r_6, r_8, r_9 (که مخالف صفرند) همیشه (بیش از يك) عدد وجود دارد، به نحوی که مجموع آن‌ها مضربی از ۵ باشد (راه حل b) از مسأله حاضر را ببینید؛ به‌یادداشت پایان حل مسأله هم توجه کنید). اکنون، اگر به مجموعهٔ این باقی‌مانده‌ها (که مجموعی مضرب ۵ دارند) به تعداد لازم از صفرهای متعلق به مجموعهٔ عددهای r_1, r_2, r_3 را اضافه کنیم، به مجموعه‌ای از پنج عدد می‌رسیم که مجموع آن‌ها بر ۵ بخش‌پذیر است.

۳. اکنون ثابت می‌کنیم، از هر مجموعهٔ دلخواه شامل ۱۹۹ عدد درست $a_1, a_2, \dots, a_{199}$ ، همیشه می‌توان ۱۰۰ عدد انتخاب کرد، به نحوی که مجموع آن‌ها مضربی از ۱۰۰ باشد. روشن است که، در بین ۱۹۹ عدد، همواره ۹۹ جفت عدد وجود دارد که، در هر جفت، یا هر دو عدد زوج‌اند و یا هر دو عدد فرد. ۹۸ جفت را می‌توان پشت‌سرهم از بین ۱۹۹ عدد انتخاب کرد، سه عدد باقی می‌ماند که، در بین آن‌ها، یا يك جفت فرد و یا يك جفت زوج پیدا می‌شود (۱° را در حل همین مسأله ببینید). این ۱۹۸ عدد را طوری مرتب می‌کنیم که در آن a_1 و a_2 ، a_3 و a_4 ، $\dots$ ، a_{197} و a_{198} ، باهم زوج و یا باهم فرد باشند. سپس، به جای دو عدد a_{2i-1} و a_{2i} ($i=1, 2, \dots, 99$)،

نصف مجموع آن‌ها، یعنی $b_i = \frac{a_{2i-1} + a_{2i}}{2}$ را قرار می‌دهیم (به جای دو

عدد، يك عدد). واضح است که اگر از بین ۹۹ عدد b_i بتوان ۵۰ عدد را طوری انتخاب کرد که مجموع آن‌ها مضربی از ۵۰ باشد، آن وقت، مجموع عددهای a_i متناظر این ۵۰ عدد b_i (مجموع اخیر، دو برابر مجموع قبلی است)، مضربی از ۱۰۰ خواهد بود. به این ترتیب، برای رسیدن به هدف، کافی است ثابت کنیم، برای هر انتخابی از ۹۹ عدد درست، می‌توان ۵۰ عدد از بین آن‌ها طوری در نظر گرفت که مجموعی مضرب ۵۰ داشته باشد. دوباره

و با همان روش قبل، از بین این ۹۹ عدد ۴۹ جفت انتخاب می‌کنیم، به نحوی که هر جفت به طور هم‌زمان فرد یا به طور هم‌زمان زوج باشند و آن‌ها را به صورت b_1 و b_2 ، b_3 و b_4 ، ...، b_{97} و b_{98} مرتب می‌کنیم (هر دو عدد b_{2k-1} و b_{2k} باهم زوج و یا باهم فردند). سپس، به جای دو عدد b_{2k} و b_{2k-1} يك عدد c_k را قرار می‌دهیم که برابر نصف مجموع b_{2k-1} و b_{2k} باشد. اکنون، اگر مجموع ۲۵ عدد از عددهای c_k ، بر ۲۵ بخش پذیر باشد، آن وقت مجموع ۵۰ عدد از عددهای b_i متناظر با آن‌ها، مضربی از ۵۰ خواهد بود. از این جا به بعد، دیگر نمی‌توانیم روند فوق را ادامه دهیم، زیرا ۲۵ عددی است فرد. بنابراین، در دنباله استدلال، به جای انتخاب جفت عددها مجموعه عددهای c_k را به پنج تایی‌ها تقسیم می‌کنیم.

قبلاً دیدیم که، از هر مجموعه شامل ۹ عدد، می‌توان پنج عدد انتخاب کرد، به نحوی که مجموع آن‌ها مضربی از ۵ باشد. بین ۴۹ عدد c_k ، پنج عدد وجود دارد (مثلاً c_1 ، c_2 ، c_3 ، c_4 و c_5) که مجموع آن‌ها مضرب ۵ باشد. از بین ۵ — ۴۹، یعنی ۴۴ عدد بقیه، می‌توانیم ۵ عدد دیگر انتخاب کنیم که مجموعی بخش پذیر بر ۵ داشته باشند. اگر این روند را ادامه دهیم، ۸ پنج تایی از عددها به دست می‌آید، به نحوی که در هر پنج تایی، مجموع پنج عدد بر ۵ بخش پذیر است. مجموعه‌ای شامل $۸ \times ۵ = ۴۰$ ، یعنی ۹ عدد باقی می‌ماند که، بنابر اثبات ۲°، می‌توان آخرین گروه پنج عددی را از بین آن‌ها انتخاب کرد. اکنون، به جای هر گروه پنج عددی از عددهای c_{5l-4} ، c_{5l-3} ، c_{5l-2} ، c_{5l-1} و c_{5l} ، واسطه حسابی آن‌ها

$$d_l = \frac{c_{5l-4} + c_{5l-3} + c_{5l-2} + c_{5l-1} + c_{5l}}{5}$$

را قرار می‌دهیم. روشن است که اگر ۵ عدد d_l پیدا کنیم که مجموع آن‌ها، بر ۵ بخش پذیر باشد، آن وقت مجموع همه عددهای متناظر آن در c_k مضربی از ۲۵ خواهد بود. و بنابر گزاره ۲° می‌دانیم که از بین پنج عدد d_1 ، d_2 ، ...، d_9 همیشه می‌توان پنج عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، مضربی از ۵ باشد.

یادداشت. باتوجه به گزاره‌های ۱° ، ۲° و ۳° و با توجه به حل (d)، می‌توان مسأله را تعمیم داد. می‌توان ثابت کرد که بین $۲n - ۱$ عدد درست، همیشه n عدد وجود دارد که، مجموع آن‌ها، بر n بخش پذیر باشد. البته، اثبات این حالت کلی، اندکی پیچیده‌تر از حالت‌های خاص $n=۲$ ، $n=۵$ و $n=۱۰۰$ است.

۱۳۶. چون مجموع همه عددها برابر واحد و بزرگترین آن‌ها برابر

$\frac{1}{2k}$ است، بنابراین تعداد عددهای مفروض از $2k$ کمتر نیست. برای اثبات

حکم مسأله، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. برای این منظور، فرض را بر این می‌گیریم که، در هر گروه k عددی از عددهای متعلق به دنباله مفروض، کوچکترین عدد، بیشتر از نصف بزرگترین عدد نباشد و، سپس، روشن می‌کنیم که این فرض، ما را به تناقض می‌کشاند. گروه k عددی $a_1, a_2, \dots, a_k$ را

در نظر می‌گیریم که، در آن، $a_1 = \frac{1}{2k}$ بزرگترین و a_k کوچکترین عدد در بین

آن‌هاست. بنا به فرض، باید داشته باشیم: $a_k \leq \frac{1}{4} a_1$. به همین ترتیب، برای

گروهی از k عدد $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k-1}$ باید داشته باشیم:

$a_k \leq \frac{1}{4} a_{2k-1} \leq \frac{1}{4} a_{2k-2} \leq \frac{1}{4} a_{2k-3} \leq \dots \leq \frac{1}{4} a_{2k-2}$ و برای k عدد $a_{2k-1}, a_{2k-2}, \dots, a_{3k-2}$ (این

گروه از عددها وقتی وجود دارد که $3k \geq n$) باید داشته باشیم

$$a_{3k-2} \leq \frac{1}{4} a_{2k-1} \leq \frac{1}{4} a_{2k-1}$$

و غیره. اگر همه این نابرابری‌ها را باهم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$S = a_1 + a_k + a_{2k-1} + a_{3k-2} + \dots \leq \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) a_1 = 2a_1 \quad (*)$$

تعداد جمله‌های $a_1, a_k, a_{2k-1}, \dots$ محدود، ولی تعداد جمله‌های

از علامت ضرب به علامت صفر را محاسبه کنیم. این تعداد برابر است با $p - a$.

به جز این، تعداد عبورها از يك صفر به يك علامت ضرب، برابر است با تعداد عبورهای از يك علامت ضرب به صفر، زیرا وقتی از يك صفر آغاز کرده‌ایم، وقتی به همان صفر برسیم، حرکت خود را قطع می‌کنیم. به این ترتیب باید داشته باشیم:

$$q - b = p - a \Rightarrow a - b = p - q$$

۱۳۸. روشن است که اگر، برای یکی از عددهای مفروض داشته باشیم $i_k = k$ ، آن وقت حاصل ضرب مورد نظر، برابر صفر (یعنی عددی زوج) می‌شود. همچنین برای دنباله

$i_1 = 2, i_2 = 1, i_3 = 4, i_4 = 3, \dots, i_{2m-1} = 2m, i_{2m} = 2m - 1$ (که تبدیلی است از عددهای ۱ و ۲، ۳ و ۴، ...، $2m - 1$ و $2m$)، حاصل ضرب

$$(1 - i_1)(2 - i_2)(3 - i_3) \dots (2m - i_{2m}) =$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \dots \cdot (-1) \cdot 1 = (-1)^m \cdot 1^m = (-1)^m$$

عددی فرد است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، برای هر عدد فرد $n = 2m + 1$ ، حاصل ضرب مورد نظر، همیشه عددی زوج است.

اثبات اول. تعداد کل عددهای زوج در دنباله ۱، ۲، ...، $2m + 1$

برابر است با m $\left(m < \frac{n}{2} = \frac{2m+1}{2}\right)$ ؛ این عددهای زوج عبارتند از

۲، ۴، ...، $2m$. بنابراین، تعداد عددهای زوج با اندیس فرد در دنباله

$i_1, i_2, \dots, i_n$ ، بیشتر از m نیست (زیرا تعداد کل عددهای زوج، برابر m

است)؛ به همین ترتیب، تعداد عددهای فرد با اندیس زوج در این دنباله، از m

بیشتر نیست (زیرا در آن، تنها m اندیس زوج وجود دارد). به این ترتیب،

مجموعه همه اندیس‌های نوع اول و نوع دوم، شامل همه $n = 2m + 1$

اندیس نخواهد شد. بنابراین اندیسی مانند l وجود دارد، به نحوی که در

مورد آن، i_1 و l ، یا هر دو زوج‌اند و یا هر دو فرد، یعنی تفاضل $i_1 - l$ عددی است زوج. در نتیجه، وقتی دست کم یکی از عامل‌های ضرب، عددی زوج باشد، حاصل ضرب هم عددی زوج خواهد بود.

اثبات دوم. مجموع همه عامل‌های ضرب برابر صفر است، زیرا

$$(1 - i_1) + (2 - i_2) + (3 - i_3) + \dots + (n - i_n) = \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + n) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 0$$

بنابراین، در حالت فرد بودن n ، همه عامل‌های ضرب نمی‌توانند عددهایی فرد باشند (زیرا اگر تعداد جمله‌های جمع فرد باشد و، در ضمن، هر جمله عددی فرد باشد، در مجموع هم عددی فرد به دست می‌آید). به این ترتیب، در بین عامل‌های ضرب، دست کم یک عامل زوج وجود دارد و، بنابراین، حاصل ضرب عددی زوج می‌شود.

۱۳۹. چون هر یک از حاصل ضرب‌های $x_1 x_2, x_2 x_3, \dots, x_n x_1$ برابر با $1 + 1$ یا $1 - 1$ است، بنابراین مجموع آن‌ها تنها وقتی برابر صفر می‌شود که تعداد جمله‌های برابر $1 + 1$ با تعداد جمله‌های برابر $1 - 1$ مساوی باشد، یعنی n باید عددی زوج باشد (تعداد این حاصل ضرب‌های دوبه‌دو، برابر n است): $n = 2m$. از آن‌جا که، از بین حاصل ضرب‌های $x_1 x_2, x_2 x_3, \dots, x_n x_1$ ، درست m جمله برابر $1 - 1$ است، بنابراین در دنباله $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ هم باید m تغییر علامت وجود داشته باشد و چون جمله اول و جمله آخر این دنباله یکی است، این تعداد تغییر علامت‌ها نمی‌تواند فرد باشد، یعنی $m = 2k$. بنابراین n مضربی از ۴ می‌شود: $n = 2m = 4k$.

۱۴۰. دو گروه را به این ترتیب انتخاب می‌کنیم: در گروه اول همه عددهایی را قرار می‌دهیم که، در نمایش دهدهی آن‌ها، تعداد رقم‌های ۱، عددی زوج باشد، و در گروه دوم، همه عددهایی که تعداد رقم‌های ۱، در هر کدام از آن‌ها عددی فرد باشد. A و B را دو عدد ۱۰ رقمی متعلق به یکی از گروه‌ها می‌گیریم. تعداد رقم‌های ۱ را، هم در A و هم در B برابر n می‌گیریم

($1 \leq n \leq 9$)؛ زیرا اگر $n = 0$ یا $n = 10$ ، آن وقت دو عدد A و B متفاوت نیستند). اگر رقم i ام عدد A برابر ۱، و رقم i ام عدد B برابر ۲ باشد، آن وقت رقم دیگری از ۱ (و مثلاً رقم j ام) باید برابر ۲، و رقم j ام عدد B برابر ۱ باشد، زیرا تعداد رقم‌های ۱ در هر دو عدد، یکی است. در این حالت، رقم‌های i ام و j ام مجموع $A+B$ برابر ۳ می‌شود (یعنی، تعداد رقم‌های ۳، در مجموع $A+B$ ، کمتر از ۲ نیست).

اکنون فرض کنید، عدد A شامل n رقم برابر ۱، و عدد B شامل m رقم برابر ۱ باشد و $m \neq n$ ؛ برای روشن بودن وضع فرض می‌کنیم $n > m$. عددهای m و n ، هر دو زوج یا هر دو فردند، زیرا A و B متعلق به یک گروه هستند، بنابراین $n - m \geq 2$. از این جا نتیجه می‌شود که، دو عدد k و l وجود دارند، به نحوی که رقم‌های k ام و l ام در A برابر ۱، و رقم‌های k ام و l ام در B برابر ۲ هستند؛ و این، به معنای آن است که در مجموع $A+B$ ، تعداد رقم‌های ۳، کمتر از ۲ نیست.

۱۴۱. پنج عدد ۱۰۰ رقمی مفروض را در یک ستون زیر هم می‌نویسیم و همه زوج رقم‌هایی را در نظر می‌گیریم که در هر مرتبه این عددها قرار دارند. در هر مرتبه ۵ رقم نوشته است و، روشن است که، با آن‌ها می‌توان ۱۰ زوج تشکیل داد و، بنابراین، تعداد کل این زوج رقم‌ها، برابر $100 \times 10 = 1000$ می‌شود. هر ستون مربوط به یکی از مرتبه‌های پنج عدد، باید شامل هر دو رقم ۱ و ۲ باشد. اگر در یک ستون، یک رقم ۱ و چهار رقم ۲ (یا یک رقم ۲ و چهار رقم ۱) وجود داشته باشد، آن وقت تعداد زوج رقم‌های یکسان در این ستون برابر ۶ می‌شود؛ اگر در یک ستون، دو رقم ۱ و سه رقم ۲ (یا دو رقم ۲ و سه رقم ۱) وجود داشته باشد، آن وقت، تعداد زوج رقم‌های یکسان در این ستون برابر ۴ می‌شود. بنابراین تعداد کل همه زوج رقم‌های یکسان (در تمامی ۱۰۰ مرتبه عددها می‌تواند در محدوده از $400 = 4 \times 100$ تا $600 = 6 \times 100$ باشد. از این جا نتیجه می‌شود: $40 \leq r \leq 60$.

یادداشت. روشن است، اگر با پنج عدد n رقمی سروکار داشته باشیم،

آن وقت عدد r (با توجه به تعریف مسأله)، در محدوده از $\frac{2n}{8}$ تا $\frac{3n}{8}$ قرار

می‌گیرد.

نابرابری‌های $\frac{2n}{5} \leq r \leq \frac{3n}{5}$ را می‌توان با استدلالی شبیه بالا

ثابت کرد. از خواننده می‌خواهیم، ارزیابی مشابهی برای عدد r ، در حالتی که تعداد عددها غیر از ۵ باشد، پیدا کند.

۱۴۲. کافی است نشان دهیم که با تکرار عملی که در صورت مسأله شرح داده شده است، می‌توان هر علامت مربوط به مجموعه اول را تغییر داد، بدون این که علامت‌های دیگری تغییر کند. در واقع، اگر بتوان هر علامت از مجموعه اول را، به تنهایی تغییر داد، آن وقت می‌توان علامت‌هایی از مجموعه اول را که با علامت‌های نظیر خود در مجموعه دوم فرق دارند، یکی یکی عوض کرد تا دو مجموعه برهم منطبق شوند.

ابتدا ثابت می‌کنیم که می‌توان دو علامت دلخواه از مجموعه اول را، به طور هم‌زمان، عوض کرد. فرض کنید بخواهیم علامت‌های i امین و j امین را در مجموعه اول (که آن‌ها را σ_i و σ_j می‌نامیم)، عوض کنیم. برای این منظور، گروه دلخواهی از ۱۰ علامت $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \dots, \sigma_{k_{10}}$ را در نظر می‌گیریم، ابتدا علامت‌های $\sigma_i, \sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \dots, \sigma_{k_{10}}$ (روی هم ۱۱ علامت) و، سپس علامت‌های $\sigma_j, \sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \dots, \sigma_{k_{10}}$ (باز هم ۱۱ علامت) را عوض می‌کنیم. روشن است که در نتیجه این دو عمل، تنها علامت‌های σ_i و σ_j عوض خواهند شد. اکنون فرض کنید بخواهیم علامت عضو σ_p از مجموعه اول را عوض کنیم، بدون این که دیگر علامت‌های این مجموعه تغییر کنند. ۱۰ علامت دلخواه $\sigma_{q_1}, \sigma_{q_2}, \dots, \sigma_{q_{10}}$ را در نظر می‌گیریم که با σ_p ، یک گروه ۱۱ عضوی تشکیل می‌دهند؛ علامت‌های این ۱۱ عضو را عوض می‌کنیم؛ سپس، باروشی که هم اکنون دیدیم، ابتدا علامت‌های دو عضو $\sigma_{q_1}, \sigma_{q_2}$ ، بعد علامت‌های دو عضو $\sigma_{q_4}, \sigma_{q_5}$ ، و سرانجام علامت‌های دو عضو $\sigma_{q_9}, \sigma_{q_{10}}$ را عوض می‌کنیم. به این ترتیب، در مجموعه اول، همه اعضوها به جز σ_p بدون تغییر می‌مانند. به این ترتیب، حکم مسأله ثابت می‌شود.

۱۴۳. فرض کنید، شطرنج باز در روز شنبه a_1 دور، در طول دو روز

اول هفته (شنبه و یکشنبه) a_2 دور، در طول سه روز اول a_3 دور بازی کرده باشد و به همین ترتیب، تا ۷۷ روز که تعداد بازی‌های او را در طول این ۷۷ روز a_{77} می‌گیریم.

این دنباله را در نظر می‌گیریم:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{77}, a_1 + 20, a_2 + 20, \dots, a_{77} + 20$$

این دنباله شامل $2 \times 77 = 154$ جمله است و هر جمله از ۱۵۲ تا $132 + 20 = 152$ تجاوز نمی‌کند (a_{77} برابر است با تعداد بازی‌هایی که در طول ۱۱ هفته انجام شده و، بنابراین، از $132 = 11 \times 12$ تجاوز نمی‌کند). در نتیجه، دست کم دو جمله از ۱۵۴ جمله این دنباله، با هم برابرند. این دو عدد برابر نمی‌توان در بین عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{77}$ پیدا کرد، زیرا شطرنج باز، هر روز، دست کم یک دور بازی می‌کند. به همین دلیل، در بین جمله‌های $a_1 + 20, a_2 + 20, \dots, a_{77} + 20$ هم، دو عدد برابر پیدا نمی‌شود. به این ترتیب، به ازای مقدارهایی از k و l باید داشته باشیم:

$$a_k = a_l + 20 \Rightarrow a_k - a_l = 20$$

یعنی در طول $k - l$ روز، از روز $(l + 1)$ ام تا روز k ام، شطرنج باز درست ۲۰ بازی را انجام داده است.

۱۴۴. (۱۰۴ حل اول). باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم عددهای دنباله زیر

بر عدد N را در نظر می‌گیریم:

$$1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{111\dots1}_N$$

این دنباله شامل N عدد است و تعداد باقی‌مانده‌های غیر صفر حاصل از تقسیم این عددها بر N ، نمی‌تواند بیش از $N - 1$ باشد. بنابراین، اگر هیچ یک از این عددها بر N بخش پذیر نباشند، آن وقت دو عدد در بین جمله‌های این دنباله وجود دارد (مثلاً L و K):

$$K = \underbrace{111\dots1}_k, \quad L = \underbrace{111\dots1}_l$$

که در تقسیم بر N ، باقی‌مانده‌هایی برابر می‌دهند؛ یعنی تفاضل

$$L - K = \underbrace{111 \dots 1}_{l \text{ مرتبه}} \underbrace{000 \dots 0}_{k \text{ مرتبه}}$$

بر N بخش پذیر است؛ و اگر N نسبت به ۱۰ اول باشد، روشن است که عدد $111 \dots 1$ بر N بخش پذیر خواهد بود.

راه حل دوم. کسر $\frac{1}{N}$ را به صورت کسر، دهدهی متناوب می‌نویسیم:

$$\frac{1}{N} = 0.\overline{b_1 b_2 \dots b_k (a_1 a_2 \dots a_l)}, \quad (\overline{a_1 a_2 \dots a_l} \text{ تناوب})$$

این کسر دهدهی را به کسر متعارفی تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1}{N} = \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_k a_1 a_2 \dots a_l} - \overline{b_1 b_2 \dots b_k}}{\underbrace{999 \dots 9}_{l \text{ مرتبه}} \underbrace{000 \dots 0}_{k \text{ مرتبه}}}$$

از این جا به سادگی نتیجه می‌شود که عدد $A = \underbrace{999 \dots 9}_{l \text{ مرتبه}} \underbrace{000 \dots 0}_{k \text{ مرتبه}}$ بر N

بخش پذیر است. علاوه بر این داریم: $A = 9A_1$ و

$$A_1 = \underbrace{111 \dots 1}_{l \text{ مرتبه}} \underbrace{000 \dots 0}_k$$

عدد A_1 را ۹ بار در کنار هم می‌نویسیم و آن را B می‌نامیم:

$$B = \underbrace{111 \dots 1}_{l \text{ مرتبه}} \underbrace{000 \dots 0}_k \underbrace{111 \dots 1}_l \underbrace{000 \dots 0}_k \dots$$

$$\dots \underbrace{111 \dots 1}_l \underbrace{000 \dots 0}_k$$

روشن است که B برابر است با حاصل ضرب A_1 در عدد

$$\underbrace{\underbrace{100\dots0}_{k+e} \underbrace{100\dots0}_{k+e} \dots \underbrace{100\dots0}_{k+e}}_{\text{مرتبۀ } A} 1$$

این عدد بر ۹ بخش‌پذیر است (مجموع رقم‌های آن، برابر است با ۹). بنابراین عدد B ، که تنها شامل رقم‌های ۰ و ۱ است بر $A_1 = 9A$ و در نتیجه بر N بخش‌پذیر است.

در حالتی که N و ۱۰ نسبت به هم اول باشند، آن وقت کسر $\frac{1}{N}$

به صورت

$$\frac{1}{N} = 0.(a_1 a_2 \dots a_l)$$

درمی‌آید که، در آن $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ یک دوره تناوب است و، بنابراین، عدد B ، تنها با رقم‌های برابر ۱ نوشته می‌شود.

یادداشت. روشن است که، اگر عدد A شامل p رقم برابر ۱ و عدد B شامل pq رقم ۱ باشد، آن وقت B بر A بخش‌پذیر است. بنابراین، اگر N و ۱۰ نسبت به هم اول باشند، بی‌نهایت عدد وجود دارد که در شرط مساله صدق می‌کنند و، به این ترتیب، حکم مساله در حالت کلی هم، درست است.

۱۴۵. $a_{N+1} = a_N + d$ و را دوجمله متوالی از یک تصاعد حسابی می‌گیریم. بنابراین، فاصله دو نقطه متناظر با عددهای a_N و a_{N+1} در روی محور عددی، برابر است با d ، قدر نسبت تصاعد. فرض کنید $d > 0$. اگر d عددی درست نباشد، آن وقت

$$\alpha = \{d\} = d - [d] > 0$$

(بخش کسری عدد d ؛ صفحه‌های ۴۴ و ۴۵ را ببینید) و اگر d عددی درست باشد، $\alpha = 1$ می‌گیریم (در هر حال، α برابر است با اختلاف بین عدد d و بزرگترین

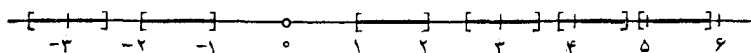
عدد درست کوچکتر از آن). هدف ما این است که، دستگاهی از پاره‌خط‌های راست و به طول واحد واقع بر محور عددی را پیدا کنیم، به نحوی که یکدیگر را نبوشانند و، دست کم، یکی از نقطه‌های A_N متعلق به یکی از پاره‌خط‌های دستگاه باشد. به زبان دیگر، باید ثابت کنیم که می‌توان حالتی را که، در آن، همه نقطه‌های A_N در حفاصل‌های این پاره‌خط‌ها قرار می‌گیرند، جدا کرد.

فرض کنید، این حالت نامساعد، پیش آمده باشد. بنابراین، هریک از پاره‌خط‌های $A_N A_{N+1}$ به طول d ، شامل تعداد درستی از پاره‌خط‌های دستگاه (که البته، طول کل آن‌ها هم عددی درست است) و تعدادی از حفاصل‌های بین این پاره‌خط‌ها (و همچنین دو بخش غیر کامل از این حفاصل‌ها، در ابتدا و انتهای پاره‌خط $A_N A_{N+1}$) است. روشن است که، طول کل این حفاصل‌ها (و دو بخش نا کامل ابتدا و انتها) نمی‌تواند که تراز α باشد. بنابراین، می‌توانیم دستگاهی از پاره‌خط‌های به طول واحد بسازیم که نقطه مشترکی نداشته باشند و، در ضمن، این ویژگی را داشته باشند که، برای عددهای به اندازه کافی بزرگ N ، عدد α همواره بزرگتر از مجموع طول‌های حفاصل‌ها (و دو بخش نا کامل این حفاصل‌ها) باشد. چنین دستگاهی، با شرط‌های مساله سازگار است.

باتوجه به آن چه گفتیم، دستگاهی از پاره‌خط‌ها را به این ترتیب می‌سازیم. پاره‌خط‌های به طول واحد را در جهت مثبت محور عددی و با آغاز از پاره‌خط (۱، ۲) به نحوی می‌سازیم که حفاصل‌های بین پاره‌خط‌های مجاور، یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{p}$ تشکیل دهند؛ به این ترتیب که بعد از پاره‌خط

(۱، ۲)، پاره‌خط (۳، ۴)، بعد پاره‌خط $(\frac{1}{p}, \frac{1}{p})$ ، بعد پاره‌خط $(\frac{3}{p}, \frac{3}{p})$

سپس پاره‌خط $(\frac{7}{p}, \frac{7}{p})$ و غیره را می‌سازیم (شکل ۱۴).



شکل ۱۴

در این ساختمان، هر حدفاصل پاره‌خط‌ها، نصف حدفاصل قبلی است، بنابراین مجموع طول‌های همه این حدفاصل‌ها، چنین است:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

و مجموع R_i از همه حدفاصل‌های بین پاره‌خط‌ها، با آغاز از حدفاصل $(i+1)$ ام

$$R_i = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i+2}} + \dots = \frac{1}{2^{i-1}}$$

این مجموع را، با بزرگ کردن i ، می‌توان تا حد دلخواه کوچک کرد. بنابراین، برای هر عدد $\alpha = \{d\}$ (یا $\alpha = 1$) متناظر با تصاعد با قدر نسبت مثبت d ،

همواره می‌توان اندیس i_0 را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $\alpha > \frac{1}{2^{i_0-1}}$ ،

یعنی $\alpha > R_i$. بنابراین، اگر N آن قدر بزرگ باشد که حدفاصل i_0 ام و همه

حدفاصل‌های سمت چپ A_N را دربرگیرد (و این، ممکن است، زیرا به ازای $d > 0$ ، دنباله $A_1, A_2, \dots, A_n$ محدود نیست). در این صورت پاره‌خط

$A_N A_{N+1}$ به طول d ، فقط می‌تواند شامل حدفاصل‌هایی باشد که از حدفاصل

$(i_0 + 1)$ ام آغاز شده‌اند و طول آن‌ها عبارت است از $\frac{1}{2^{i_0}}$ ، $\frac{1}{2^{i_0+1}}$ ، ...

چون مجموع R_{i_0} شامل طول‌های همه این حدفاصل‌ها از α کمتر است،

هر دو نقطه A_N و A_{N+1} نمی‌توانند به طور هم‌زمان متعلق به این حدفاصل‌ها

باشند، یعنی دست کم یکی از آن‌ها، به ناچار در درون یکی از پاره‌خط‌های دستگاه قرار می‌گیرد.

در حالت $d < 0$ ، کافی است دستگاه پاره‌خط‌ها را، که برای $d > 0$

ساخته‌ایم، به بخش منفی محور عددی ببریم. در واقع، این دستگاه را می‌توان

قرینه دستگاه پاره‌خط‌های قبلی (برای $d > 0$) نسبت به نقطه O (مبدأ

محور عددی) گرفت.

۱۴۶. از کسرهای مفروض، هیچ کدام برابر با عددی درست نیست

درواقع، اگر کسر به صورت $\frac{k(m+n)}{m}$ ($k=1, 2, \dots, m-1$) را

عددی درست فرض کنیم، به معنای آن است که عددهای m و $m+n$ مقسوم علیه‌های مشترکی دارند (k از m کوچکتر است و نمی‌تواند بر m بخش پذیر باشد). و در این صورت، عدد $n = (m+n) - m$ نمی‌تواند نسبت به m اول باشد. از این گذشته، در بین این کسرها، دو کسر برابر وجود ندارد، زیرا اگر مثلاً داشته باشیم:

$$\frac{k(m+n)}{m} = \frac{l(m+n)}{n}$$

(k برابر با یکی از عددهای $1, 2, \dots, m-1$ و l برابر یکی از عددهای

$1, 2, \dots, n-1$ است)، آن وقت باید داشته باشیم $\frac{k}{m} = \frac{l}{n}$ ، یعنی

$m = \frac{k}{l}n$ ؛ و این نشان می‌دهد که m و n نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند

(l کوچکتر از n است و نمی‌تواند بر n بخش پذیر باشد).

A را عدد درست و مثبتی می‌گیریم که از $m+n$ کوچکتر باشد.

کسرهای

$$\frac{m+n}{m}, \frac{2(m+n)}{m}, \dots, \frac{k(m+n)}{m}$$

وقتی از A کوچکترند که داشته باشیم $k(m+n) < Am$ ، یعنی وقتی که

$k < \frac{Am}{m+n}$. تعداد این گونه کسرها به روشنی برابر است با بخش درست

عدد $\frac{Am}{m+n}$ ، یعنی برابر با $\left[\frac{Am}{m+n} \right]$. به همین ترتیب، کسرهای

$$\frac{m+n}{n}, \frac{2(m+n)}{n}, \dots, \frac{l(m+n)}{n}$$

وقتی از A کوچکترند که $l < \frac{An}{m+n}$ و تعداد چنین کسرهایی برابر است با $\left[\frac{An}{m+n} \right]$. هر دو عدد $\frac{An}{m+n}$ و $\frac{Am}{m+n}$ نمی‌توانند عددهای درستی باشند، زیرا m ، n و $m+n$ ، دوبره‌دو نسبت به هم اول‌اند. مجموع این دو عدد برابر است با A :

$$\frac{Am}{m+n} + \frac{An}{m+n} = A$$

از طرف دیگر، اگر α و β عددهایی درست نباشند و مجموعی برابر عدد درست A داشته باشند، آن وقت

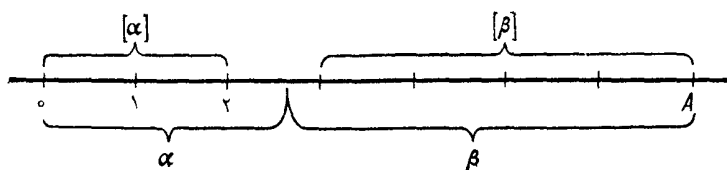
$$[\alpha] + [\beta] = A - 1$$

به درستی این مطلب می‌توانید با توجه به شکل ۱۵ قانع شوید. پس

$$\left[\frac{Am}{m+n} \right] + \left[\frac{An}{m+n} \right] = A - 1$$

از این جا نتیجه می‌شود که دقیقاً $A - 1$ کسر، از بین کسره‌های مفروض، درباره A (۰) از محور عددی قرار دارند.

از آنچه تا این جا گفته شد، می‌توان درستی حکم مسأله را نتیجه گرفت. در واقع، به ازای $A = 1$ معلوم می‌شود که، از بین کسره‌های مفروض، هیچ کدام درباره (۱) قرار نمی‌گیرد؛ به ازای $A = 2$ معلوم می‌شود که تنها یک کسر درباره (۲) قرار دارد و چون نمی‌تواند در بازه (۱) باشد، حتماً



در بازه (۲، ۱) واقع می‌شود؛ به ازای $A=3$ ، دو کسر را در بازه (۳، ۰) پیدا می‌کنیم و چون یکی از آن‌ها در بازه (۲، ۰) بود، بنابراین دیگری در بازه (۳، ۲) قرار دارد و غیره.

۱۴۷. راه حل اول. اگر عدد a_i در شرط $\frac{1000}{m+1} < a_i < \frac{1000}{m}$

صدق کند، تعداد کل عددهای درست و مثبت مضرب a_i که از ۱۰۰۰ تجاوز نکنند، برابر با m است $(a_i, 2a_i, 3a_i, \dots, ma_i)$. بنابراین، اگر k_1 را

تعدادی از عددهای مفروض، بگیریم که در شرط $\frac{1000}{2} < a_i < 1000$ صدق

می‌کنند، k_2 را تعداد عددهایی در شرط $\frac{1000}{3} < a_i < \frac{1000}{2}$ صدق می‌کند،

k_3 را تعداد عددهایی که با شرط $\frac{1000}{4} < a_i < \frac{1000}{3}$ سازگارند و غیره،

آن وقت، تعداد عددهای درست و مثبتی که از ۱۰۰۰ تجاوز نمی‌کنند و مضرب دست کم یکی از عددهای مفروض هستند، برابر است با مجموع

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots$$

بنابر شرط مساله، همه این مضرب‌ها متفاوت‌اند؛ بنابراین

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots < 1000$$

اکنون کافی است به این نکته توجه کنیم که، مجموع معکوس‌های عددهای مفروض، از مجموع

$$k_1 \frac{1}{1000} + k_2 \frac{1}{1000} + k_3 \frac{1}{1000} + \dots = \frac{2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \dots}{1000}$$

کوچکتر است (در این جا، به جای هر يك از k_1 عدد، بزرگترین آن‌ها یعنی

$$\frac{1000}{2}؛ \text{ به جای } k_2 \text{ عدد بعدی، } \frac{1000}{3}؛ \text{ به جای } k_3 \text{ عدد بعدی، } \frac{1000}{4}$$

و غیره را قرارداداده‌ایم). چون

$$\begin{aligned} & 2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \dots = \\ & = (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots) + (k_1 + k_2 + k_3 + \dots) = \\ & = (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots) + n < 1000 + n < 2000 \end{aligned}$$

بنابراین، مجموع عکس‌های مفروض، از ۲ کمتر است.

داده حل دوم. تعداد عددهای دنبالهٔ ۱، ۲، ...، ۱۰۰۰ که بر a_k

بخش پذیرند برابر است با بخش درست عدد $\frac{1000}{a_k}$ ، یعنی $\left[\frac{1000}{a_k} \right]$. چون

کوچکترین مضرب مشترک بین هر دو عدد از عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ از ۱۰۰۰ بزرگتر است، عددی در دنبالهٔ عددهای ۱، ۲، ...، ۱۰۰۰ وجود ندارد که، به طور هم‌زمان، بر دو عدد از عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ بخش پذیر باشد. مجموع تعداد عددهائی که از ۱۰۰۰ تجاوز نمی‌کنند و بر عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ بخش پذیرند، برابر است با

$$\left[\frac{1000}{a_1} \right] + \left[\frac{1000}{a_2} \right] + \left[\frac{1000}{a_3} \right] + \dots + \left[\frac{1000}{a_n} \right]$$

دنبالهٔ ۱، ۲، ...، ۱۰۰۰ شامل هزار عدد است، پس

$$\left[\frac{1000}{a_1} \right] + \left[\frac{1000}{a_2} \right] + \dots + \left[\frac{1000}{a_n} \right] \leq 1000$$

بخش درست هر عدد به اندازهٔ عددی کوچکتر از واحد، با خود کسر اختلاف دارد، بنابراین

$$\left[\frac{1000}{a_1} \right] > \frac{1000}{a_1} - 1, \quad \left[\frac{1000}{a_2} \right] > \frac{1000}{a_2} - 1, \quad \dots,$$

$$\dots, \quad \left[\frac{1000}{a_n} \right] > \frac{1000}{a_n} - 1$$

بنابراین

$$\left(\frac{1000}{a_1} - 1\right) + \left(\frac{1000}{a_2} - 1\right) + \dots + \left(\frac{1000}{a_n} - 1\right) < 1000$$

یعنی

$$\frac{1000}{a_1} + \frac{1000}{a_2} + \dots + \frac{1000}{a_n} < 1000 + n < 2000$$

که از آن جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$$

یادداشت. ارزیابی مجموع عکس‌های این n عدد را می‌توان دقیق‌تر کرد. مضرب‌هایی از عددهای مفروض را در نظر می‌گیریم که از ۵۰۰ تجاوز نمی‌کنند. به تعداد k_1 از عددهای مفروض، خودشان از ۵۰۰ بزرگ‌ترند؛

$k_2 + k_3$ عدد بزرگ‌تر از ۵۰۰ نیستند، ولی از $\frac{500}{2}$ بزرگ‌ترند؛ $k_4 + k_5$

عدد از $\frac{500}{2}$ بیشتر نیستند، ولی از $\frac{500}{3}$ بیشترند و غیره. اگر شیبه را محل اول

استدلال کنیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که، تعداد کل عددهای درست و مثبتی که از ۵۰۰ تجاوز نکنند و مضرب دست کم یکی از n عدد مفروض باشند، برابر است با

$$(k_2 + k_3) + 2(k_4 + k_5) + 3(k_6 + k_7) + \dots$$

و بنابراین

$$(k_2 + k_3) + 2(k_4 + k_5) + 3(k_6 + k_7) + \dots < 500$$

اکنون توجه می‌کنیم که تفاضل

$$500 - [(k_2 + k_3) + 2(k_4 + k_5) + 3(k_6 + k_7) + \dots]$$

برابر است با تعداد عددهای درستی که از ۵۰۰ تجاوز نمی‌کنند و، در ضمن، مضرب هیچ کدام از عددهای مفروض نیستند؛ و تفاضل

از ۱۰۰۰ تجاوز نمی‌کنند و، در ضمن، مضرب هیچ کدام از عددهای مفروض نیستند. در نتیجه

$$500 - [(k_1 + k_2) + 2(k_3 + k_4) + 3(k_5 + k_6) + \dots] < \\ < 1000 - (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots)$$

که از آنجا به دست می‌آید:

$$(k_1 + k_2) + 2(k_3 + k_4) + 3(k_5 + k_6) + \dots < 500$$

تنها این باقی می‌ماند که توجه کنیم:

$$2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + 5k_4 + 6k_5 + 7k_6 + \dots < \\ < (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5 + 6k_6 + \dots) + \\ + [(k_1 + k_2) + 2(k_3 + k_4) + 3(k_5 + k_6) + \dots] < \\ \dots < 1000 + 500 = 1500$$

در نتیجه، مجموع عکس‌های عددهای مفروض، که از $\frac{2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \dots}{1000}$

کمتر است، کوچکتر از $1\frac{1}{2}$ می‌شود.

اگر با همین روش، مضرب‌هایی از عددهای مفروض را در نظر بگیریم که از ۳۳۳ تجاوز نمی‌کنند، ثابت می‌شود که، مجموع عکس‌های عددهای مفروض، حتی از $1\frac{1}{5}$ هم کمتر است.

روشن است که، به جای عدد ۱۰۰۰ در این مسأله، می‌توان هر عدد دیگری را در نظر گرفت.

۱۴۸. کسر $\frac{q}{p}$ را به کسر دهدهی تبدیل می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{q}{p} = A / \overline{a_1 a_2 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_k a_1 a_2 \dots}$$

که در آن، A عددی است درست و $a_1, a_2, \dots, a_k$ رقم‌های يك دوره تناوب را تشکیل می‌دهند. روشن است که A ، برابر است با خارج قسمت حاصل از تقسیم q بر p ، یعنی

$$q = A \cdot p + q_1$$

که در آن، q_1 ، باقی‌مانده حاصل از تقسیم، از p کوچکتر است. سپس، $\overline{Aa_1}$ عبارت است از خارج قسمت حاصل از تقسیم $10q$ بر p ($\overline{Aa_1}$ شامل رقم‌های عدد A و رقم a_1 است):

$$10q = \overline{Aa_1} \cdot p + q_2, \quad (q_2 < p)$$

وبه همین ترتیب

$$10^2 q = \overline{Aa_1 a_2} \cdot p + q_3, \dots, 10^k q = \overline{Aa_1 a_2 \dots a_k} \cdot p + q_{k+1}, \dots$$

دوره تناوب دوم وقتی آغاز می‌شود که q_{k+1} ، (باقی‌مانده تقسیم $10^k q$ بر p)، با q_1 (باقی‌مانده تقسیم q بر p) برابر شود: $q_{k+1} = q_1$. بنابراین، عدد k ، یعنی تعداد رقم‌های يك دوره تناوب، برابر است با کوچکترین توان عدده 10 ، به نحوی که از تقسیم $10^k q$ بر p ، همان باقی‌مانده‌ای به دست آید که از تقسیم q بر p به دست آمده بود. و این، به معنای آن است که تفاضل $10^k q - q = (10^k - 1)q$ بر p بخش پذیر است و چون q و p نسبت به هم اول اند، بنابراین $10^k - 1$ بر p بخش پذیر است.

اکنون k را عددی زوج می‌گیریم: $k = 2l$. از بخش پذیری عدد

$$10^{2l} - 1 = (10^l - 1)(10^l + 1)$$

بر p نتیجه می‌شود که یا $10^l - 1$ و یا $10^l + 1$ بر p بخش پذیر است. ولی $10^l - 1$ نمی‌تواند بر p بخش پذیر باشد، زیرا بخش پذیری $10^l - 1$ بر p ، به معنای آن است که باقی‌مانده حاصل از تقسیم $10^l q$ بر p ، بر باقی‌مانده حاصل از تقسیم

q بر p منطبق می‌شود، یعنی دوره تناوب کسر $\frac{q}{p}$ باید شامل l رقم باشد (نه

$2l = k$ (رقم). به این ترتیب، $1 + 10^l$ مضربی است از p . در واقع، ثابت

کردیم که مجموع $\frac{q}{p} + 10^l \cdot \frac{q}{p}$ عددی است درست. سپس، داریم:

$$\frac{10^l q}{p} + \frac{q}{p} = \overline{Aa_1 a_2 \dots a_l / a_{l+1} a_{l+2} \dots a_{2l} a_1 a_2 \dots a_l \dots} +$$

$$+ \overline{Aa_1 a_2 \dots a_l a_{l+1} \dots a_{2l} \dots}$$

بنابراین، مجموع کسرهای دهدهی

$$0 / \overline{a_{l+1} a_{l+2} \dots a_{2l} a_1 a_2 \dots a_l \dots} + 0 / \overline{a_1 a_2 \dots a_l a_{l+1} \dots a_{2l} \dots}$$

عددی است درست. چون هر یک از این دو کسر از واحد کوچکتر و از صفر بزرگتر است، بنابراین مجموع آن‌ها، برابر است با $1 = 0.9999\dots$ و تنها وقتی امکان دارد که داشته باشیم:

$$a_1 + a_{l+1} = 9, a_2 + a_{l+2} = 9, \dots, a_l + a_{2l} = 9$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2l}}{2l} = \frac{9}{2} = 4.5$$

در حالت فرد بودن عدد k ، روشن است که برابری

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} = \frac{9}{2}$$

نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا مخارج کسر سمت چپ برابری بر ۲ بخش‌پذیر نیست.

۱۴۹. اگر تعداد رقم‌های دوره تناوب را در کسرهای $\frac{a_n}{p^n}$ و $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$

به ترتیب برابر k و l بگیریم، آن وقت باید $10^k - 1$ بر p^k و $10^l - 1$ بر p^{l+1} بخش‌پذیر باشد (حل مسأله قبل را ببینید). اکنون این تفاضل را در

نظر می‌گیریم:

$$(10^l - 1) - (10^k - 1) = 10^k(10^{l-k} - 1)$$

از بخش‌پذیری این تفاضل بر p^n نتیجه می‌شود که $10^{l-k} - 1$ بر p^n بخش‌پذیر است. d را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $l-k$ و k می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که، از بخش‌پذیری $10^{l-k} - 1$ و $10^k - 1$ بر p^n می‌توان نتیجه گرفت که $10^d - 1$ بر p^n بخش‌پذیر است. فرض می‌کنیم $l-k = qk + r$. خواهیم داشت:

$$10^{l-k} - 1 = 10^{qk+r} - 1 = 10^r(10^{qk} - 1) + (10^r - 1)$$

چون $10^{qk} - 1 = (10^k)^q - 1$ بر $10^k - 1$ بخش‌پذیر است، بنابراین $10^k - 1$ بر $10^{qk} - 1$ بخش‌پذیر می‌شود و، در نتیجه، $10^r - 1$ هم بر p^n بخش‌پذیر خواهد بود. اگر r_1 باقی‌مانده حاصل از تقسیم k بر r باشد، به همان ترتیب، ثابت می‌شود که $10^{r_1} - 1$ هم بر p^n بخش‌پذیر است. همچنین اگر r_2 باقی‌مانده تقسیم r_1 بر r و r_3 باقی‌مانده تقسیم r_2 بر r باشد، $10^{r_2} - 1$ و $10^{r_3} - 1$ بر p^n بخش‌پذیر می‌شوند و غیره. در ضمن، به سادگی می‌توان نشان داد که دنباله عددهای $r, r_1, r_2, r_3, \dots$ به عدد d ختم می‌شود. در واقع، چون $l-k$ و k بر d بخش‌پذیرند، عدد $r = (l-k) - qk$ هم بر d بخش‌پذیر می‌شود؛ چون k و r مضربی از d هستند، r_1 هم مضربی از d می‌شود و غیره؛ بنابراین همه عددهای این دنباله، بر d بخش‌پذیرند؛ از طرف دیگر، اگر r_k آخرین جمله این دنباله باشد (یعنی r_{k-1} بر r_k بخش‌پذیر باشد)، آن وقت $r_{k-1}, r_{k-2}, r_{k-3}, \dots$ بر r_k بخش‌پذیر می‌شوند و، سرانجام، k و $l-k$ مضرب‌هایی از r_k خواهند بود. در نتیجه نابرابری $r_k > d$. این واقعیت را که d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $l-k$ و k است، نقض می‌کند. بنابراین تعریف، k کوچکترین عددی است که، به ازای آن، $10^k - 1$ بر p^n بخش‌پذیر است. بنابراین، از بخش‌پذیری $10^d - 1$ بر p^n نتیجه می‌شود $d = k$ و، در ضمن، $l-k$ مضربی است از k ، یعنی l مضربی است از k و $l = km$. اکنون عبارت $10^l - 1$ را تجزیه می‌کنیم:

$$10^l - 1 = 10^{km} - 1 =$$

$$= (10^k - 1)(10^{(m-1)k} + 10^{(m-2)k} + \dots + 10^k + 1)$$

چون $10^k - 1$ بر p^n بخش‌پذیر است، بنابراین از تقسیم 10^k بر p^n ، باقی‌مانده‌ای برابر واحد به دست می‌آید و، در نتیجه باقی‌مانده حاصل از تقسیم $10^{2k} = 10^k \cdot 10^k$ یا $10^{3k} = 10^{2k} \cdot 10^k$ بر p^n ، برابر واحد می‌شود، یعنی باقیمانده حاصل از تقسیم مجموع داخل پرانتز دوم در سمت راست برابری بر p^n برابر است با m ، بنابراین اگر $10^k - 1$ بر p^{n+1} بخش‌پذیر نباشد، آن وقت کوچکترین عدد l که، به‌ازای آن، $10^l - 1$ بر p^{n+1} بخش‌پذیر شود، برابر است با pk و عدد $10^{pk} - 1$ بر p^{n+1} بخش‌پذیر و بر p^{n+2} بخش‌ناپذیر است (زیرا عبارت داخل پرانتز بر p^2 بخش‌پذیر نیست)؛ از همین جا درستی حکم مساله روشن می‌شود.

۱۵۰. a عدد چهار رقمی مطلوب را به صورت $\overline{aabb}$ می‌گیریم. داریم:

$$N = \overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$$

N مجذور کامل است؛ از بخش‌پذیری N بر ۱۱ نتیجه می‌شود که این عدد

باید بر ۱۲۱ بخش‌پذیر باشد، یعنی عدد $100a + b$ بر $\frac{N}{11}$ بخش‌پذیر

است. به‌جز این داریم:

$$100a + b = 99a + (a + b) = 11 \times 9a + (a + b)$$

یعنی $a + b$ مضربی است از ۱۱؛ a مخالف صفر و هر یک از دو رقم a و b کوچکتر از ۱۰ هستند، بنابراین $1 \leq a + b \leq 18$ ، یعنی $a + b = 11$. از این جا

$$100a + b = 11 \times 9a + 11 = 11(9a + 1)$$

در نتیجه

$$\frac{N}{121} = \frac{100a + b}{11} = 9a + 1$$

چون N مجذور کامل است، عدد $\frac{N}{۱۲۱}$ هم باید مجذور کامل باشد. از بین عددهای به صورت $۹a+۱$ ($۱ \leq a \leq ۹$)، تنها عدد $۹ \times ۷ + ۱ = ۶۴$ مجذور کامل است و بنابراین

$$N = ۱۲۱ \times ۶۴ = ۷۷۴۴ = ۸۸^۲$$

(b) عدد مطلوب را $\overline{ab}$ می‌گیریم. بنا بر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (۱۰a + b) + (۱۰b + a) = ۱۱(a + b) = k^۲$$

روشن است که باید $a + b$ بر ۱۱ بخش پذیر باشد و چون $a + b \leq ۱۸$ ، پس $a + b = ۱۱$ که، در این صورت $k^۲ = ۱۲۱$. مساله ۸ جواب دارد:

$$۲۹, ۳۸, ۴۷, ۵۶, ۶۵, ۷۴, ۸۳, ۹۲$$

۱۵۱. عدد دو رقمی سمت چپ عدد N را a و عدد دو رقمی سمت راست عدد N را b می‌نامیم، یعنی $N = ۱۰۰a + b$. بنا به شرط مساله باید داشته باشیم:

$$۱۰۰a + b = (a + b)^۲$$

از این جا به دست می‌آید:

$$۹۹a = (a + b)^۲ - (a + b) = (a + b)(a + b - ۱) \quad (*)$$

بنابراین، عدد $(a + b)(a + b - ۱)$ مضربی است از ۹۹. پنج حالت ممکن را بررسی می‌کنیم.

$$۱^{\circ}. a + b = ۹۹k \text{ و } a + b - ۱ = \frac{a}{k} \text{؛ } a \text{ و } b \text{ عددهایی دو رقمی اند،}$$

بنابراین $k \leq ۲$ ، به ازای $k = ۲$ بلافاصله به دست می‌آید $a = b = ۹۹$ که در معادله (*) صدق نمی‌کنند. در نتیجه $k = ۱$ ، $a + b = ۹۹$ و $a = a + b - ۱$ ، یعنی $b = ۱$. از این جا $N = ۹۸۰۱$.

۲^۰. $a + b = ۱۱m$ ، $a + b - ۱ = ۹n$ و $mn = a$. در این حالت به دست می‌آید: $۹n = ۱۱m - ۱$. از بخش پذیری $۱۱m - ۱$ بر ۹ به این

نتیجه می‌رسیم که، باقی‌مانده حاصل از تقسیم m بر ۹، باید برابر ۵ باشد. (آزمایش کنید: اگر باقی‌مانده حاصل از تقسیم m بر ۹ را، عددی غیر از ۵ بگیریم، آن وقت $11m - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر نیست). به این ترتیب $m = 9t + 5$ ، از این جا $9n = 99t + 54$ و $n = 11t + 6$ داریم:

$$a = mn = (9t + 5)(11t + 6) = 99t^2 + 109t + 30$$

چون a عددی دو رقمی است، بنابراین $t = 0$ و $a = 30$. از آن جا چون $a + b = 11m = 55$ پس $b = 25$ و $N = 3025 = (30 + 25)^2$.
۳. $a + b = 9m$ ، $a + b - 1 = 11n$ و $mn = a$. با روشی شبیه حالت قبل به دست می‌آید:

$$N = 2025 = (20 + 25)^2$$

۴. $a + b = 33m$ و $a + b - 1 = 3n$ یا $a + b = 3m$ و $a + b - 1 = 33n$. در این حالت، جوابی به دست نمی‌آید، زیرا $a + b - 1$ نسبت به هم اول اند و نمی‌توانند مقسوم علیه مشترکی داشته باشند.

۵. $a + b - 1 = 99k$ و $a + b = \frac{a}{k}$. در این حالت به دست می‌آید:

$$a + b - 1 = 99, a + b = 100, a = \frac{(a+b)(a+b-1)}{99} = 100$$

که ممکن نیست (زیرا a ، عددی است دو رقمی). مساله سه جواب دارد.

$$2025, 3025, 9801$$

۱۵۲. a هر عدد چهار رقمی با رقم‌های زوج، با یکی از رقم‌های ۲، ۴، ۶ یا ۸ آغاز می‌شود (عدد، نمی‌تواند با ۰ آغاز شود)؛ یعنی این عددها بین ۱۹۹۹ و ۳۰۰۰، یا بین ۳۹۹۹ و ۵۰۰۰، یا بین ۵۹۹۹ و ۷۰۰۰ و یا بین ۷۹۹۹ و ۹۰۰۰ قرار دارند. به این ترتیب، جذر عدد بین ۴۴ و ۵۵، یا بین ۶۳ و ۷۱، یا بین ۷۷ و ۸۴ و یا بین ۸۹ و ۹۵ قرار می‌گیرد. اگر این عدد

دو رقمی را $\overline{xy}$ بگیریم، چون

$$(10x + y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$$

بنابراین، رقم دهگان در عدد $(10x + y)^2$ و رقم دهگان در عدد y^2 باید یا هر دو زوج و یا هر دو فرد باشند ($0 \leq y \leq 9$). ولی بنابه شرط مساله، همه رقم‌های $(10x + y)^2$ ، عددهایی زوج اند، بنابراین رقم y (رقم سمت راست جذر عدد مطلوب) نمی‌تواند برابر ۴ یا ۶ باشد. به این ترتیب، جذر عدد مطلوب را، باید در بین ۱۰ عدد زیر جست‌وجو کرد:

$$48, 50, 52, 68, 70, 78, 80, 82, 90, 92$$

آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که، از این عددها، تنها چهار عدد با شرط‌های مساله سازگارند:

$$68^2 = 6424, 78^2 = 6084, 80^2 = 6400, 92^2 = 8464$$

(b) با روشی مشابه حالت (a) ثابت می‌شود که عددی چهار رقمی وجود ندارد که مجذور کامل باشد و، در ضمن، هر چهار رقم آن، عددهایی فرد باشند.

(۱۵۳. a) عدد مجهول را $N = \overline{xyz}$ می‌گیریم. بنابر شرط باید داشته باشیم:

$$100x + 10y + z = x! + y! + z!$$

چون $7! = 5040$ ، عددی چهار رقمی است، پس هیچ کدام از رقم‌های عدد N از ۶ بزرگتر نیست. از این جا معلوم می‌شود که $N < 700$ ، زیرا اگر هر سه رقم هم برابر ۶ باشند، آن وقت $100x + 10y + z$ برابر ۶۶۶ می‌شود، ولی در این صورت، هیچ رقمی نمی‌تواند از ۵ بزرگتر باشد، زیرا $700 > 720 = 6!$. به این ترتیب، دست کم یک رقم عدد باید برابر ۵ باشد، زیرا $3 \times 4! = 72$ می‌شود که دو رقمی است. روشن است که x نمی‌تواند برابر ۵ باشد، زیرا

$$3 \times 5! = 360 < 500$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که x نمی‌تواند بزرگتر از ۳ باشد. x حتی برابر ۳ هم نیست، زیرا

$$۳! + ۵! + ۵! = ۲۴۶ < ۳۰۰$$

عدد ۲۵۵ با شرط مساله سازگار نیست و اگر تنها یکی از دو رقم راست برابر ۵ باشد، آن وقت مجموع فاکتوریل‌های رقم‌های آن به ۲۰۰ نمی‌رسد:

$$۲! + ۵! + ۴! = ۱۴۶ < ۲۰۰$$

به‌این ترتیب $x = ۱$. و از دو رقم دیگر، یکی برابر ۵ است، ولی

$$۱! + ۵! + ۴! = ۱۴۵ < ۱۵۰$$

پس y از ۴ تجاوز نمی‌کند؛ یعنی $z = ۵$ ، دیگر می‌توان جواب را به‌سادگی نوشت:

$$N = ۱۴۵$$

(b) عدد مجهول N نمی‌تواند بیش از سه رقم داشته باشد، زیرا $۳۲۴ = ۹^۲ + ۴$ ، عددی است سه رقمی. بنابراین $N = ۱۰۰x + ۱۰y + z$ و x و y و z رقم‌های عددند و در این جا x هم می‌تواند برابر صفر باشد). بنا بر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$۱۰۰x + ۱۰y + z = x^۲ + y^۲ + z^۲$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$(۱۰۰ - x)x + (۱۰ - y)y = z(z - ۱) \quad (*)$$

از برابری (*) روشن می‌شود که $x = ۰$ ، زیرا $y(۱۰ - y) \geq ۰$ و به‌ازای $x \geq ۱$ داریم $x(۱۰۰ - x) > ۹۰$ ، درحالی که سمت راست برابری (*) از $۷۲ = ۸ \times ۹$ بزرگتر نیست (چون $z \leq ۹$). به‌این ترتیب، برابری (*) به صورت

$$(۱۰ - y)y = z(z - ۱)$$

درمی‌آید. به‌سادگی قابل تحقیق است که برابری اخیر هم نمی‌تواند برای

رقم‌های y و z برقرار باشد، مگر برای $y=0$. ولی در این صورت به دست می‌آید $z=1$. تنها يك عدد با شرط مساله سازگار است:

$$N=1$$

(۱۵۴. a) روشن است که عدد مجهول N نمی‌تواند بیش از ۴ رقم داشته باشد، زیرا مجموع رقم‌های يك عدد پنج رقمی بیش از $5 \times 9 = 45$ نیست و $45^2 = 2025$ يك عدد چهاررقمی است، علاوه بر این، چون $4 \times 9 = 36$ و $36^2 = 1296$ ، بنابراین اولین رقم عدد N (در سمت چپ)، نمی‌تواند از واحد بزرگتر باشد. ولی اگر N را چهاررقمی بگیریم، چون

$$1 + 3 \times 9 = 28 \text{ و } 28^2 = 784$$

يك عدد سه رقمی است، بنابراین عدد N از سه رقم بیشتر ندارد:

$$N = 100x + 10y + z \quad (0 \leq x, y, z \leq 9)$$

شرط مساله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$100x + 10y + z = (x + y + z)^2$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$99x + 9y = (x + y + z)^2 - (x + y + z) =$$

$$= (x + y + z)(x + y + z + 1)$$

یعنی یا $x + y + z$ و یا $x + y + z + 1$ باید مضربی از ۹ باشد (چون هر دو عدد متوالی نسبت به هم اول اند، بنابراین هر دو عدد $x + y + z$ و $x + y + z + 1$ نمی‌توانند مضربی از ۳ باشند)؛ علاوه بر این $1 \leq x + y + z \leq 27$.

شش حالت ممکن را، به طور جداگانه، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱. $x + y + z - 1 = 0$ ، بنابراین $99x + 9y = 0$ ، یعنی

$$x = y = 0 \text{ و } z = 1 \text{ و } N = 1$$

۲. $x + y + z = 9$ ، بنابراین $99x + 9y = 9 \times 8 = 72$ و از

آن‌جا

$$x=0, y=1, z=1; N=11=(1+1)^2$$

۳. $x+y+z-1=9$ ، پس $9 \times 10 = 90$ ، یعنی $99x+9y=9 \times 10=90$ ، $x=0$ و $y=10$ که ممکن نیست

$$4. \quad 99x+9y=18 \times 17=306, \quad x+y+z=18$$

یعنی (غیرممکن) $x=3, y=1, z=18-(3+1)=14$

$$5. \quad x+y+z-1=18, \quad 99x+9y=19 \times 18=342, \quad x=3, y=5, z=19-(3+5)=11$$

(غیرممکن)

۶. $x+y+z=27$ ، یعنی $x=y=z=9$ و روشن است که عدد ۹۹۹ با شرط مساله سازگار نیست.

به این ترتیب، مساله دو جواب دارد: $N=1$ و $N=11$.

(b) مکعب يك عدد سه رقمی بیش از ۹ رقم ندارد، بنابراین مجموع رقم‌های مکعب يك عدد سه رقمی، نمی‌تواند از $100 < 9 \times 9 = 81$ بیشتر باشد. بنابراین، عدد مورد نظر مساله نمی‌تواند سه رقمی باشد. با همین روش ثابت می‌شود که، عدد مطلوب، بیش از سه رقم هم نمی‌تواند داشته باشد. بنابراین، عدد مجهول N ، دو رقمی یا يك رقمی است.

مکعب يك عدد دو رقمی بیش از ۶ رقم ندارد، پس مجموع رقم‌های مکعب آن، از $54 = 6 \times 9$ بیشتر نیست؛ یعنی عدد مجهول از ۵۴ بزرگتر نیست. ولی، اگر مکعب عددی که از ۵۴ تجاوز نمی‌کند، شش رقمی باشد، باید رقم اول آن برابر ۱ شود، بنابراین مجموع رقم‌های توان سوم آن، از $46 = 5 \times 9 + 1$ تجاوز نمی‌کند. به این ترتیب، عدد مجهول از ۴۶ بزرگتر نیست.

اگر عددی از ۴۶ بزرگتر نباشد، توان سوم آن بیش از ۵ رقم ندارد و چون عدد ۹۹۹۹۹ مکعب کامل نیست، بنابراین مجموع رقم‌های مکعب عددی که از ۴۶ تجاوز نمی‌کند از $44 = 4 \times 9 + 8$ بیشتر نیست. چون مکعب عدد ۴۴ به ۴ ختم می‌شود (ويك عدد پنج رقمی است) بنابراین ۴۴ هم

از مجموع رقم‌های توان سوم خود بزرگتر است. به این ترتیب، عدد مجهول از ۴۳ بزرگتر نیست.

باقی مانده حاصل از تقسیم مکعب يك عدد درست بر ۹ برابر است با ۱- یا ۰ یا ۱+. بنابراین عدد مورد نظر مساله هم، باید در تقسیم بر ۹ به یکی از این سه عدد برسد.

به این ترتیب، عدد مجهول از ۴۳ تجاوز نمی کند و در تقسیم بر ۹، به یکی از باقی مانده‌های ۱-، ۰ یا ۱ می رسد، یعنی باید عدد مورد نظر را در میان ۱۳ عدد زیر جست و جو کرد:

۳۷، ۳۶، ۳۵، ۲۸، ۲۷، ۲۶، ۱۹، ۱۸، ۱۷، ۱۰، ۹، ۸، ۱

که با آزمایش مستقیم، ۶ جواب زیر به دست می آید:

$$1(1^3=1), 8(8^3=512), 17(17^3=4913),$$

$$18(18^3=5832), 26(26^3=17576), 27(27^3=19683)$$

۰۱۵۵ (a) به سادگی می توان تحقیق کرد که، برای $x < 5$ ، تنها جواب‌های

$$(x=1, y=\pm 1); (x=3, y=\pm 3)$$

به دست می آید. ثابت می کنیم، معادله مفروض، جوابی به ازای $x \geq 5$ ندارد. در واقع، مجموع $1!+2!+3!+4!=33$ به رقم ۳ ختم می شود، در حالی که همه عددهای ۵!، ۶!، ۷!، ... به صفر ختم می شوند. بنابراین، به ازای $x \geq 5$ ، عدد

$$1!+2!+3!+4!+\dots+x!$$

به رقم ۳ ختم می شود، در حالی که رقم سمت راست هیچ مجذور کاملی برابر ۳ نیست.

(b) دو حالت ممکن را در نظر می گیریم.

۱. z عددی است زوج: $z=2n$. این حالت به همان مساله (a) منجر می شود، زیرا، $y^{2n}=(y^n)^2$. بنابراین در حالت زوج بودن عدد z ، برای جواب‌های معادله داریم:

۱) عددی زوج و دلخواه $x=1, y=\pm 1, z=2$

۲) $x=3, y=\pm 3, z=2$

۳. عددی است فرد. به ازای $z=1$ ، مقدار x می‌تواند دلخواه

باشد:

۳) $x=1, y=1+2!+\dots+x!, z=1$

اکنون $z \geq 3$ می‌گیریم. داریم:

$$1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!=46233$$

عدد ۴۶۲۳۳ بر ۹ بخش‌پذیر است و بر ۲۷ بخش‌ناپذیر، درحالی که عدد $n!$ برای $n \geq 9$ بر ۲۷ بخش‌پذیر است. به‌این ترتیب، مجموع

$$9!+10!+11!+\dots+x!$$

مضربی است از ۲۷، درحالی که مجموع $1!+2!+\dots+8!$ مضربی است از ۹، ولی بر ۲۷ بخش‌پذیر نیست، یعنی مجموع کلی $1!+2!+\dots+x!$ بر ۹ بخش‌پذیر و بر ۲۷ بخش‌ناپذیر است (به ازای $x \geq 8$). اگر x مضربی از ۹ باشد، باید بر بخش‌پذیر بر ۳ و، در نتیجه، x بر بخش‌پذیر بر ۲۷ باشد (زیرا $z \geq 3$)، به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض برای $x \geq 8$ جوابی ندارد. به‌حالت $x < 8$ می‌پردازیم. داریم: $1!=1=1^2$ (z عدد فردی دلخواه). برای حالت‌های دیگر، به‌ترتیب، داریم:

$$1!+2!=3; 1!+2!+3!=9=3^2;$$

$$1!+2!+3!+4!=33;$$

$$1!+2!+\dots+5!=153;$$

$$1!+2!+\dots+6!=873;$$

$$1!+2!+\dots+7!=5913$$

هیچ کدام از عددهای حاصل، برابر توان فردی (بزرگتر از واحد) از يك عدد درست نیستند. بنابراین به‌جز سه جواب قبلی، تنها يك جواب دیگر به‌دست می‌آید:

عددی فرد و دلخواه $x=1, y=1, z=$ ۴)

۱۵۶. فرض کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^n$$

2^p را بزرگترین توانی از ۲ می‌گیریم که هر چهار عدد a, b, c و d بر آن بخش‌پذیر باشند. از تقسیم دو طرف برابری بالا بر 2^p به دست می‌آید:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 2^{n-2p}$$

دست کم یکی از عددهای a_1, b_1, c_1 و d_1 عددی فرد است. ولی اگر از بین چهار عدد a_1, b_1, c_1 و d_1 یک عدد یا سه عدد فرد باشند، در برابری اخیر، مقدار سمت چپ عددی فرد می‌شود و نمی‌تواند برابرتوانی از ۲ باشد. اگر مثلاً $a_1 = 2k+1, b_1 = 2l+1, c_1 = 2m$ و $d_1 = 2n$ آن وقت

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = (4k^2 + 4k + 1) + (4l^2 + 4l +$$

$$+ 1) + 4m^2 + 4n^2 = 2[2(k^2 + k + l^2 + l + m^2 + n^2) + 1]$$

که با برابری $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 2^{n-2p}$ متناقض است، زیرا دارای مقسوم‌علیهی فرد است (مقدار داخل کروشه نمی‌تواند برابر ۱ شود، زیرا برای این منظور باید k, l, m و n همگی برابر صفر باشند که در نتیجه $c_1 = d_1 = 0$ و $c = d = 0$).

در حالتی که داشته باشیم: $a_1 = 2k+1, b_1 = 2l+1, c_1 = 2m+1$ و $d_1 = 2n+1$ به دست می‌آید:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = (4k^2 + 4k + 1) +$$

$$+ (4l^2 + 4l + 1) + (4m^2 + 4m + 1) + (4n^2 + 4n + 1) =$$

$$= 4[k(k+1) + l(l+1) + m(m+1) + n(n+1) + 1]$$

حاصل ضرب دو عدد متوالی، عددی است زوج و، بنابراین، در داخل کروشه، عددی فرد به دست می‌آید و باید برابر ۱ باشد که، در این صورت $n - 2p =$

و $n = 2p + 2$ ؛ در این حالت داریم:

$$k = l = m = n = 0, a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1, a = b = c = d = 2^p$$

می‌بینیم، اگر n عددی فرد باشد، 2^n را نمی‌توان به صورت مجموع مجذورهای چهار عدد نوشت؛ در حالت زوج بودن n ($n = 2p$)، 2^n را تنها به یک طریق می‌توان به صورت مجموع چهار عدد مجذور کامل نوشت:

$$2^{2p} = (2^{p-1})^2 + (2^{p-1})^2 + (2^{p-1})^2 + (2^{p-1})^2$$

۱۵۷. a) راه حل اول. در معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ ، اگر یکی از مجهول‌های x ، y یا z برابر صفر باشد، آن وقت دو مجهول دیگر هم برابر صفر می‌شوند (زیرا، مجموع مجذورهای آن‌ها برابر صفر است). اکنون هر سه مجهول x ، y و z را مخالف صفر می‌گیریم. فرض می‌کنیم:

$$x = 2^\alpha x_1, y = 2^\beta y_1, z = 2^\gamma z_1$$

که در آن‌ها، x_1 ، y_1 و z_1 عددهایی فردند (هر یک از عددهای α ، β یا γ ، می‌توانند صفر هم باشند).

این معادله، نسبت به x و y و z متقارن است، یعنی این سه مجهول حقوقی برابر دارند (اگر x و y یا y و z یا z و x را به هم تبدیل کنیم، معادله تغییر نمی‌کند. بین سه عدد α ، β و γ ، α را کوچکترین و γ را بزرگترین عدد می‌گیریم، یعنی $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

بینیم سمت چپ معادله بر چه توانی از ۲ بخش پذیر است.

۱. $\alpha < \beta \leq \gamma$ یا $\alpha = \beta = \gamma$ در این حالت، اگر در سمت چپ معادله از $2^{2\alpha}$ فاکتور بگیریم، در داخل پرانتز، مجموعی از یک عدد فرد و دو عدد زوج یا مجموعی از سه عدد فرد به دست می‌آید، یعنی این مجموع عددی فرد است.

۲. $\alpha = \beta < \gamma$. در این حالت داریم:

$$x = 2^\alpha (2k + 1), y = 2^\alpha (2l + 1), z = 2^\alpha \cdot 2n$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 2^{\alpha} [(2k+1)^2 + (2l+1)^2 + (2n)^2] = \\ &= 2^{\alpha} (4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 + 4n^2) = \\ &= 2^{\alpha+1} [2(k^2 + l^2 + n^2 + k + l) + 1] \end{aligned}$$

در این جا هم، مقدار داخل کروشه، عددی فرد است.

از طرف دیگر، $2xyz$ (سمت راست معادله) بر $2^{\alpha+\beta+\gamma+1}$ بخش پذیر

است. بنابراین، در حالت ۱° باید داشته باشیم: $2\alpha = \alpha + \beta + \gamma + 1$. چون

$\alpha \leq \beta \leq \gamma$ ، از این برابری نتیجه می شود $2\alpha \geq 3\alpha + 1$ که ممکن نیست.

در حالت ۲° باید داشته باشیم: $2\alpha + 1 = \alpha + \beta + \gamma + 1$ و چون

$\alpha = \beta < \gamma$ ، بنابراین $2\alpha + 1 > 3\alpha + 1$ که باز هم ممکن نیست.

به این ترتیب، معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ ، به جز $x = y = z = 0$ ،

جواب درست دیگری ندارد.

۱۴ حل دد۲. چون مجموع مجذورهای x و y و z ، عددی زوج است،

بنابراین یا هر سه عدد زوج و یا یکی زوج و دوتای دیگر فردند. در حالت

اخیر، مجموع $x^2 + y^2 + z^2$ مضربی است از ۲ ولی بر ۴ بخش پذیر نیست،

در حالی که $2xyz$ بر ۴ بخش پذیر است و این، ممکن نیست.

به این ترتیب، باید هر سه عدد x و y و z را زوج بگیریم: $x = 2x_1$ ،

$y = 2y_1$ و $z = 2z_1$ ؛ که در نتیجه، به این معادله می رسیم:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2x_1 y_1 z_1$$

با همان استدلال، نتیجه می گیریم که x_1 ، y_1 و z_1 هم باید عددهایی زوج

باشند. فرض می کنیم: $x_1 = 2x_2$ ، $y_1 = 2y_2$ و $z_1 = 2z_2$ ، به این معادله

می رسیم:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2 y_2 z_2$$

که در آن $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x}{y}$ ، $\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2}$ و $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$. در این معادله هم، باید x_2 ،

y_2 و z_2 زوج باشند. اگر این روند استدلال را ادامه دهیم، به این نتیجه

می‌رسیم که باید همهٔ عددهای

$$(x, y, z) \text{ و } \left(x_1 = \frac{x}{4}, y_1 = \frac{y}{4}, z_1 = \frac{z}{4}\right)$$

$$\dots \text{ و } \left(x_2 = \frac{x}{4}, y_2 = \frac{y}{4}, z_2 = \frac{z}{4}\right) \text{ و } \left(y_3 = \frac{x}{8}, y_3 = \frac{y}{8}, z_3 = \frac{z}{8}\right)$$

$$\dots \text{ و } \left(z_k = \frac{x}{4^k}, y_k = \frac{y}{4^k}, z_k = \frac{z}{4^k}\right)$$

عددهایی زوج‌اند. و این، تنها وقتی امکان دارد که $x = y = z = 0$.

(b) در این جا هم، با استدلالی شبیه حالت (a)، می‌توان ثابت کرد که،

تنها جواب معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 4xyzv$ عبارت است از

$x = y = z = v = 0$. اگر از راه حل دوم (a) استفاده کنیم، باید بدون هیچ

تفاوتی آن را به کار ببریم (و ما آن را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم).

ولی اگر بخواهیم از راه حل اول مسألهٔ (a) استفاده کنیم، باید حالتی

را که هر چهار عدد x, y, z و v بزرگ‌تر از ۰ باشند، به طور جداگانه،

بررسی کنیم:

$$x = 2^\alpha(2k+1), \quad y = 2^\alpha(2l+1),$$

$$z = 2^\alpha(2m+1), \quad v = 2^\alpha(2n+1)$$

که در آن‌ها، α عددی درست و غیر منفی، و k و l و m و n ، عددهایی درست‌اند. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + v^2 &= 2^{2\alpha}[(4k^2 + 4k + 1) + (4l^2 + 4l + 1) + \\ &+ (4m^2 + 4m + 1) + (4n^2 + 4n + 1)] = \\ &= 2^{2\alpha+2}[k(k+1) + l(l+1) + m(m+1) + n(n+1) + 1] \end{aligned}$$

عبارت داخل کروشه، عددی فرد است، بنابراین سمت چپ معادله، حداکثر

بر $2^{2\alpha+2}$ بخش پذیر است، در حالی که سمت راست معادله بر $2^{4\alpha+1}$ بخش پذیر

است.

۰۱۵۸ a) x و y و z را عددهای درست و مثبت می‌گیریم که در این معادله صدق کنند:

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz \quad (*)$$

قبل از هرچیز ثابت می‌کنیم که (بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود)، می‌توان فرض کرد:

$$x \leq \frac{k y z}{2}, \quad y \leq \frac{k x z}{2}, \quad z \leq \frac{k x y}{2} \quad (**)$$

این فرض، به معنای آن است که، هیچ کدام از جمله‌های سمت چپ معادله (*)، بیشتر از نصف مقدار سمت راست معادله نیست. به عنوان نمونه فرض

می‌کنیم $z > \frac{kxy}{2}$. در این صورت می‌توان به جای x و y و z ، عددهای کوچکتر x و y و $z_1 = kxy - z$ را قرارداد که باز هم در معادله (*) صدق می‌کنند.

$$x^2 + y^2 + (kxy - z)^2 = kxy(kxy - z)$$

اگر باز هم، یکی از عددهای جدید، از حاصل ضرب دوتای دیگر در $\frac{k}{2}$ بزرگتر باشد، می‌توانیم آن را با عدد کوچکتری عوض کنیم، تا جایی که شرط‌های (**) برقرار شوند.

اکنون فرض می‌کنیم، $x \leq y \leq z$ ، بنابراین $y \leq z \leq \frac{kxy}{2}$ ، در

این صورت

$$\frac{kx}{2} \geq 1 \quad \text{یا} \quad kx \geq 2$$

معادله (*) را می‌توان این طور نوشت:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - z\right)^2 = \left(\frac{kxy}{2}\right)^2$$

چون $z \leq \frac{kxy}{۲}$ ، بنابراین اگر به جای z مقدار $z \leq y$ را قرار دهیم، مقدار سمت چپ برابری بزرگ‌تر می‌شود (در حالت $y = z$ ، مقدار آن تغییر نمی‌کند)، یعنی

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{۲} - y\right)^2 \geq \frac{k^2 x^2 y^2}{۴}$$

که بعد از تبدیل‌های لازم، چنین می‌شود:

$$x^2 + ۲y^2 \geq kxy^2$$

بنا به فرض $x \leq y$ ، بنابراین باید داشته باشیم:

$$y^2 + ۲y^2 \geq kxy^2 \quad \text{یا} \quad kx \leq ۳$$

به این ترتیب $۲ \leq kx \leq ۳$ ، یعنی kx یا برابر ۲ و یا برابر ۳ می‌شود. در حالت $kx = ۲$ ، معادله (*) به این صورت درمی‌آید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ۲yz \quad \text{یا} \quad x^2 + (y - z)^2 = ۰$$

که از آن جا به دست می‌آید $x = ۰$ و kx برابر صفر می‌شود نه برابر ۲. بنابراین $kx = ۳$ ، و k می‌تواند برابر ۱ یا ۳ باشد. با مثال‌های ساده می‌توان نشان داد که، این مقادارها، برای k قابل قبول است (حل بخش b) همین مساله را ببینید).

(b استدلال حل مساله a) را ادامه می‌دهیم. در آن جا داشتیم:

$$x^2 + ۲y^2 \geq kxy^2$$

و چون $kx = ۳$ ، بنابراین

$$x^2 + ۲y^2 \geq ۳y^2 \quad \text{یا} \quad x^2 \geq y^2$$

و چون بنا به فرض $x \leq y$ ، در نتیجه $x = y$ ، اکنون اگر $x = y$ و $kx = ۳$ را در معادله (*) قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$۲x^2 + z^2 = ۳xz \quad \text{یا} \quad (z - x)(z - ۲x) = ۰$$

بنابراین $z = x$ یا $z = ۲x$. چون $\frac{kxy}{۲} = \frac{۳y}{۲} = \frac{۳x}{۲}$ ، $z < \frac{kxy}{۲}$ ، عدد z ، نمی‌تواند

برابر $2x$ باشد، یعنی $x = z$. به این ترتیب، با توجه به $kx = 3$ ، دو دسته جواب برای معادله (*) به دست می‌آید

$$x = y = z = 1 \quad (k = 3)$$

$$x = y = z = 3 \quad (k = 1)$$

در حل بخش (a) دیدیم، اگر x و y و z در معادله (*) صدق کنند، می‌توانیم با استفاده از جای‌گزینی‌های متوالی به صورت $z_1 = kxy - z$ ، به معادله (**) برسیم، یعنی به عددنمای جدیدی که در معادله (*) صدق می‌کنند. به این ترتیب، با در دست داشتن کوچکترین جواب‌ها، می‌توان با استفاده از برابری $z_1 = kxy - z$ ، جواب‌های دیگر را به دست آورد. جواب‌های کوچکتر از ۱۰۰۰ را در جدول‌های زیر داده‌ایم:

۱. در حالت $k = 3$:

x	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۵	۵
y	۱	۱	۲	۵	۱۳	۳۲	۸۹	۲۲۳	۵	۲۹	۱۶۹	۱۳	۲۹
z	۱	۲	۵	۱۳	۳۴	۸۹	۲۲۳	۶۱۰	۲۹	۱۶۹	۹۸۵	۱۹۲	۲۲۳

۲. در حالت $k = 1$:

x	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۶	۶	۱۵
y	۳	۳	۶	۱۵	۳۹	۱۰۲	۲۶۷	۱۵	۸۷	۸۷	۳۹
z	۳	۶	۱۵	۳۹	۱۰۲	۲۶۷	۶۹۹	۸۷	۵۰۷	۵۰۷	۵۸۲

(این که جواب متناظر با $k = 1$ را می‌توان از روی جواب‌های متناظر با $k = 3$ به دست آورد (با ضرب عددهای x و y و z در ۳) رابطه مستقیمی با کوچکترین جواب‌های معادله‌های $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ دارد).

۰۱۵۹. از برابری $x^3 = 2(y^3 + z^3)$ معلوم می‌شود که x عددی زوج

است: $x = 2x_1$. در این صورت، معادله چنین می‌شود:

$$4x_1^2 - 2y_1^2 - 2z_1^2 = 0 \quad \text{یا} \quad 4x_1^2 - y_1^2 - 2z_1^2 = 0$$

از برابری $2(4x_1^2 - z_1^2) = y_1^2$ ، نتیجه می گیریم که y عددی زوج است:
داریم: $y = 2y_1$

$$4x_1^2 - 8y_1^2 - 2z_1^2 = 0 \quad \text{یا} \quad 2x_1^2 - 4y_1^2 - z_1^2 = 0$$

با توجه به برابری $z_1^2 = 2(x_1^2 - 2y_1^2)$ معلوم می شود که z ، عددی زوج است: $z = 2z_1$ و

$$2x_1^2 - 4y_1^2 - 8z_1^2 = 0 \quad \text{یا} \quad x_1^2 - 2y_1^2 - 4z_1^2 = 0$$

به این ترتیب، اگر x و y و z ، در معادله صدق کنند، اولاً x و y و z عددهایی زوج اند، ثانیاً $x_1 = \frac{x}{4}$ ، $y_1 = \frac{y}{4}$ و $z_1 = \frac{z}{4}$ هم در معادله صدق می کنند.

همین استدلال را در مورد x_1 ، y_1 و z_1 می توان به کار برد و نتیجه

گرفت که، این سه عدد زوج اند و، در ضمن، $x_2 = \frac{x_1}{4}$ ، $y_2 = \frac{y_1}{4}$ و

$z_2 = \frac{z_1}{4}$ هم در معادله صدق می کنند و غیره. ادامه این استدلال مارا به این جا

می رساند که x و y و z باید بر هر توانی از ۲ بخش پذیر باشند و این ممکن نیست، مگر داشته باشیم: $x = y = z = 0$.

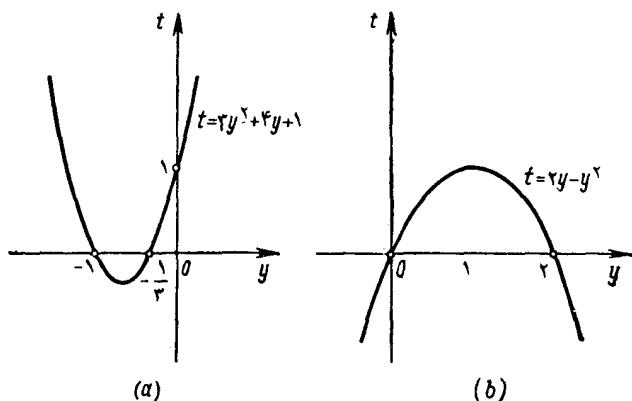
۱۶۰. اگر دو طرف معادله را چهار برابر کنیم و، سپس، یک واحد به دو

طرف معادله اضافه کنیم، به دست می آید:

$$(2x+1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$$

سمت چپ این برابری مجذور کامل است. به جز آن داریم:

$$\begin{aligned} 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 &= (4y^4 + 4y^3 + y^2) + \\ &+ (3y^2 + 4y + 1) = (2y^2 + y)^2 + (3y^2 + 4y + 1) = \\ &= (P(y))^2 + Q(y) \end{aligned}$$



شکل ۱۶

سه‌جمله‌ای درجه دوم $Q(y) = 3y^2 + 4y + 1$ دو ریشه حقیقی دارد: $y_1 = -1$ و $y_2 = -\frac{1}{3}$. بنابراین به ازای همه مقادیرهای درست $y \neq -1$ ، مقادیرهای مثبت را قبول می‌کند (نمودار تابع $t = 3y^2 + 4y + 1$ را در شکل ۱۶، a) را ببینید). بنابراین

$$(2x+1)^2 > (P(y))^2 = (2y^2 + y)^2$$

از طرف دیگر

$$4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y + 1)^2 + (2y - y^2) = (P_1(y))^2 + Q_1(y)$$

نمودار تابع $Q_1(y) = 2y - y^2$ در شکل ۱۶، b) داده شده است؛ ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم $Q_1(y)$ عبارتند از ۰ و ۲.

بنابراین، به ازای همه مقادیرهای درست y ، به جز ۰ و ۱ و ۲ داریم:

$$Q_1(y) < 0 \text{ و در نتیجه}$$

$$(2x+1)^2 < (P_1(y))^2 = (2y^2 + y + 1)^2$$

به این ترتیب، به ازای همه مقادیرهای درست y ، به جز ۰، ۱ و ۲،

باید داشته باشیم:

$$(2y^2 + y + 1)^2 > (2x + 1)^2 > (2y^2 + y)^2$$

یعنی $(2x + 1)^2$ بین دو مجذور کامل متوالی قرار می گیرد که، در این صورت، برای x ، عدد درستی به دست نمی آید.

نتیجه می گیریم که x ، تنها وقتی ممکن است عددی درست باشد که y ، برابر با یکی از عددهای -1 ، 0 ، 1 یا 2 باشد؛ یعنی وقتی که سمت راست برابری در معادله اصلی، برابر 0 ، 4 یا 30 باشد، به این ترتیب به معادله درجه دوم

$$x^2 + x = c \quad (*)$$

می رسیم که، در آن، c برابر با یکی از عددهای 0 ، 4 یا 30 است.

اگر $c = 0$ ، آن وقت $x = 0$ و $x = -1$ ؛

اگر $c = 30$ ، آن وقت $x = 5$ و $x = -6$ ؛

و اگر $c = 4$ ، آن وقت معادله $(*)$ ریشه درست ندارد.

به این ترتیب، سرانجام، جواب های درست زیر، برای معادله به دست می آید:

$$(2, -6); (2, 5); (0, -1); (0, 0); (-1, -1); (0, -1);$$

معادله شش جواب مختلف دارد.

۱۶۱. با فرض $y = 1$ به معادله درجه دوم زیر می رسیم:

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

که دارای یک ریشه درست و مثبت است $x = 3$ (ریشه دوم معادله، $x = -1$ ،

منفی است). اکنون فرض می کنیم $y > 1$. چون عددهای x^{2y} و $(x + 2)^{2y}$ ،

یاهر دو زوج اند و یاهر دو فرد، بنابراین عدد $x^{2y} - (x + 2)^{2y} = (x + 1)^{2y}$

باید عددی زوج باشد، یعنی $2x_1 = x + 1$. علاوه بر این

$$(2x_1)^{2y} = (x + 1)^{2y} = (x + 2)^{2y} - x^{2y} = \quad (*)$$

$$= (2x_1 + 1)^{2y} + (2x_1 - 1)^{2y}$$

که با استفاده از بسط دوجمله‌ای به دست می‌آید:

$$(2x_1)^{2y} = 2[C_{2y}^1(2x_1)^{2y-1} + C_{2y}^2(2x_1)^{2y-2} + \dots + C_{2y}^{2y}(2x_1)]$$

چون $C_{2y}^1 = 2y$ ، بنابراین رابطه بالا به این صورت درمی‌آید:

$$2 \times 2y \times 2x_1 = (2x_1)^{2y} - 2 \times 2y(2x_1)^{2y-1} - \\ - 2C_{2y}^2(2x_1)^{2y-2} - \dots - 2C_{2y}^{2y}(2x_1)^3$$

(توجه کنید $2y \geq 4$ ، زیرا $y \geq 2$). همه جمله‌های سمت راست این برابری بر $(2x_1)^3$ بخش پذیرند، بنابراین y مضربی از x_1^2 است.

سپس، اگر دو طرف برابری (*) را بر $(2x_1)^{2y}$ تقسیم کنیم، به دست

می‌آید:

$$1 = \left(1 + \frac{1}{2x_1}\right)^{2y} - \left(1 - \frac{1}{2x_1}\right)^{2y}$$

یعنی $2 < \left(1 + \frac{1}{2x_1}\right)^{2y} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2x_1}\right)^{2y}$. از طرف دیگر، با توجه

به قانون بسط دوجمله‌ای

$$\left(1 + \frac{1}{2x_1}\right)^{2y} = 1 + 2y \cdot \frac{1}{2x_1} + C_{2y}^2 \left(\frac{1}{2x_1}\right)^2 + \dots = \\ = 1 + \frac{y}{x_1} + \dots > 1 + \frac{y}{x_1}$$

از آنجا

$$1 + \frac{y}{x_1} < 2 \Rightarrow \frac{y}{x_1} < 1 \Rightarrow y < x_1$$

که با شرط بخش پذیری y بر x_1^3 متناقض است. به این ترتیب، معادله مفروض، به ازای $y > 1$ ، جواب درست ندارد. معادله تنها يك جواب درست دارد:

$$y = 1, x = 3$$

۱۶۲. $\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}}_{y \text{ رادیکال}}$ را $A_y(x)$ می‌نامیم. داریم:

$$x + A_{y-1}(x) = x + \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}}_{(y-1) \text{ رادیکال}} = z^2$$

یعنی $A_y(x) = z^2 - x$. بنابراین، اگر $A_y(x) = z^2 - x$ عددی درست باشد، آن وقت عدد $A_{y-1}(x) = z^2 - x$ هم عددی درست است؛ به همین ترتیب روشن می‌شود که عددهای

$$A_{y-2}(x) = (z^2 - x)^2 - x, A_{y-3}(x), \dots, A_1(x) = \sqrt{x}$$

هم عددهایی درست‌اند. چون $\sqrt{x} = t$ عددی درست است، بنابراین $x = t^2$ (t ، عددی است درست).

روشن است که، برای هر عدد درست t ، جواب $x = t^2$ ، $y = 1$ ، $z = t$ در معادله صدق می‌کند. اکنون فرض می‌کنیم $y > 1$. در این حالت عددهای

$$A_1(x) = \sqrt{x} = t, \quad A_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} = \sqrt{t^2 + t} = \sqrt{t(t+1)}$$

باید درست باشند. چون t و $t+1$ نسبت به هم اول‌اند، حاصل ضرب $t(t+1)$ تنها وقتی می‌تواند مجذور کامل باشد که هم t و هم $t+1$ مجذور کامل باشند و این تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $t = 0$. در ضمن در حالت $t = 0$ ، به ازای هر y ، داریم $A_y(x) = 0$.

به این ترتیب، روی هم دو گروه جواب برای معادله به دست می‌آید:

$$(x = t^2, y = 1, z = t) \text{ و } (x = 0, y = t, z = 0)$$

که در آن‌ها، t عدد طبیعی دلخواهی است.

۱۶۳. استدلال را با برهان خلف می‌دهیم. فرض کنید معادله مفروض،

تنها برای تعداد محدودی از عددهای اول p ، دارای جواب‌های درست x و y باشد و بزرگترین این عددها، عدد اول n رقمی p_n باشد. عددهای

می گیریم. چون عدد $x = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times p_n$ و $X = x^2 + x + 1$ را در نظر

$$X - 1 = x^2 + x = x(x + 1)$$

بر همه عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ...، p_n بخش پذیر است، بنابراین عدد X بر هیچ یک از این عددها بخش پذیر نیست. در نتیجه، عدد X ، مقسوم علیه اولی مثل P دارد که از p_n بزرگتر است، یعنی $X = Py$ ، که، در آن، y عددی است طبیعی (در این جا، حالتی را که $P = X$ و $y = 1$ باشد، در نظر نگرفته ایم). به این ترتیب، معادله مفروض، به ازای $p = P$ دارای ریشه های درست x و y است که فرض ما را نقض می کند.

یادداشت. این اثبات، خیلی شبیه اثباتی است که برای نامتناهی بودن دنباله عددهای اول وجود دارد (حل مسأله ۳۴۹ را ببینید).

۱۶۴. در واقع، باید جوابهای درست این دستگاه را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y + z + u = (x + v)^2 \\ y^2 + x + z + u = (y + w)^2 \\ z^2 + x + y + u = (z + t)^2 \\ u^2 + x + y + z = (u + s)^2 \end{cases}$$

که در آن، x و y و z و u ، عددهای مجهول اند. دستگاه را می توان این طور نوشت:

$$\begin{cases} y + z + u = 2vx + v^2 \\ x + z + u = 2wy + w^2 \\ x + y + u = 2tz + t^2 \\ x + y + z = 2su + s^2 \end{cases} \quad (*)$$

از مجموع همه معادله های دستگاه (*) به دست می آید:

$$(2v-3)x + (2w-3)y + (2t-3)z + (2s-3)u + \\ + v^2 + w^2 + t^2 + s^2 = 0 \quad (**)$$

از برابری (**)، قبل از هر چیز، نتیجه می‌شود که، دست کم یکی از عددهای $2s-3, 2t-3, 2w-3, 2v-3$ باید منفی باشد (زیرا، در غیر این صورت، مجموع چند جمله مثبت، نمی‌تواند برابر صفر باشد). برای روشن بودن وضع، فرض می‌کنیم $0 < 2v-3$ ؛ و این تنها برای $v=0$ یا $v=1$ امکان دارد. در حالت $v=0$ ، معادله اول دستگاه (**) به صورت $x+z+u=0$ در می‌آید که ممکن نیست. زیرا x و z و u عددهایی مثبت‌اند. بنابراین باید همه عددهای v, w, t و s را مثبت و $v=1$ بگیریم. در این صورت، برابری (**) چنین می‌شود:

$$x = (2w-3)y + (2t-3)z + (2s-3)u + w^2 + t^2 + s^2 + 1 \quad (***)$$

پنج حالت ممکن را، به طور جداگانه، بررسی می‌کنیم:

۱. چهار عدد x و y و z و u ، دوه‌دو با هم فرق دارند. در این حالت، عددهای v, w, t و s نیز دوه‌دو متفاوت می‌شوند، زیرا اگر مثلاً فرض کنیم $v=w$ ، آن وقت از تفاضل دو معادله اول دستگاه (*) به دست می‌آید $y-x=2v(x-y)$ ، که ممکن نیست (زیرا v مثبت و $x \neq y$). علاوه بر این، با فرض $v=1$ ، از معادله اول (*) به دست می‌آید:

$$2x = y + z + u - 1 \Rightarrow x = \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{u}{2} - \frac{1}{2}$$

که برای (***) را نقض می‌کند، زیرا در این برابری، ضریب‌های y و z و u ، عددهایی درست و مثبت‌اند (w و t و s نمی‌توانند برابر ۱ باشند، زیرا این عددها با v فرق دارند و $v=1$). در این حالت جوابی برای مساله به دست نمی‌آید.

۲. دو عدد از بین عددهای x, y, z و u با هم برابر و بقیه، دوه‌دو

متمايزند. دومورد می تواند پيش آيد:

$z = u \cdot A$. در اين حالت $t = s$. برابري (***) و معادله اول (*) به اين صورت در می آيند:

$$x = (2w - 3)y + 2(2t - 3)z + w^2 + 2t^2 + 1,$$

$$2x = y + 2z - 1$$

نظير حالت قبل، می توان روشن کرد که، اين دو برابري، نمی توانند با هم برقرار باشند.

$x = y \cdot B$. در اين حالت $w = v = 1$. برابري (**) و معادله اول (*) به اين صورت در می آيند:

$$2x = (3t - 3)z + (2s - 3)u + t^2 + s^2 + 2,$$

$$x = z + u - 1$$

که اگر به جای x در رابطه اول، مقدار آن را از رابطه دوم قرار دهيم، به دست می آيد:

$$(2t - 5)z + (2s - 5)u + t^2 + s^2 + 4 = 0 \quad (***)$$

از اين جا نتيجه می شود که، دست کم يکی از دو عدد $2t - 5$ و $2s - 5$ ، بايد منفي باشد. فرض می کنيم $2t - 5 < 0$. چون $t \neq 0$ و $t \neq 1$ (زيرا $v = 1$ و $t \neq v$ ، چون $t \neq x$)، بنابر اين $t = 2$. اگر دو برابر معادله اول (*) را به معادله سوم آن اضافه کنيم، به دست می آيد:

$$2z + 2x + 6 = 2x + 2z + 3u \Rightarrow z = \frac{3}{2}u - 3$$

که اگر در معادله (****) قرار دهيم: $t = 2$ و $z = \frac{3}{2}u - 3$ ، خواهيم داشت:

$$(2s - 13)u + 2s^2 + 22 = 0$$

یعنی $0 < 13 - 4s$. از آن جا که $s > 0$ ، $s \neq 1$ و $s \neq 2$ ، بنابراین $s = 3$. اگر در همه معادله‌های دستگاه (*)، $s = 3$ قرار دهیم، به دستگاه زیر، که شامل سه معادله خطی است می‌رسیم:

$$\begin{cases} x + z + u = 2x + 1 \\ 2x + u = 4z + 4 \\ 2x + z = 6u + 9 \end{cases}$$

از این دستگاه به سادگی به دست می‌آید:

$$x = y = 96, z = 57, u = 40$$

۳°. در بین عددهای x و y و z و u ، دو عدد با هم و دو عدد دیگر هم با هم برابرند. مثلاً فرض می‌کنیم $x = y$ و $z = u$. در این حالت، معادله اول (*) به صورت $x = 2z - 1$ در می‌آید، که اگر آن را در (***)، که در این حالت به صورت

$$x = (2t - 3)z + t^2 + 1$$

در می‌آید، قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(2t - 5)z + t^2 + 2 = 0$$

از این جا $0 < 2t - 5$ ، و چون $t > 0$ و $t \neq 1$ ، پس $t = 2$. دستگاه (*)، چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x + 2z = 2x + 1 \\ 2x + z = 4z + 4 \end{cases}$$

یعنی $x = y = 91$ و $z = u = 6$.

۴°. بین چهار عدد x ، y ، z و u ، سه عدد با هم برابرند. دومورد ممکن را، به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

$0 \cdot A = z = u = y$. در این مورد، برابری (***) و معادله اول دستگاه (*)،

چنین می‌شوند:

$$x = 2(2w - 3)y + 3w^2 + 1 \text{ و } 2x = 3y - 1$$

و روشن است که، این دو معادله، به‌طورهم‌زمان، نمی‌توانند برقرار باشند.
 B. $x = y = z$. در این مورد معادله اول (*) چنین می‌شود:

$$2x + u = 2x + 1$$

یعنی $u = 1$ و برای آخرین معادله دستگاه (*) داریم:

$$3x = 2su + s^2 = 2s + s^2 \Rightarrow x = \frac{s(s+2)}{3}$$

چون x عددی است درست، بنابراین یا s و یا $s+2$ مضربی است از ۳.
 یعنی یا $s = 3k$ و $x = k(3k+2)$ و یا $s = 3k-2$ و $x = (3k-2)k$ که، در آن‌ها، k عدد درست دلخواهی است.

۵. هر چهار عدد x ، y ، z و u باهم برابرند. در این حالت، از معادله اول (*) به‌دست می‌آید:

$$3x = 2x + 1 \Rightarrow x = 1$$

به این ترتیب، جواب‌های مساله، به این صورت‌اند:

$$(x = y = 96, z = 57, u = 40); (x = y = 11, z = u = 6);$$

$$(x = y = z = k(3k \pm 2), u = 1); (x = y = z = u = 1)$$

(جواب آخر، در بین جواب‌های سوم وجود دارد، وقتی $k = 1$ و علامت داخل پرانتز را منفی بگیریم).

۱۶۵. اگر دو عدد مجهول را x و y بگیریم، باید داشته باشیم:

$$x + y = xy$$

که می‌توان آن را این‌طور نوشت:

$$xy - x - y + 1 = 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) = 1$$

عدد ۱ را، تنها به دو طریق می‌توان به ضرب دو عدد درست تبدیل کرد:

$$(x-1)(y-1) = 1 \times 1 = -1 \times -1$$

بنابراین یا $x-1=1$ و $y-1=1$ ، یعنی $x=y=2$ ؛ و یا $x-1=-1$ و $y-1=-1$ ، یعنی $x=y=0$.

۱۶۶. اگر عددهای مجهول را x ، y و z بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

قبل از هر چیز ثابت می‌کنیم، دست کم یکی از عددهای x ، y یا z باید کوچکتر از ۴ باشد. در واقع، اگر هیچ کدام از این سه عدد از ۴ کمتر نباشد، آن وقت مجموع $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ از $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ تجاوز نمی‌کند. به این ترتیب، اگر $x \leq y \leq z$ ، آن وقت x ، تنها می‌تواند یکی از دو مقدار $x=2$ یا $x=3$ را قبول کند (زیرا $x > 1$). هر یک از این دو حالت را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱. $x=2$. در این صورت $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ که بعد از تبدیل

به یک مخرج و از بین بردن مخرج‌ها، چنین می‌شود:

$$yz - 2y - 2z = 0$$

که اگر عدد ۴ را به دو طرف آن اضافه کنیم، به سادگی به دست می‌آید:

$$(y-2)(z-2) = 4$$

چون y و z از واحد بزرگترند، بنابراین $y-2$ و $z-2$ نمی‌توانند منفی باشند و این، تنها در دو مورد ممکن است:

A. $y-2=2$ ، $z-2=2$ ؛ $y=z=4$

B. $y-2=1$ ، $z-2=4$ ؛ $y=3$ ، $z=6$

۲. $x=3$. در این صورت $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ و به دست می‌آید:

$$2yz - 3y - 3z = 0$$

که اگر آن را به صورت

$$4yz - 6y - 6z + 9 = 9$$

بنویسیم، به دست می‌آید:

$$(2y - 3)(2z - 3) = 9$$

چون $y \geq x = 3$ ، پس $2y - 3 \geq 3$ و $2z - 3 \geq 3$ ، که تنها يك مورد امکان دارد:

$$2y - 3 = 3, \quad 2z - 3 = 3; \quad y = z = 3$$

به این ترتیب، برای مساله سه جواب پیدا می‌شود:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

۱۶۷. a) از خود معادله روشن می‌شود که $x > n$ و $y > n$. در معادله قرار می‌دهیم: $x = n + x_1$ و $y = n + y_1$ ، یعنی معادله مفروض را، به ترتیب، به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{1}{x_1 + n} + \frac{1}{y_1 + n} = \frac{1}{n};$$

$$(n^2 + ny_1) + (n^2 + nx_1) = x_1 y_1 + ny_1 + nx_1 + n^2;$$

$$x_1 y_1 = n^2 \quad (*)$$

و روشن است که، اگر n عددی اول باشد، معادله $(*)$ ، تنها سه جواب از عددهای درست و مثبت x_1 و y_1 دارد که عبارتند از

$$(x_1, y_1) = (n, n), (1, n^2), (n^2, 1)$$

و در نتیجه، سه جواب، برای معادله اصلی به دست می‌آید:

$$(x, y) = (2n, 2n), (n+1, n(n+1)), (n(n+1), n+1) \quad (**)$$

در حالتی که $n = ab$ عددی مرکب باشد، آن وقت معادله، به‌جز جواب‌هایی که در (***) مشخص شده است، جواب‌های دیگری هم دارد؛ مثلاً $(x_1, y_1) = (a^2, b^2)$ که متناظر با جواب $(x, y) = (a^2 + n, b^2 + n)$ است.

(b) معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$nx + ny = xy \quad \text{یا} \quad (x - n)(y - n) = n^2$$

اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد n^2 را v بگیریم (که شامل عدد ۱ و عدد n^2 هم باشند)، آن وقت تعداد جواب‌های معادله اخیر، برابر $2v - 1$ می‌شود. برای این که جواب‌ها را پیدا کنیم، باید n^2 را به $2v$ طریق ممکن تجزیه کنیم، یعنی

$$\left(x - n = d, y - n = \frac{n^2}{d}\right) \quad \text{و} \quad \left(x - n = -d, y - n = -\frac{n^2}{d}\right)$$

(y ، مقسوم‌علیه‌ی از عدد n^2 است). دستگاہی را که به صورت $x - n = -n$ ، $y - n = -n$ در می‌آید، باید حذف کرد، زیرا به جواب نامعقول $x = 0$ ، $y = 0$ می‌رسیم. به این ترتیب، برای معادله مفروض، $2v - 1$ جواب به دست می‌آید.

اگر $n = 14$ ، آن وقت $n^2 = 196$ و عدد ۱۹۶ دارای ۹ مقسوم‌علیه است:

$$1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196$$

و بنابراین، برای معادله $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$ ، ۱۷ جواب به دست می‌آید و اگر تنها به جواب مثبت برای (x, y) نظر داشته باشیم، معادله مفروض، ۹ جواب دارد. جواب‌ها در جدول داده شده است:

x	۱۵	۱۶	۱۸	۲۱	۲۸	۴۲	۶۳	۱۱۲	۲۱۰	۱۳
y	۲۱۰	۱۱۲	۶۳	۴۲	۲۸	۲۱	۱۸	۱۶	۱۵	-۱۸۲

x	۱۲	۱۰	۷	-۱۴	-۳۵	-۸۴	-۱۸۲
y	-۸۴	-۳۵	-۱۴	۷	۱۰	۱۲	۱۳

(C) معادله مفروض را می‌توان به این صورت نوشت:

$$(x-z)(y-z)=z^2 \quad (*)$$

t را بزرگترین مقسوم علیه مشترك سه عدد x و y و z می‌گیریم: $x=x_1t$ ، $y=y_1t$ و $z=z_1t$ که، در آن‌ها، عددهای x_1 و y_1 و z_1 نسبت به هم اول‌اند (یعنی، مقسوم علیه مشتركی ندارند). اکنون m را بزرگترین مقسوم علیه دو عدد x_1 و z_1 ، و n را بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد y_1 و z_1 می‌گیریم، یعنی

$$x_1=mx_2, \quad z_1=mz_2 \quad \text{و} \quad y_1=ny_2, \quad z_1=nz_2'$$

که در آن‌ها، x_2 و z_2 نسبت به هم و y_2 و z_2' نسبت به هم اول‌اند. عددهای m و n ، نسبت به هم، اول‌اند، زیرا x_1 و y_1 و z_1 نسبت به هم اول‌اند. چون $z_1=mn p$ بر هر دو عدد m و n بخش پذیر است، می‌توانیم بنویسیم $z_1=mn p$ (یعنی $z_2'=mp$).

حالا در معادله مفروض قرار می‌دهیم:

$$x=mx_2t, \quad y=ny_2t, \quad z=mnpt$$

بعد از تبدیل‌های ساده، به دست می‌آید:

$$(x_2-np)(y_2-mp)=mnp^2 \quad (**)$$

عدد x_2 نسبت به p اول است، زیرا m بزرگترین مقسوم علیه مشترک عددهای $x_1 = mx_2$ و $z_1 = mnp$ است؛ به همین ترتیب، دو عدد y_2 و p هم، نسبت به یکدیگر، اول اند. اگر پرانتزها را در $(**)$ باز کنیم، به دست می‌آید:

$$x_2 y_2 = p(mx_2 + ny_2)$$

یعنی $x_2 y_2$ مضربی است از p . بنابراین $p = 1$ و معادله $(**)$ به این صورت درمی‌آید:

$$(x_2 - n)(y_2 - m) = mn$$

عدد x_2 نسبت به عدد n اول است، زیرا عددهای $x_1 = mx_2$ ، $y_1 = ny_2$ و $z_1 = mn$ نسبت به هم اول اند، بنابراین دو عدد $x_2 - n$ و n نسبت به هم اول می‌شوند، یعنی $y_2 - m$ مضربی است از n . به همین ترتیب ثابت می‌شود که، $x_2 - n$ مضربی است از m . به این ترتیب $x_2 - n = \pm m$ ، $y_2 - m = \pm n$ ، یعنی $x_2 = \pm y_2 = \pm m + n$ و در نتیجه

$$x = m(m+n)t, \quad y = \pm n(m+n)t, \quad z = mnt$$

که در آن‌ها، m ، n و t عددهایی درست و دلخواه‌اند.
(۱۶۸. a) از برابری $x^y = y^x$ معلوم می‌شود که، دو عدد x و y مقسوم علیه‌های اول یکسانی دارند:

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}; \quad y = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$$

که در آن‌ها، p_1 ، p_2 ، $\dots$ ، p_n عددهایی اول اند. بنابراین با توجه به برابری $x^y = y^x$ باید داشته باشیم:

$$\alpha_1 y = \beta_1 x, \quad \alpha_2 y = \beta_2 x, \quad \dots, \quad \alpha_n y = \beta_n x$$

فرض می‌کنیم $y > x$. در نتیجه:

$$\alpha_1 < \beta_1, \quad \alpha_2 < \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_n < \beta_n$$

یعنی y بر x بخش پذیر است: $y = kx$ ، که x عددی است درست؛ معادله مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$x^{kx} = (kx)^x$$

از دو طرف برابری ریشه x ام می‌گیریم:

$$x^k = kx \Rightarrow x^{k-1} = k$$

چون $y > x$ ، بنابراین $k > 1$ ، یعنی $x > 1$. علاوه بر این داریم $2^{2-1} = 2$ و به ازای $x > 2$ یا $k > 2$ خواهیم داشت: $x^{k-1} > k$. در واقع برای $k > 2$ و $x \geq 2$ داریم:

$$x^{k-1} \geq 2^{k-1} > k$$

زیرا $2^{2-1} = 2$ ؛ و به ازای $k = 2$ و $x > 2$ داریم:

$$x^{k-1} = x > 2 = k$$

به این ترتیب، معادله مفروض، تنها یک جواب دارد: $x = 2$ ، $y = 4$.

(b) نسبت $\frac{y}{x}$ را برابر k می‌گیریم، یعنی $y = kx$. داریم:

$$x^{kx} = (kx)^x \Rightarrow x^{k-1} = k$$

از این جا

$$x = k^{\frac{1}{k-1}}, \quad y = k \cdot k^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{k}{k-1}}$$

کسر $\frac{1}{k-1}$ را برابر کسر تحویل ناپذیر $\frac{p}{q}$ می‌گیریم. داریم:

$$k-1 = \frac{q}{p}, \quad k = 1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p}, \quad \frac{k}{k-1} = \frac{p+q}{q};$$

$$x = \left(\frac{p+q}{p} \right)^{\frac{p}{q}}, \quad y = \left(\frac{p+q}{p} \right)^{\frac{p+q}{q}}$$

چون p و q نسبت به هم اول اند، بنابراین، برای این که x و y عددهایی گویا باشند، باید عددهای درست p و $p+q$ برابر با توان q ام عددهای

درستی باشند؛ و این، تنها وقتی امکان دارد که داشته باشیم $q = 1$ ، زیرا به ازای $q \geq 2$ و $p = n^q$ داریم:

$$n^q < p + q < (n+1)^q = n^q + qn^{q-1} + \frac{q(q-1)}{2}n^{q-2} + \dots$$

یعنی، همه عددهای گویایی که در معادله مفروض صدق می‌کنند، از دستور زیر به دست می‌آیند:

$$x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p, \quad y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}$$

که در آن، p عددی است درست و دلخواه، به جز ۰ و ۱-.

۱۶۹. تعداد دانش‌آموزان کلاس ششم را n و امتیاز هر کدام از آن‌ها را m می‌گیریم. بنابراین، امتیازهای همه شرکت‌کنندگان، روی هم، برابر $mn + 8$ می‌شود. این عدد برابر است با تعداد بازی‌هایی که انجام شده است. $n+2$ نفر در مسابقه شرکت کرده‌اند و، در ضمن، هر نفر با هر یک از $n+1$ نفر دیگر، یک دور بازی کرده است، بنابراین تعداد کل بازی‌ها، برابر $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ است (در حاصل ضرب $(n+1)(n+2)$ ، هر دور بازی، دوبار به حساب آمده است). به این ترتیب، به برابری زیر می‌رسیم:

$$mn + 8 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

که بعد از تبدیل‌های ساده، به این صورت در می‌آید:

$$n(n+3-2m) = 14 \quad (*)$$

n عددی است طبیعی، عبارت داخل پرانتز هم عددی طبیعی است، زیرا m یا عدد طبیعی است و یا عددی کسری با مخرج برابر ۲. عدد ۱۴ بر n بخش پذیر است، بنابراین n تنها می‌تواند یکی از عددهای ۱، ۲، ۷ یا ۱۴ باشد. n برابر ۱ یا ۲ نیست، زیرا اگر تعداد دانش‌آموزان کلاس ششم برابر ۱ یا ۲

باشد، دو دانش‌آموز کلاس پنجم نمی‌توانند ۸ امتیاز بیاورند (اگر در معادله $(*)$ به جای n ، عدد ۱ یا عدد ۲ را قرار دهیم، برای m عددی منفی به دست می‌آید). پس $n=7$ یا $n=14$.

اگر $n=7$ ، از $(*)$ به دست می‌آید $m=4$ و اگر $n=14$ ، آن وقت

$$m=8$$

$n=170$ را تعداد دانش‌آموزان کلاس پنجم و m را تعداد امتیازهای آن‌ها می‌گیریم. به این ترتیب، تعداد دانش‌آموزان کلاس ششم برابر $10n$ و تعداد امتیازهای آن‌ها برابر $4/5m$ می‌شود. تعداد کل شرکت‌کنندگان در مسابقه برابر $11n$ و تعداد کل امتیازهایی که کسب کرده‌اند برابر $5/5m$ است.

روشن است که تعداد کل امتیازها، برابر است با تعداد کل شرکت‌کنندگان.

بنابراین

$$5/5m = \frac{11n(11n-1)}{2}$$

$$m = n(11n-1) \quad \text{در نتیجه}$$

هر يك از دانش‌آموزان کلاس پنجم $11n-1$ دو بازی کرده است (تعداد کل مسابقه‌دهنده‌گان برابر با $11n$ است) و، بنابراین، n دانش‌آموز کلاس پنجم، تنها وقتی می‌توانند روی هم $(11n-1)n$ امتیاز را به دست آورند که، هر کدام از آن‌ها، در همه بازی‌ها برنده باشند و این تنها برای $n=1$ ممکن است (چون دو دانش‌آموز کلاس پنجم، در مسابقه بین خود، یکی برنده و دیگری بازنده و یا مساوی می‌شوند).

تنها جواب مساله $n=1$ و $m=10$ است.

۱۷۱. اگر a و b و c را طول ضلع‌ها و p را نصف محیط مثلث بگیریم،

بنابر شرط مساله، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p$$

$p-a=x$ ، $p-b=y$ و $p-c=z$ فرض می‌کنیم، در این صورت

$$\sqrt{(x+y+z)xyz} = 2(x+y+z)$$

از مجذور کردن دوطرف این برابری به دست می‌آید:

$$4(x+y+z) = xyz$$

که در آن، x و y و z یا عددهایی درست و مثبت‌اند و یا نصف عددهایی فرد. روشن است که حالت اخیر ممکن نیست، زیرا، اگر چنین باشد، درست‌چپ برابری، عدد درست داریم، درحالی که درست‌راست آن يك عدد کسری. بنابراین x و y و z ، عددهایی درست‌اند.

فرض می‌کنیم $x \geq y \geq z$. از معادله اخیر داریم:

$$x = \frac{4y+4z}{yz-4}$$

$$\frac{4y+4z}{yz-4} \geq y$$

یعنی

$yz-4$ عددی مثبت است، زیرا x عددی مثبت است، بنابراین می‌توانیم دوطرف نابرابری اخیر را در $yz-4$ ضرب کنیم که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$y^2z - 8y - 4z \leq 0 \Rightarrow (y - y_1)(y - y_2) \leq 0 \quad (*)$$

که در آن، y_1 و y_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $y^2z - 8y - 4z = 0$ هستند (این ریشه‌ها، به z بستگی دارند):

$$y_1 = \frac{4 + \sqrt{16 + 4z^2}}{z}, \quad y_2 = \frac{4 - \sqrt{16 + 4z^2}}{z}$$

چون $\sqrt{16 + 4z^2} > 4$ ، بنابراین y_2 منفی است و همیشه داریم $y \geq y_2$ (چون y مثبت است). در نتیجه، برای برقراری نابرابری $(*)$ باید داشته باشیم $y - y_1 \leq 0$ ، یعنی

$$y \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 4z^2}}{z}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید.

$$yz \leq 4 + \sqrt{16 + 4z^2}, \text{ یا } z^2 - 4 \leq \sqrt{16 + 4z^2}$$

(زیرا $y \leq z$). اگر دو طرف این نابرابری را مجذور کنیم:

$$z^4 - 8z^2 + 16 \leq 16 + 4z^2 \text{ یا } z^4 \leq 12z^2$$

که از آن‌جا به سادگی به دست می‌آید: $z \leq 3$.

اکنون حالت‌های ممکن را، به طور جداگانه، بررسی می‌کنیم:

$$1. \quad z = 1 \text{ و } y \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 4}}{1} < 9 \text{ عبارت}$$

$$x = \frac{4y + 4z}{yz - 4} = \frac{4y + 4}{y - 4}$$

تنها وقتی برابر عددی درست است که داشته باشیم $y = 5$ (و $x = 24$) یا

$y = 6$ (و $x = 14$) یا $y = 8$ (و $x = 9$).

$$2. \quad z = 2 \text{ و } y \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 16}}{2} < 5 \text{ عبارت}$$

$$x = \frac{4y + 4z}{yz - 4} = \frac{4y + 8}{2y - 4} = \frac{2y + 4}{y - 2}$$

که عددی است درست و نباید کمتر از y باشد، تنها به ازای $y = 3$ ($x = 10$)

یا $y = 4$ ($x = 6$) جواب دارد.

$$3. \quad z = 3 \text{ و } y \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 36}}{3} < 4 \text{ به ازای } z = y = 3 \text{ عبارت}$$

$$x = \frac{4y + 4z}{yz - 4}$$

عددی درست نیست و، در این حالت جوابی به دست نمی‌آید.

به این ترتیب، پنج جواب زیر برای مساله به دست می‌آید:

x	y	z	$x+y+z=p$	a	b	c
۲۴	۵	۱	۳۰	۶	۲۵	۲۹
۱۴	۶	۱	۲۱	۷	۱۵	۲۰
۹	۸	۱	۱۸	۹	۱۰	۱۷
۱۰	۳	۲	۱۵	۵	۱۲	۱۳
۶	۴	۲	۱۲	۶	۸	۱۰

۱۷۲. عددهای سطر اول را به صورت

$$0+1 \quad 0+2 \quad 0+3 \quad \dots \quad 0+n$$

و عددهای ستون آخر را به صورت

$$0+n \quad n+n \quad 2n+n \quad \dots \quad (n-1)n+n$$

در نظر می‌گیریم. به این ترتیب، هر یک از عددهای جدول، مجموعی از دو عدد است؛ عدد اول این مجموع، برای همه عددهای متعلق به یک سطر، و عدد دوم، برای همه عددهای متعلق به یک ستون، یکسان است. هر عددی را که انتخاب می‌کنیم، مجموعی است شامل دو جمله و، با انتخاب آن و حذف ستون وسط مربوط به آن، همه عددهایی از جدول حذف می‌شود که جمله دوم آن برابر با جمله دوم عدد انتخابی و یا جمله اول آن‌ها برابر با جمله اول عدد انتخابی است. بنابراین، در هر انتخاب، عددی را به مجموعه انتخابی اضافه می‌کنیم که هم در جمله اول و هم در جمله دوم، با عددی انتخاب شده قبلی فرق دارد. مجموع جمله‌های اول این عددها

$$0 + n + 2n + \dots + (n-1)n = \frac{n^2(n-1)}{2}$$

و مجموع جمله‌های دوم این عددها

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و بنابراین، مجموع همه عددهای انتخاب شده:

$$S = \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

۱۷۳. فرض می‌کنیم n عددی فرد باشد. قطری از جدول را که از گوشهٔ چپ بالا و گوشهٔ راست پایین می‌گذرد، «قطر اصلی» می‌نامیم و با d نشان می‌دهیم و جدول را نسبت به آن، متقارن می‌گیریم. دو عدد متناظر با هم در دو طرف قطر d (که موضع آن‌ها نسبت به d قرینه یکدیگرند)، با هم برابرند. بنابراین، مجموع عددهای واقع در بالای قطر d ، برابر است با مجموع عددهای واقع در زیر قطر d . به این ترتیب اگر عددهای واقع بر قطر d را در نظر نگیریم، هر یک از بقیهٔ عددها، به تعدادی زوج تکرار شده‌اند؛ اگر عدد k در خانه‌هایی از جدول که روی d نیستند، a^k بار آمده باشد، آن وقت a_k عددی است زوج (که برابر صفر هم می‌تواند باشد). چون هر عدد k ، درست یک بار در هر یک از n سطر جدول ظاهر می‌شود، بنابراین عدد k ، روی هم، n بار در جدول آمده است و چون n ، عددی است فرد، پس تعداد عددهای برابر k در جدول، عددی است فرد. به این ترتیب، تعداد دفعه‌هایی که عدد k روی قطر d ظاهر می‌شود، برابر است با $n - a_k$ ، که عددی است فرد؛ یعنی هر عدد k ($1 \leq k \leq n$) باید دست کم یکبار، روی قطر d آمده باشد (زیرا صفر، عددی است زوج) و چون تعداد کل خانه‌های واقع بر قطر d برابر n است، به ناچار هر یک از عددهای $1, 2, 3, \dots, n$ ، درست یکبار روی قطر ظاهر می‌شوند و، در ضمن نتیجه می‌شود:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = n - 1$$

نمونه جدول $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ نشان می‌دهد که، در حالت زوج بودن عدد n ،

حکم مساله درست نیست. با استدلالی شبیه استدلال بالا می‌توان ثابت کرد که، برای هر عدد زوج n ، این حکم نمی‌تواند صادق باشد (در این حالت، هر عدد k ، به تعداد $n - a_k$ بار (که عددی است زوج) روی قطر اصلی d قرار می‌گیرد).

۱۷۴. عدد واقع در محل برخورد سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نشان می‌دهیم؛ عدد a_{ij} می‌تواند برابر هریک از عددهای $1, 2, \dots, n^2$ باشد ($n, \dots, 2, 1$) اکنون فرض می‌کنیم $1 = a_{j_1 j_1}$ ، در این صورت بنا به فرض مساله

$$2 = a_{j_2 j_2}, 3 = a_{j_3 j_3}, \dots, n^2 = a_{j_{n^2} j_{n^2+1}}$$

در این جا، البته، همه اندیس‌های $j_1, j_2, \dots, j_{n^2+1}$ باهم متفاوت نیستند، زیرا هر کدام از آن‌ها می‌توانند، تنها یکی از n عدد متفاوت $1, 2, \dots, n$ را قبول کنند. توجه کنیم، هر مقدار مشخص k در دنباله عددهای

$$j_1, j_2, j_3, \dots, j_{n^2}, j_{n^2+1} \quad (*)$$

درست $2n$ بار ظاهر می‌شود، زیرا جدول مفروض، دارای n عدد در سطر k ام و n عدد در ستون k ام است. از آن جا که، هر عدد که «درون» دنباله $(*)$ قرار دارد (یعنی همه عددها، به جز دو عدد ابتدا و انتها)، درست دو بار ظاهر شده‌اند و با توجه به این که j_1 هم باید در دنباله $(*)$ ، به تعداد زوج $2n$ بار ظاهر شود، بنابراین $j_1 = j_{n^2+1}$ و این، به معنای آن است که آخرین عدد این دنباله، بر عدد آغاز آن منطبق است.

به این ترتیب، مساله به این جا منجر می‌شود که، تفاضل دو مجموع را محاسبه کنیم: مجموع عددهای واقع در سطر j_1 ام و مجموع عددهای واقع در ستون j_1 ام؛ اندیس‌های سطر و ستون برهم منطبق‌اند. اگر به قاعده‌ای توجه کنیم که جدول را، بر طبق آن، تشکیل داده‌ایم، می‌توان نتیجه گرفت که، اگر $a_{jj_1} = s$ ($j \neq j_{n^2}$)، یعنی اگر زوج (j, j_1) آخرین زوج دنباله

(*) نباشد $(s \neq n^2)$ ، آن وقت $a_{j,j} = s + 1$ ؛ به زبان دیگر، برای هر عدد s متعلق به ستون j و مخالف با n^2 ، عدد متناظر $s + 1$ در ستون j زام وجود دارد. همهٔ عددهای $a_{j,j} = s + 1$ که، به این ترتیب، به دست می‌آیند، بر همهٔ عددهای سطر j زام، به جز عدد ۱، منطبق‌اند (عدد ۱، از هیچ کدام از عددهای ستون j زام به دست نمی‌آید، زیرا این عدد، کوچکترین عدد جدول است)، بنابراین اگر عددهای ستون j زام را، که با n^2 متفاوت‌اند، با $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ نشان دهیم، آن وقت عددهای متعلق به سطر j زام، که با ۱ متفاوت‌اند، باید برابر $s_1 + 1, s_2 + 1, \dots, s_{n-1} + 1$ باشند به این ترتیب، تفاضل بین مجموع عددهای ستون j زام و مجموع عددهای سطر j زام، چنین می‌شود:

$$(s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} + n^2) - [(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + \dots + (s_{n-1} + 1) + 1] = n^2 - n$$

۱۷۵. روشن است که: اگر عدد واقع در محل برخورد سطر j زام و سطر j

را با a_{ij} نشان دهیم ($i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, m$)، آن وقت در هر جدولی که از جدول اصلی به دست می‌آید، در این خانهٔ جدول، یا عدد a_{ij} قرار دارد و یا عدد $-a_{ij}$ (زیرا، در هر گام، تنها علامت بعضی از عددها عوض می‌شود). بنابراین، تعداد کل جدول‌هایی که به دست می‌آید، نمی‌تواند از 2^{mn} بیشتر باشد، یعنی تعداد این گونهٔ جدول‌ها، عددی متناهی است (عدد 2^{mn} عبارت است از تعداد همهٔ مجموعه‌های ممکن از mn عدد a_{ij} که، هر کدام از این عددها، می‌تواند یکی از دو مقدار را قبول کند). چون تعداد این گونهٔ جدول‌ها محدود است، می‌توان در بین آن‌ها جدولی را پیدا کرد که، مجموع همهٔ عددهای واقع در آن، از مجموع همهٔ عددهای واقع در هر جدولی بیشتر باشد (البته، ممکن است، چند جدول با مجموعی یکسان، و دارای این ویژگی، وجود داشته باشد). این جدول را «جدول ماکزیمم» می‌نامیم. «جدول ماکزیمم» همان جدول مورد نظر ماست، زیرا اگر مثلاً، مجموع عددها در یکی از سطرها (یا یکی از ستون‌ها) عددی منفی باشد، با تغییر علامت عددهای آن سطر (یا ستون) به جدولی می‌رسیم که، مجموع

همه عددهای آن، از مجموع همه عددهای «جدول ماکزیمم» بیشتر است؛ و این، تعریف «جدول ماکزیمم» را نقض می‌کند.

۱۷۶. S را مجموع همه عددهای واقع در جدول، s_i را مجموع همه عددهای سطر i ام ($i = ۱, ۲, \dots, ۱۰۰$)، σ_j را مجموع همه عددهای ستون j ام ($j = ۱, ۲, \dots, ۸۰$) و سرانجام a_{ij} را عدد واقع در خانه محل برخورد سطر i ام و ستون j ام می‌گیریم. بنابراین شرط مساله داریم:

$$a_{ij} = s_i \cdot \sigma_j \quad (*)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} s_i &= a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{i,80} = s_i \sigma_1 + s_i \sigma_2 + \dots + \\ &+ s_i \sigma_{80} = s_i (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{80}) = s_i S \\ (i &= ۱, ۲, \dots, ۱۰۰) \end{aligned}$$

$s_i \neq ۰$ ، زیرا اگر $s_i = ۰$ ، آن وقت بنابر $(*)$ ، همه عددهای a_{ij} برابر صفر می‌شوند. درحالی‌که بنابر شرط مساله، یکی از عددها (عدد واقع در گوشه راست و بالا) مثبت است. به این ترتیب، می‌توان دو طرف برابری $s_i = s_i S$ را بر s_i تقسیم کرد که به دست می‌آید: $S = ۱$.

۱۷۷. از برابری عددهایی که نسبت به یکی از قطرها متقارن‌اند، معلوم می‌شود که، در بین ۶۴ عدد مفروض، بیش از ۲۰ عدد مختلف وجود ندارد (در شکل ۱۷، به جای عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ ، از عددهای ۱، ۲، ...، ۲۰ استفاده شده است).

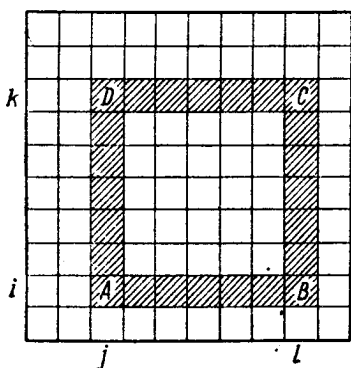
عددهای متعلق به یکی از سطرها، و مثلاً سطر i ام ($i = ۱, ۲, \dots, ۸$)، بر عددهای سطر $(i-۹)$ ام و، همچنین، بر عددهای ستون i ام و ستون $(i-۹)$ ام منطبق‌اند. اندیسی مانند i را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، مجموع عددهای سطر i ام، از ۵۱۸ بیشتر شده باشد؛ در این صورت، مجموع عددها در سطر $(i-۹)$ ام و در هر یک از ستون‌های i ام و $(i-۹)$ ام هم از ۵۱۸ بیشتر می‌شود (در شکل ۱۷، $i = ۳$ گرفته‌ایم و سطرها و ستون‌های متناظر را هاشور زده‌ایم). اگر این چهار مجموع را با هم جمع کنیم، عددی به دست می‌آید که نمی‌تواند از 4×۵۱۸ یعنی ۲۰۷۲ کمتر باشد. در این مجموع،

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۷	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۲
۶	۱۳	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۰	۳
۵	۱۲	۱۷	۲۰	۱۹	۱۶	۱۱	۴
۴	۱۱	۱۶	۱۹	۲۰	۱۷	۱۲	۵
۳	۱۰	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۳	۶
۲	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۷
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

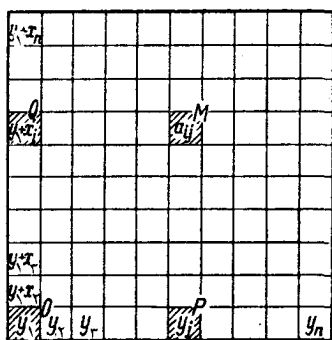
شکل ۱۷

چهار عدد وجود دارند که، هر کدام، دوبار به حساب آمده‌اند (این چهار عدد، در برخورد سطرها و ستون‌ها قرار دارند و در شکل ۱۷، از دو طرف هاشور خورده‌اند). بنابراین، مجموع کل عددهای واقع در این دو سطر و دو ستون (که در شکل ۱۷ هاشور خورده‌اند) نمی‌تواند از $2072 - \sigma$ کمتر باشد که، در آن، σ عبارت است از مجموع چهار عددی که در برخورد سطرها و ستون‌ها قرار دارند. بنابراین شرط مساله، باید داشته باشیم: $\sigma \leq 112$ (چرا که ۱۱۲، برابر است با مجموع همه خانه‌های قطری). به این ترتیب، مجموع عددهای واقع در خانه‌های هاشور خورده، از $112 - 2072$ ، یعنی ۱۹۶۰ کمتر نیست، در حالی که مجموع همه عددهای جدول، روی هم برابر است با ۱۹۵۶. تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۰۱۷۸ برای روشن بودن وضع، سطرها را از پایین به بالا و ستون‌ها را از چپ به راست، شماره گذاری می‌کنیم. شرط مساله، با ویژگی زیر هم‌ارز است: برای هر چهار اندیس i, j, k, l ، با شرط $i \neq l$ و $i \neq k$ برابری $a_{ij} + a_{kl} = a_{ki} + a_{jl}$ برقرار است. به زبان دیگر، برای هر مستطیل $ABCD$ (شکل ۱۸، a) در روی صفحه شطرنجی، مجموع عددهای واقع در دو راس مقابل A و C ، برابر است با مجموع عددهای واقع در دو راس دیگر B و D . در واقع، فرض می‌کنیم که دو رخ از n رخ، در راس‌های A و C باشند؛ روشن است که، این دو رخ، می‌توانند به خانه‌های B و D منتقل شوند، به نحوی که مثل



(a)



(b)

شکل ۱۸

قبل، می‌توان آن‌ها را به صورت دومهره‌ای در نظر گرفت که در سطرهای i و k و در ستون‌های j و l قرار دارند. می‌دانیم، مجموع عددهای واقع در خانه‌های شامل رخ‌ها، مقداری ثابت، بنابراین به ناچار، مجموع دو عدد خانه‌های A و C با مجموع دو عدد خانه‌های B و D ، برابر است.

بخش پایانی حل، دشوار نیست. عددهای واقع در سطر پایینی صفحه شطرنجی را $y_1, y_2, \dots, y_n$ و عددهای واقع در ستون اول را $y_1 + x_n, y_1 + x_{n-1}, \dots, y_1 + x_2, y_1 + x_1$ می‌گیریم (شکل ۱۸، b). علاوه بر این فرض می‌کنیم $x_1 = 0$. روشن است که، برای پایین‌ترین سطر (سطر اول) و ستون سمت چپ (ستون اول) خواهیم داشت: $a_{11} = y_1 = x_1 + y_1$ (زیرا $x_1 = 0$) و $a_{j1} = x_j + y_1$. از طرف دیگر، اگر $i > 1$ و $j > 1$ ، آن وقت عدد a_{ij} را که در خانه M نوشته شده است، می‌توان با استفاده از مربع $MPQD$ (شکل ۱۸، b) پیدا کرد و، بنابراین آن چه گفته‌ایم، داریم:

$$a_{ij} + y_1 = (x_i + y_1) + y_j \Rightarrow a_{ij} = x_i + y_j$$

برعکس، به سادگی روشن می‌شود که، اگر عددهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $y_1, y_2, \dots, y_n$ وجود داشته باشند، به نحوی که $a_{ij} = x_i + y_j$ ؛ آن وقت به ناچار، شرط مساله درباره رخ‌ها برقرار است (در يك صفحه شطرنجی $n \times n$ ، به $n!$ طریق می‌توان رخ‌ها را قرار داد، به نحوی که یکدیگر

را تهدید نکنند. چرا؟)

۱۷۹. به ازای $i = j = k$ ، معادله مفروض به صورت $3x_{ii} = 0$ در می‌آید و، بنابراین $x_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). اکنون فرض می‌کنیم $k = j \neq i$. در این صورت، معادله مفروض، چنین می‌شود:

$$x_{ij} + x_{jj} + x_{ji} = 0$$

و از آن‌جا، چون $x_{jj} = 0$ ، پس $x_{ij} = -x_{ji}$. سرانجام، اگر همه معادله‌های به صورت $x_{ij} + x_{ik} + x_{ki} = 0$ را، برای i و j ثابت و $k = 1, 2, \dots, n$ در نظر بگیریم و باهم جمع کنیم، به این نتیجه می‌رسیم:

$$nx_{ij} + (x_{j1} + x_{j2} + \dots + x_{jn}) - (x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}) = 0$$

(از برابری $x_{ki} = -x_{ik}$ استفاده کرده‌ایم). قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{n}(x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}) = t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

به دست می‌آید:

$$x_{ij} = t_i - t_j$$

۱۸۰. روشن است که، حکم مساله، درباره «صفحه شطرنجی» 1×1 (یعنی صفحه‌ای که تنها شامل یک خانه باشد) درست است. (در این حالت، بنا بر فرض، نمی‌توانیم «سطری» را حذف کنیم، و، باز هم بنا بر فرض، در این خانه یک ستاره وجود دارد). به همین مناسبت، این امکان را پیدا می‌کنیم که از روش استقرای ریاضی استفاده کنیم. در حالت $n = 2$ ، باید در هر یک از دو سطر و هر یک از دو ستون، یک ستاره وجود داشته باشد (یعنی، دو ستاره در دو خانه قطری قرار گیرند) تا با حذف هر سطر، ستونی باقی بماند که درست شامل یک ستاره باشد (اگر در یک سطر دو ستاره باشد، آن وقت با حذف آن سطر، ستونی که شامل یک ستاره باشد، باقی نمی‌ماند؛ و اگر در یک ستون دو ستاره باشد، وقتی که سطری را حذف نکرده‌ایم، ستونی وجود ندارد که، در آن، درست یک ستاره باشد). در واقع، در این حالت، اگر جای سطرها را با

*	
+	*

(a)

*				
+	*			
+	+	*		
+	+	+	*	
+	+	+	+	*

(b)

شکل ۱۹

جای ستون‌ها عوض کنیم، تغییری در جدول پیدا نمی‌شود (شکل ۱۹، a). به این ترتیب، در حالت $n=2$ ، می‌توان جدول را به صورتی در نظر گرفت که ستاره‌ها همراه با خانه زیرین آن‌ها، یک «مثلث» تشکیل بدهند. ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار دلخواه n ، می‌توان سطرها و ستون‌های جدول را طوری عوض کرد که، جدول آرایشی «مثلثی» به خود بگیرد، به نحوی که همه ستاره‌های جدول در امتداد قطری که از گوشه چپ بالا به گوشه راست پایین می‌آید، قرار گیرند (و احتمالاً در زیر این قطر، ولی همه خانه‌های بالای قطر خالی بماند).

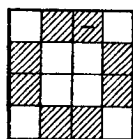
فرض می‌کنیم، این حکم، برای جدول $(n-1) \times (n-1)$ درست باشد و جدولی $n \times n$ را در نظر می‌گیریم. جدول اخیر $n \times n$ دارای ستونی است که تنها شامل یک ستاره است. این ستون را به آخرین ستون سمت چپ می‌بریم و، سپس، سطرها را طوری جابه‌جا می‌کنیم که، ستاره، در بالاترین خانه این ستون قرار گیرد (شکل ۱۹، b را ببینید). جدول اصلی $n \times n$ شامل یک «زیر جدول» $(n-1) \times (n-1)$ است که شرط‌های مساله در آن صدق می‌کند و، بنابه فرض استقرا، سطرها و ستون‌های آن را می‌توان طوری جابه‌جا کرد که آرایش «مثلثی» به خود بگیرد؛ در این صورت، جدول $n \times n$ هم به صورت «مثلثی» درمی‌آید.

به این ترتیب، هر جدولی را که با شرط‌های مساله سازگار باشد، می‌توان، به صورت جدولی با آرایش «مثلثی» درآورد و، روشن است که در مورد چنین جدولی، حکم مساله درست است.

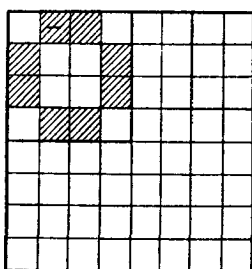
۱۸۱. الف) در هر جدول 4×4 ، ۴ سطر، ۴ ستون و $2 \times 7 = 14$ «خط مایل» وجود دارد (از بین این ۱۴ «خط مایل»، چهار تا وجود دارند که، هر کدام، شامل یکی از مربع‌های گوشه‌ای است). در شکل ۲۰، a ، چهارخانه‌ای را که علامت «—» می‌تواند در یکی از آن‌ها قرار گیرد، هاشور زده‌ایم. هر یک از ۲۲ خط عمودی، افقی و مایل، شامل تعداد زوجی از این خانه‌هاست (دقیق‌تر، یا برابر ۵ یا برابر ۲). بنابراین، وقتی علامت‌های واقع در خانه‌های یکی از این خط‌ها را عوض کنیم، همیشه تعدادی از خانه‌های هاشور خورده با علامت «—» باقی می‌مانند، که عددی فرد خواهد بود و نمی‌تواند برابر عدد زوج شود.

ب) علامت «—» در هر خانه‌ای واقع باشد (غیر از خانه‌های گوشه‌ای)، همیشه می‌توانیم از جدول مفروض 8×8 ، جدول کوچکتري با اندازه‌های 4×4 را جدا کنیم، به نحوی که علامت «—» در آن، به همان ترتیبی قرار گرفته باشد که در مسأله الف) داشتیم (در شکل‌های ۲۰، a و c ، دو موقعیت مختلف از علامت «—» را نشان داده‌ایم). وقتی علامت‌ها را، مطابق با شرط مسأله، در جدول 8×8 تغییر دهیم، در ضمن، علامت‌های متناظر در جدول 4×4 هم تغییر می‌کنند و، بنابراین، با توجه به آن‌چه در بخش الف) ثابت کردیم، درستی حکم برای بخش ب) هم به دست می‌آید.

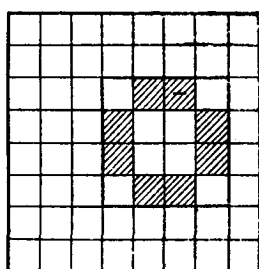
۱۸۲. الف) ببینیم، چند مربع 3×3 و 4×4 روی صفحه شطرنجی



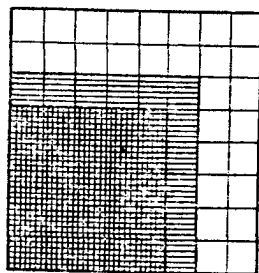
(a)



(b)



(c)



شکل ۲۱

۸×۸ وجود دارد! روشن است که، اگر مربعی ۶×۶ را در گوشهٔ چپ و پایین صفحهٔ ۸×۸ در نظر بگیریم (این مربع را در شکل ۲۱، با خط‌های افقی مشخص کرده‌ایم)، آن وقت هر مربع ۳×۳ در جدول اصلی می‌تواند شامل دست کم یکی از خانه‌های آن باشد؛ همچنین هر مربع ۴×۴ ، دست کم شامل خانه‌ای از مربع ۵×۵ است که در شکل ۲۱، هاشور قائم‌زده‌ایم. بنابراین، تعداد کل آرایش‌های مربعی، از مربع‌های ۳×۳ و ۴×۴ ، که می‌توانند در صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ قرار گیرند، برابر است با

$$۶ \times ۶ + ۵ \times ۵ = ۳۶ + ۲۵ = ۶۱$$

به این ترتیب، حداکثر ۲۶۱ حالت، برای تغییر علامت در خانه‌های صفحهٔ اصلی خواهیم داشت، زیرا در هر یک از ۶۱ حالت مربع فرعی ۳×۳ یا ۴×۴ ، می‌توانیم همهٔ علامت‌ها را مستقل از مربع‌های دیگر تغییر ندهیم. چون تعداد کل انتخاب‌های مختلف از علامت‌های «+» و «-» در ۶۴ خانهٔ صفحه، برابر است با ۲۶۴ و $۲۶۴ > ۲۶۱$ ، بنابراین با ۲۶۱ حالت ممکن در تغییر علامت‌ها، نمی‌توان به همهٔ ۲۶۴ حالت ممکن رسید؛ یعنی اگر مثلاً، در ابتدای کار، همهٔ علامت‌ها مثبت باشند، بعد از ۲۶۱ مورد ممکن که برای تغییر علامت‌ها وجود، حالت‌هایی از استقرار ممکن علامت باقی می‌ماند که ما نمی‌توانیم به آن‌ها برسیم. بنابراین، در حالت عکس هم، وقتی که با آرایش دلخواهی از علامت‌ها سروکار داریم، بعد از ۲۶۱ حالت ممکن، برای تغییر

علامت، ممکن است به آرایشی که همه علامت‌ها مثبت باشند، نرسیم. به پرسش مساله، باید پاسخ منفی داد.

(ب) این مساله، شبیه مساله الف) است. تعداد کل آرایش‌های مربعی از مربع‌های ۲×۶ ، روی صفحه شطرنجی ۸×۸ ، برابر است با $۷ \times ۷ = ۴۹$ و تعداد خانه‌های دوتایی مجاور که در سطرها یا ستون‌های کناری صفحه واقع باشند، برابر است با $۱۴ = ۷ \times ۲$. بنابراین، تعداد $۱۰۶۳ = ۴۹ + ۱۴$ حالت، برای تغییر رقم‌های سمت راست عددهای موجود در خانه‌های جدول وجود دارد (از بین این ۱۰۶۳ حالت ممکن، حالتی وجود دارد که، در آن، هیچ کدام از رقم‌ها عوض نمی‌شوند). به این ترتیب، اگر فرض کنیم، همه عددهای واقع در خانه‌های جدول، به صفر ختم شده‌اند، با توجه به این که $۱۰۶۳ > ۱۰۶۴$ ، نمی‌توان با برداشتن ۲۶۳ گام، به همه حالت‌های ممکن، در مورد رقم‌های سمت راست عددها رسید؛ یعنی اگر، برعکس، از حالتی دلخواه آغاز کنیم، ممکن است بعد از ۲۶۳ گام ممکن، نتوان به حالتی رسید که همه عددها به صفر ختم شده باشند.

یادداشت. روشن است که این جواب منفی برای مساله، در حالت کلی هم درست است، یعنی وقتی که بخواهیم، همه عددهای جدول بر عدد طبیعی n و مثلاً بر عدد ۱۹۷۶ (به جای ۱۰) بخش پذیر باشند.

۱۸۳. الف) پاسخ پرسش مساله، مثبت است. روشن است که می‌توانیم به حالتی برسیم که، دست کم یکی از مجموعه‌ها، شامل یک توپ باشد (برای این منظور، باید از هر سه مجموعه، به طور هم‌زمان و چند بار متوالی، یک توپ برداریم). بعد تعداد توپ‌های مجموعه یا مجموعه‌هایی را که شامل یک توپ‌اند، دو برابر می‌کنیم و، دوباره، به طور هم‌زمان، از مجموعه‌ها یک توپ برمی‌داریم؛ در نتیجه عمل اخیر، تعداد توپ‌ها در هر یک از مجموعه‌های بزرگ‌تر یک واحد کم می‌شود، در حالی که در مجموعه‌ای که یک توپ وجود داشت، باز هم یک توپ باقی می‌ماند. اگر عمل را به همین ترتیب ادامه دهیم، به حالتی می‌رسیم که، هر یک از مجموعه‌ها، درست شامل یک توپ می‌شود.

(ب) کاملاً شبیه بخش الف) حل می‌شود (مساله الف) را می‌توان

به صورت جدولی در نظر گرفت که يك سطر و دو ستون دارد و در خانه‌های آن، عددهای طبیعی نوشته شده است). عددهای يك سطر را در نظر می‌گیریم، مثلاً سطر اول را. با عمل مجاز، و شبیه بخش الف) می‌توانیم با کم کردن يك واحد از همه عددهای سطر به جایی برسیم که دست کم یکی از این عددها برابر واحد شود، سپس همه ستون‌ها را دو برابر می‌کنیم و، دوباره، از همه عددهای سطر اول يك واحد کم می‌کنیم. این عمل را آن قدر ادامه می‌دهیم تا به جایی برسیم که همه عددهای سطر اول برابر واحد شوند؛ اکنون اگر از همه آن‌ها يك واحد کم کنیم، عددهای سطر اول، همگی برابر صفر می‌شوند. بعد به سطر دوم می‌پردازیم و، با همین روش، همه عددهای آن را برابر صفر می‌کنیم و غیره.

۱۸۴. عدد a را در دستگاه عددنویسی به مبنای ۲، می‌توان این طور نوشت:

$$a = \alpha_n \cdot 2^n + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_0 \cdot 1$$

که در آن، هریک از رقم‌های $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ یا برابر ۰ است و یا برابر ۱ (α_n را برابر ۱ می‌گیریم). واضح است، اگر a عددی زوج باشد، آن وقت $\alpha_0 = 0$ و

$$a_1 = \frac{a}{2} = \alpha_n \cdot 2^{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \alpha_{n-2} \cdot 2^{n-3} + \dots + \alpha_1 \cdot 1 \quad (*)$$

و اگر a عددی فرد باشد، آن وقت $\alpha_0 = 1$ و عدد $a_1 = \frac{a-1}{2}$ دوباره به همان صورت $(*)$ درمی‌آید. به این ترتیب، اگر عدد a در عددنویسی به مبنای ۲ و با رقم‌های ۰ و ۱، به صورت $a = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0$ باشد، آن وقت، عدد a_1 در همان مبنای عددنویسی به صورت $a_1 = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1$ درمی‌آید. به همین ترتیب، برای عددهای بعدی

$$a_2 = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_2, \quad a_3 = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_3, \quad \dots, \quad a_n = \alpha_n = 1$$

از طرف دیگر، به روشنی داریم:

$$b_1 = 2b, b_2 = 2b_1 = 2^2b, b_3 = 2b_2 = 2^3b, \dots, b_n = 2^n b$$

روشن است که عدد

$$a_i = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_i} = \alpha_n \cdot 2^{n-i} + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-i-1} + \dots \\ \dots + \alpha_{i+1} \cdot 2 + \alpha_i \cdot 1$$

($n, \dots, 2, 1, 0$), وقتی فرد است که داشته باشیم: $\alpha_i = 1$ (به یاد بیاوریم که α_i یا صفر است و یا واحد). در این حالت خواهیم داشت:

$$b_i = 2^i \cdot b = (\alpha_i \cdot 2^i) b$$

بنابراین، مجموع مورد نظر مساله، یعنی مجموع همه عددهای b_i متناظر با عددهای فرد a_i ، به صورت زیر درمی آید:

$$(\alpha_n \cdot 2^n + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_0 \cdot 1) b = \\ = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0} \cdot b = ab$$

۱۸۵. کوتاه‌ترین راه حل مساله را می‌توان با روش استقرای ریاضی

به دست آورد. u_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) را، k امین عدد از دنباله فیبوناچی می‌گیریم. فرض می‌کنیم، حکم مساله، برای همه عددهای طبیعی، که قبل از u_k قرار دارند، درست باشد، ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای همه عددهای طبیعی کوچکتر از u_{k+1} هم درست است (درستی حکم را، برای نخستین عددهای طبیعی، مثلاً تا $u_5 = 5$ ، می‌توان به طور مستقیم مورد تحقیق قرار داد). همه عددهای طبیعی بین u_k و $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ را می‌توان به صورت $u_k + m$ نشان داد که، در آن $0 < m < u_{k-1}$. بنابراین فرض استقرا، هر عدد طبیعی m را، که از u_{k-1} کوچکتر باشد، می‌توان به صورت مجموع چند عدد از عددهای دنباله فیبوناچی نوشت، به نحوی که اندیس‌های آنها، از $k-1$ کوچکتر باشند. بنابراین، عدد $n = u_k + m$ هم به صورت مجموعی از عددهای دنباله درمی آید (که در بین آنها، بزرگترین عدد برابر است با u_k و بقیه عددها، اندیسی کوچکتر از $k-1$ دارند). به این ترتیب،

با فرض درست بودن حکم برای عددهای کوچکتر از u_k ، برای عددهای کوچکتر از u_{k-1} هم درست است.

یادداشت. اگر در این مجموع‌ها $2 = u_3$ (و نه $2 = u_1 + u_2$) و همچنین $4 = 3 + 1 = u_4 + u_2$ (و نه $4 = u_3 + u_2 + u_1$) بگیریم و غیره، آن وقت، می‌توان نتیجه گرفت که، هر عدد طبیعی، به صورت مجموعی شامل دو جمله متوالی از دنباله فیبوناچی به دست نمی‌آید (چرا؟). می‌توان ثابت کرد که، همه مجموع‌های ممکن از عددهای دنباله فیبوناچی (که با شرط اخیر سازگار باشند)، چیزی جز مجموعه همه عددهای طبیعی نیست، به نحوی که هر عدد طبیعی، درست یکبار در چنین مجموع‌هایی ظاهر می‌شود.

۱۸۶. مجموع $s_k = u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+8}$ شامل ۸ عدد متوالی از دنباله فیبوناچی را در نظر می‌گیریم. روشن است که، دنباله فیبوناچی، يك دنباله صعودی است:

$$u_1 = u_2 < u_3 < u_4 < \dots < u_n < u_{n+1} < \dots$$

بنابراین، کافی است ثابت کنیم، مجموع s_k ، بین دو عدد u_{k+9} و u_{k+10} قرار دارد، یعنی $u_{k+9} < s_k < u_{k+10}$. روشن است که

$$u_{k+9} = u_{k+8} + u_{k+7} < u_{k+8} + u_{k+7} + \dots + u_{k+1} = s_k$$

به این ترتیب، تنها این می‌ماند که ثابت کنیم: $s_k < u_{k+10}$. می‌توان ثابت کرد که مجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ از n عدد نخستین دنباله فیبوناچی، به اندازه يك واحد از $(n+2)$ امین عدد دنباله، یعنی u_{n+2} کمتر است. حکم را، مثلاً می‌توان با استقرای ریاضی ثابت کرد. روشن است که $u_4 - 1 = 3 - 1 = 1 + 1 = S_2$. اکنون فرض می‌کنیم، این حکم برای S_n درست باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای S_{n+1} هم درست است. داریم:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \\ &= (u_{n+2} - 1) + u_{n+1} = (u_{n+1} + u_{n+2}) - 1 = u_{n+3} - 1 \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$s_k = S_{k+1} - (u_1 + u_2 + \dots + u_k) < S_{k+1} = u_{k+1} - 1 < u_{k+1}$$

یادداشت ۱. با همین روش می‌توان ثابت کرد که، مجموع هر m عدد متوالی از عددهای دنباله فیبوناچی ($m \geq 3$)، نمی‌تواند برابر با عددی از این دنباله باشد.

یادداشت ۲. نابرابری $s_k < u_{k+1}$ را می‌توان با استفاده از تبدیل‌های عدد u_{k+1} ثابت کرد:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_{k+1} + u_{k+1} = (u_{k+1} + u_{k+1}) + u_{k+1} = \\ &= u_{k+1} + u_{k+1} + (u_{k+1} + u_{k+1}) = u_{k+1} + u_{k+1} + u_{k+1} + \\ &+ (u_{k+1} + u_{k+1}) = u_{k+1} + u_{k+1} + u_{k+1} + u_{k+1} + (u_{k+1} + u_{k+1}) = \\ &= \dots = u_{k+1} + u_{k+1} + \dots + u_{k+1} + (u_{k+1} + u_{k+1}) = \\ &= s_k + u_{k+1} > s_k \end{aligned}$$

۱۸۷. باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم عددهای $u_1, u_2, u_3, \dots$ از دنباله عددهای فیبوناچی بر ۵ را، به ترتیب $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ می‌گیریم. روشن است که از برابری $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$ ($k = 3, 4, 5, \dots$) به دست می‌آید:

$$\alpha_k = \begin{cases} \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} & (\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} < 5) \\ \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} - 5 & (\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} \geq 5) \end{cases} \quad (*)$$

با استفاده از دستور (*)، می‌توان جمله‌های دنباله α_k را پیدا کرد:

$$\underbrace{1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, \dots}_{\text{عدد } 20}$$

عدد ۲۰

می‌بینیم، دنباله عددهای α_k را می‌توان از روی ۲۰ جمله اول آن پیدا کرد (بدون این که نیازی به استفاده از دستور (*) باشد)، زیرا $\alpha_{21} = \alpha_1$

$\alpha_{22} = \alpha_2$ و، در نتیجه، با توجه به (*)، $\alpha_{23} = \alpha_3$ ، $\alpha_{24} = \alpha_4$ و غیره؛ یعنی دنباله باقی مانده‌های $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ ، دنباله‌ای متناوب است و دوره تناوب آن، شامل ۲۵ عدد است. چون در ۲۵ باقی مانده اول α_k ، باقی مانده‌های $\alpha_5, \alpha_{10}, \alpha_{15}$ و α_{20} برابر صفرند، بنابراین همه عددهای این دنباله که اندیسی مضرب ۵ داشته باشند، برابر صفر می‌شوند.

۱۸۸۰ در هریک از عددهای دنباله فیبوناچی، که ۵ رقم یا تعداد رقم‌های بیشتری داشته باشند، تنها چهار رقم سمت راست را نگه می‌داریم (و بقیه رقم‌ها را حذف می‌کنیم)؛ به این ترتیب، دنباله‌ای از عددها به دست می‌آید که، هر عضو آن، از 10^4 کوچکتر است. عددی از این دنباله را که در ردیف k ام قرار دارد با a_k نشان می‌دهیم. توجه داریم که، اگر عددهای a_k و a_{k+1} معلوم باشند، می‌توان عدد a_{k-1} را پیدا کرد، چرا که $(k-1)$ -امین عضو دنباله فیبوناچی، برابر است با تفاضل بین عضوهای $(k+1)$ ام و k ام این دنباله؛ در ضمن، چهار رقم سمت راست تفاضل را، می‌توان به کمک چهارم رقم سمت راست در دوجمله تفریق به دست آورد. در نتیجه، اگر برای بعضی از اندیس‌های k و n داشته باشیم:

$$a_k = a_{n+k} \text{ و } a_{k+1} = a_{n+k+1}$$

آن وقت خواهیم داشت: $a_{k-1} = a_{n+k-1}$ ، $a_{k-2} = a_{n+k-2}$ ، $\dots$ و $a_1 = a_{n+1}$. چون $a_1 = 0$ ، پس $a_{n+1} = 0$ ، یعنی عددی که در ردیف $(n+1)$ ام ظاهر می‌شود (در دنباله فیبوناچی)، به چهار رقم صفر ختم شده است. این مطلب باقی می‌ماند که ثابت کنیم، از بین $10^8 + 1$ جفت عددهای

$$\begin{array}{ll} a_1, & a_2 \\ a_2, & a_3 \\ \dots & \dots \\ a_{10^8}, & a_{10^8+1} \\ a_{10^8+1}, & a_{10^8+2} \end{array}$$

دست کم دوجفت منطبق برهم وجود دارد. و این روشن است، زیرا از ید

طرف، هریک از عددهای $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10^8+2}, a_{10^4}$ تجاوز نمی‌کند و، از طرف دیگر، با استفاده از 10^4 عدد $1, 2, 3, \dots, 9999$ می‌توان به تعداد $10^4 \times 10^4$ ، یعنی 10^8 جفت متفاوت از عددها را تشکیل داد (زیرا اولین عدد جفت عددها، می‌تواند 10^4 عدد مختلف و عدد دوم جفت هم 10^4 عدد مختلف را قبول کند).

یادداشت. می‌توان نخستین عدد، از عددهای دنباله فیبوناچی را، که به چهار رقم صفر ختم می‌شود، پیدا کرد. این عدد، جمله ردیف (۷۵۰۱)ام در دنباله است.

۱۸۹. برای $n > 1$ داریم:

$$a_n^2 = \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \right)^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} > a_{n-1}^2 + 2$$

بنابراین، از برابری $a_1^2 = 1$ نتیجه می‌شود:

$$a_2^2 > 1 + 2 = 3, \quad a_3^2 > 1 + 2 \times 2 = 5, \quad a_4^2 > 1 + 3 \times 2 = 7, \dots$$

$$\dots, \quad a_{100}^2 > 1 + 99 \times 2 = 199$$

یعنی $a_{100} > \sqrt{199} > 14$. به همین ترتیب:

$$a_n^2 = \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \right)^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} \leq a_{n-1}^2 + 3$$

که برای هر مقدار $n > 1$ درست است (تنها به ازای $n = 2$ ، نابرابری به برابری تبدیل می‌شود). داریم:

$$a_2^2 = 1 + 3 = 4, \quad a_3^2 < 1 + 2 \times 3 = 7, \quad a_4^2 < 1 + 3 \times 3 = 10, \dots$$

$$\dots, \quad a_{100}^2 < 1 + 99 \times 3 = 298$$

و در نتیجه $a_{100} < \sqrt{298} < 18$.

۱۹۰. راه حل اول. به دنباله مفروض $|a_{n+1}| = |a_n + 1|$ را اضافه می‌کنیم، سپس همه برابری‌های داده‌شده را مجذور می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$a_1^2 = 0, a_1^2 = (a_1 + 1)^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1, a_2^2 = (a_2 + 1)^2 = a_2^2 + 2a_2 + 1, \dots, a_n^2 = (a_n + 1)^2 = a_n^2 + 2a_n + 1$$

که از مجموع آن‌ها خواهیم داشت:

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = -n + a_n^2 > -n$$

و از آن‌جا

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$$

داده‌حل دوم. به ازای $n=1$ ، واسطه حسابی موردنظر برابر است با

$$\frac{a_1}{1} = 0 \quad ; \quad \text{به ازای } n=2 \text{ (در این حالت } a_2^2 = 1 \text{ و در نتیجه یا } a_2 = 1 \text{ و یا}$$

$a_2 = -1$)، برای واسطه حسابی داریم:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{0 + a_2}{2} = \frac{a_2}{2}$$

که برابر است با $\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$. به این ترتیب، برای $n=1$ و $n=2$ ، نابرابری

مورد نظر مساله، برقرار است. اکنون، به روش استقرای ریاضی متوسل می‌شویم. فرض می‌کنیم، نابرابری مجهول برای همه عددهای کوچکتر از n برقرار است و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای دنباله شامل n عضو هم برقرار می‌شود. دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n$ را سازگار با شرط مساله، در نظر می‌گیریم و a_m را کوچکترین عدد دنباله (یا یکی از کوچکترین عددها) فرض می‌کنیم (m می‌تواند یکی از مقادیرهای $1, 2, \dots, n$ را قبول کند). a_m را منفی می‌گیریم (اگر همه عددهای دنباله غیرمنفی باشند، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند، زیرا واسطه حسابی n عدد غیرمنفی، همیشه از $-\frac{1}{2}$ بزرگتر است) یعنی $a_m = -a_{m-1} - 1$. در نتیجه واسطه حسابی دو عدد a_m و

a_m برابر $-\frac{1}{2}$ است:

$$\frac{a_{m-1} + a_m}{2} = -\frac{1}{2}$$

اگر عددهای a_m و a_{m-1} را از دنباله مفروض جدا کنیم، $n-2$ عدد باقی می‌ماند که با شرط مساله سازگارند. درواقع، روشن است که $m \neq 1$ (زیرا اگر $m=1$ ، آن وقت $a_m = a_1 = 0$ که، در این صورت، a_{m-1} معنا ندارد). به جز این، اگر $m=2$ ، آن وقت $a_m = a_2 = -1$ و $a_3 = 0$ (زیرا $|a_3| = |a_{2+1}|$) و، بنابراین می‌توانیم عددهای a_1 و a_2 را حذف کنیم و دنباله‌ای را در نظر بگیریم که با $a_3 = 0$ آغاز می‌شود. به همین ترتیب، در حالت $m=n$ می‌توانیم دو جمله آخر a_n و a_{n-1} را حذف کنیم. سرانجام اگر $3 \leq m \leq n-1$ ، آن وقت

$$|a_{m-2} + 1| = |a_{m-1}| = |-a_{m-1}| \text{ و } |a_{m+1}| = |a_m + 1| = |-a_m - 1|$$

یعنی $|a_{m+2} + 1| = |a_{m+1}|$ و این به معنای آن است که عددهای

$$a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, a_{m+1}, \dots, a_n$$

با شرط مساله سازگارند.

باتوجه به فرض استقرا، برای دنباله شامل $n-2$ عدد داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-2} + a_{m+1} + \dots + a_n}{n-2} \geq -\frac{1}{2}$$

یعنی

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{m-2} + a_{m+1} + \dots + a_n \geq -\frac{1}{2}(n-2)$$

از طرف دیگر، می‌دانیم:

$$\frac{a_{m-1} + a_m}{2} = -\frac{1}{2} \text{ یا } a_{m-1} + a_m = -1$$

بنا بر این

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{m-2} + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \dots$$

$$\dots + a_n \geq -\frac{1}{2}(n-2) - 1 = -\frac{n}{2}$$

و از آن جا

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$$

۱۹۱. روشن است که تنها یکی از دو عدد نخستین a_0 و a_1 می‌تواند بزرگترین عضو دنباله مفروض باشد، زیرا برای $k \geq 2$ ، هر یک از a_k ها به ناچار کمتر از $\max[a_{k-1}, a_{k-2}]$ است*. همچنین به آسانی ثابت می‌شود که، اگر بخواهیم دنباله ما حداکثر طول را داشته باشد، باید a_1 بزرگترین عدد باشد. زیرا اگر دنباله‌ای با عدد های $a_1, a_2, \dots$ ($a_1 > a_2$) آغاز شود، آن وقت می‌توانیم آن را برای قبل از a_1 هم ادامه دهیم، بدون این که ویژگی‌های آن را تغییر داده باشیم و بنویسیم:

$$a_0 = a_1 - a_2, a_1, a_2 = |a_1 - a_0|, a_3, \dots$$

(در این جا روشن است که $a_1 > a_0 = a_1 - a_2$). به این ترتیب می‌توانیم خود را به بررسی دنباله‌هایی محدود کنیم که جمله اول آن، a_1 ، از همه بزرگتر باشد (و بعد از آن که جواب را پیدا کردیم، طول دنباله را یک واحد اضافه می‌کنیم، زیرا باید جمله با اندیس «صفر»، یعنی $a_0 = a_1 - a_2$ را هم در نظر بگیریم).

روشن است، اگر بزرگترین عضو دنباله $a_1 = 1$ باشد، آن وقت دنباله ما، بیش از دو عضو ندارد (تنها با اضافه کردن جمله $a_2 = 1$ ، دنباله شامل دو عدد a_1 و a_2 تشکیل می‌شود). اگر $a_1 = 2$ ، بزرگترین عضو دنباله

(*) $\max[a, b]$ در حالت $a \neq b$ به معنای بزرگترین عدد از بین دو عدد a و b و در حالت $a = b$ به معنای یکی از دو عدد a و b است.

باشد، دنباله ما نمی‌تواند بیش از ۳ عضو داشته باشد (در این حالت، اگر $a_2 = 2$ ، آن وقت دنباله ما به صورت ۲، ۲، و اگر $a_2 = 1$ ، به صورت ۲، ۱، ۱ درمی‌آید). اگر $a_1 = 3$ ، آن وقت دنباله بیش از پنج عضو ندارد، زیرا اگر $a_2 = 3$ یا $a_2 = 2$ یا $a_2 = 1$ بگیریم، به ترتیب، این دنباله‌ها به دست می‌آید:

$$1, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 3$$

از این مثال‌ها می‌توان حدس زد که، دنباله مطلوب، احتمالاً با عدددهای $a_1 = n$ و $a_2 = 1$ آغاز می‌شود و به این صورت است:

$$n, 1, n-2, n-1, n, 1, n-1, n, \dots \quad (*)$$

بنابراین، اگر تعداد عضوهای دنباله $(*)$ را با k_n نشان دهیم، داریم:

$$k_n = 3 + k_{n-2} \quad (**)$$

(زیرا با شروع از عضو چهارم $a_4 = n-2$ ، به دنباله‌ای مشابه دنباله اصلی می‌رسیم که، در آن، n به $n-2$ تبدیل شده است).

با توجه به برابری $(**)$ نتیجه می‌شود:

$$k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 3 + 2 = 5, k_4 = 3 + 3 = 6,$$

$$k_5 = 3 + 5 = 8, k_6 = 3 + 6 = 9, \dots$$

همه عدددهای k_n را می‌توان، بایک دستور کلی، به این صورت نوشت:

$$k_n = \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor \quad (***)$$

که در آن نماد $[x]$ ، طبق معمول، به معنای بخش درست عدد x ، یعنی بزرگترین عدد درست کوچکتر از x است. عبارت $\left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$ ، یعنی بخش

درست عدد $\frac{3n+1}{2}$. دستور $(***)$ را می‌توان به سادگی از دستور $(**)$

و با استفاده از روش استقرای ریاضی به دست آورد. این دستور، برای $n=1$ و $n=2$ برقرار است. از طرف دیگر، اگر دستور (***) به ازای $n-2$ درست باشد، به ازای n هم درست است، زیرا

$$k_n = k_{n-2} + 3 = \left[\frac{3(n-2)+1}{2} \right] + 3 = \left[\frac{3n+1}{2} \right]$$

به این ترتیب، دنباله (*) با بزرگترین عضو خود آغاز می‌شود و اگر $a_1 = n$ ، آن وقت طول دنباله (تعداد جمله‌های آن)، یعنی k_n ، با رابطه (***) به n بستگی دارد.

اکنون ثابت می‌کنیم، اگر دنباله ما با عدد $a_1 = n$ آغاز شده باشد، طول دنباله نمی‌تواند از عدد k_n ، که با دستور (***) مشخص می‌شود، بزرگتر باشد. طبیعی است که از روش استقرای ریاضی استفاده کنیم. فرض می‌کنیم، حکم، برای هر مقدار کوچکتر از n برقرار باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای n هم برقرار است (روشن است که، حکم، برای $n=1$ ، $n=2$ و $n=3$ درست است). فرض کنید دنباله ما، که با شرط‌های مساله سازگار است، با دو عدد

$$n, m, \dots$$

آغاز شده باشد ($m \leq n$). همه مقادیرهای ممکن m را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۰۱. اگر $m = n$ ، آن وقت دنباله در جمله دوم به پایان می‌رسد.

۰۲. اگر n عددی زوج و $m = \frac{n}{2}$ ، آن وقت دنباله در جمله سوم

می‌شود و به صورت

$$n, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}$$

درمی‌آید. در این حالت هم روشن است که، طول دنباله، از نمی‌کند.

۳. اگر $n > m > \frac{n}{2}$: عضو n را از دنباله کنار می‌گذاریم، به دنباله

$$m, n-m, \dots$$

می‌رسیم که باز هم با بزرگترین عضو خود، m ، آغاز شده است. بنابه فرض استقرا، دنبالهٔ اخیر بیش از $k_m = \left\lfloor \frac{3m+1}{2} \right\rfloor$ عضو ندارد. چون یک عضو از دنباله را کنار گذاشتیم و چون $m \leq n-1$ ، بنابراین تعداد عضوهای دنباله، از عدد زیر بیشتر نمی‌شود:

$$\begin{aligned} 1 + \left\lfloor \frac{3m+1}{2} \right\rfloor &\leq 1 + \left\lfloor \frac{3(n-1)+1}{2} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor = k_n \end{aligned}$$

۴. سرانجام، اگر $m < \frac{n}{2}$ ، آن وقت دنباله به این ترتیب آغاز می‌شود:

$$n, m, n-m, n-2m, m, \dots$$

اگر در این حالت داشته باشیم $n-2m \geq m$ (یعنی اگر $m \leq \frac{n}{3}$)، آن وقت دنباله‌ای که بعد از حذف سه عضو اول این دنباله به دست می‌آید (یعنی با عدد $n-2m$ آغاز شود) طوری است که، بزرگترین عضو آن، عضو اول آن است و، بنابراین، بنابه فرض استقرا، تعداد جمله‌های آن از عدد زیر بیشتر نیست:

$$\begin{aligned} k_{n-2m} &= \left\lfloor \frac{3(n-2m)+1}{2} \right\rfloor \leq \\ &\leq \left\lfloor \frac{3(n-2)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor - 3 \end{aligned}$$

(چون $m \geq 1$). در نتیجه، تعداد جمله‌های دنبالهٔ اصلی، از

$$\left[\frac{3n+1}{2} \right] = k_n \text{ تجاوز نمی‌کند.}$$

اگر $n - 2m < m$ ، یعنی اگر $m > \frac{n}{3}$ ، آن وقت عضو ششم دنباله

برابر است با $m - (n - 2m)$ و، بنابراین، کوچکتر از m است؛ یعنی در این حالت، بعد از حذف چهار جمله اول، به دنباله‌ای می‌رسیم که بزرگترین عضو خود، m ، آغاز شده است و، در نتیجه، تعداد جمله‌های آن از

$$k_m = \left[\frac{3m+1}{2} \right] \leq \left[\frac{3n+2}{4} \right]$$

تجاوز نمی‌کند. بنابراین، تعداد عضوهای دنباله مفروض، کمتر است از

$$k_m + 4 \leq \left[\frac{3n+2}{4} \right] + 4 \leq \left[\frac{3n+1}{2} \right] = k_n$$

به این ترتیب، حکم مساله، برای دنباله‌ای که با بزرگترین عضو خود آغاز می‌شود، ثابت شد.

دنباله مورد نظر مساله، نمی‌تواند بیش از

$$1 + k_{1967} = 1 + \left[\frac{3 \times 1967 + 1}{2} \right] = 2952$$

عضو داشته باشد و، این دنباله، با عددهای زیر آغاز می‌شود:

... ۱، ۱۹۶۳، ۱۹۶۴، ۱، ۱۹۶۵، ۱۹۶۶، ۱، ۱۹۶۷، ۱۹۶۶

۰۱۹۲ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید، دنباله

$$\alpha_1, \overline{\alpha_1 \alpha_2}, \overline{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \dots$$

شامل تعداد محدودی عدد مرکب باشد. واضح است که، در این صورت، در دنباله

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

تعداد محدودی عدد زوج وجود دارد (زیرا، به جز ۲، هر عدد دیگری که

به رقمی زوج ختم شده باشد، عددی مرکب است). بنابراین، همهٔ رقم‌های $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots$ می‌تواند عدد طبیعی دلخواهی باشد) باید فرد باشند. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، در دنبالهٔ مفروض رقم‌های $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ، تعداد رقم‌های برابر ۵ باید محدود باشد (چرا که عددهای مختوم به ۵، بر ۵ بخش‌پذیرند). به این ترتیب، با آغاز از جایی، تنها باید رقم‌های ۱، ۳ یا ۷ آمده باشند (بنابر شرط مساله، رقم ۹ در این دنباله وجود ندارد). علاوه بر این، از آن‌جا که با اضافه کردن رقم ۳ به سمت راست یک عدد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۳ تغییر نمی‌کند و، با اضافه کردن رقم ۱ یا رقم ۷ به سمت راست عدد، به باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم آن بر ۳، یک واحد اضافه می‌شود ($7 = 2 \times 3 + 1$)، بنابراین اگر تعداد رقم‌های ۱ و ۷ در دنبالهٔ ما، بی‌نهایت باشد، آن وقت از بین عددهایی که به ۱ یا ۷ ختم شده‌اند، بی‌نهایت عدد پیدا می‌شود که بر ۳ بخش‌پذیرند (در واقع اگر مثلاً باقی‌ماندهٔ $\overline{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ بر ۳ را برابر صفر بگیریم، با اضافه شدن رقم ۳ به انتهای آن باز هم بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود و اگر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم آن بر ۳ برابر ۱ یا ۲ باشد، به ترتیب، هر جا که یک رقم ۱ (یا ۷) و یا دو رقم ۱ و ۷ (یا دو رقم ۱ یا دو رقم ۷) به انتهای آن اضافه شود، عددی به دست می‌آید که بر ۳ بخش‌پذیر است).

به این ترتیب، اگر بخواهیم در دنبالهٔ عددهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ، تعداد محدودی عددهای مرکب وجود داشته باشد، باید در دنبالهٔ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ، از جایی به بعد (و مثلاً از α_N به بعد) تنها با رقم‌های برابر ۳ سروکار داشته باشیم. بنابراین، دنبالهٔ مفروض، به این صورت درمی‌آید.

$$M = \overline{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N-1} \underbrace{333 \dots 3}_k} = 10^k A + 3B$$

که در آن

$$A = \overline{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N-1}} \text{ و } B = \underbrace{111 \dots 1}_k, (k = 1, 2, 3, \dots)$$

p را مقسوم علیه اولی از عدد A می گیریم (که ممکن است باخود A برابر باشد). می توانیم p را، غیر از ۲ و ۵ فرض کنیم، زیرا اگر N به اندازه کافی بزرگ باشد، α_{N-1} برابر ۱ یا ۷ یا ۳ است. علاوه بر این، به تعداد نامتناهی از مقدارهای k وجود دارد، به نحوی که عدد B (که با k رقم برابر واحد نوشته شده است)، بر p بخش پذیر باشد (یادداشت پایان حل مسئله ۱۴۴ را ببینید). برای این مقدارهای k ، عدد $M = 10^k A + 3B$ عددی مرکب است (بر A بخش پذیر است) که فرض ما را نقض می کند. حکم مساله، با برهان خلف ثابت شد.

۱۹۳. الف) اگر هر رقم فرد را با o و هر رقم زوج را با e نشان دهیم، به سادگی روشن می شود که آغاز دنباله مفروض را می توان به صورت زیر نوشت (توجه کنید: اگر عددی زوج باشد، رقم سمت راست آن زوج و اگر عددی فرد باشد رقم سمت راست آن فرد است):

ooooooooooooooooe...

این دنباله، به همین ترتیب و به صورتی متناوب تکرار می شود؛ بعد از هر چهار رقم متوالی فرد، یک رقم زوج ظاهر می شود. به این ترتیب رقم های ۱۲۳۴ که به صورت $oeoe$ است، نمی تواند در دنباله مفروض ظاهر شود.

ب) با ۱۵ رقم ۱، ۵، ۱، ۲، ...، ۹ می توان 10^4 گروه چهارتایی متمایز تشکیل داد. بنابراین، اگر دنباله ای شامل 10004 رقم داشته باشیم، باید یکی از این گروه های چهاررقمی دوبار ظاهر شود. علاوه بر این، اگر فرض کنیم، چهار رقم ردیف i ، $i+1$ ، $i+2$ و $i+3$ بر چهار رقم ردیف j ، $j+1$ ، $j+2$ و $j+3$ از دنباله منطبق باشند ($j < i$)، آن وقت بنا بر قانون تشکیل دنباله مفروض، باید رقم ردیف $(i-1)$ ام بر رقم ردیف $(j-1)$ ام، همچنین رقم ردیف $(i-2)$ ام بر رقم ردیف $(j-2)$ ام و غیره منطبق باشد. به این ترتیب، رقم های ردیف های $(i-j-1)$ ، $(i-j)$ ، $(i-j+1)$ و $(i-j+2)$ (بر رقم های ردیف های ۱، ۲، ۳ و ۴ منطبق می شوند، یعنی همان گروه چهارتایی ۱۹۷۵ را تشکیل می دهند).

۱۹۴. روشن است که، در بین عده های هشت رقمی و یا عده هایی که تعداد

رقم‌های آن‌ها کمتر از هشت است، نمی‌توان عددی پیدا کرد که، مجموع رقم‌های آن برابر $81 = 9 \times 9$ شود. بین عددهای ۹ رقمی هم، تنها يك عدد وجود دارد که مجموع رقم‌های آن برابر ۸۱ باشد، یعنی عدد

$$999\ 999\ 999$$

یعنی در دنباله $(**)$ ، عدد ۸۱، برای نخستین بار، در جمله ردیف $(111\ 111\ 111)$ ظاهر می‌شود. عدد بلافاصله بعد از ۸۱ در دنباله $(**)$ برابر است با ۹ (که مجموع رقم‌های عدد $8000\ 000\ 001$ است). در دنباله $(**)$ ، برای نخستین بار، در جمله ردیف (111) ام به عدد ۲۷ برخورد می‌کنیم که متناظر است با عدد ۹۹۹ در دنباله $(*)$. بنابراین در بین عددهای سه رقمی دنباله $(*)$ ، نمی‌توان چهار عدد متوالی پیدا کرد که، مجموع رقم‌های آن‌ها، برابر ۲۷ باشد. ولی در بین عددهای چهار رقمی در دنباله $(*)$ ، می‌توان چهار عدد متوالی پیدا کرد که مجموع رقم‌های آن‌ها برابر ۲۷ باشد، این عددها چنین‌اند

$$3969,\ 3978,\ 3987,\ 3996$$

و بنابراین بلافاصله، قبل از آن‌که چهار عدد متوالی ۲۷ در دنباله $(**)$ برای نخستین بار ظاهر شود، عدد ۱۸ در این دنباله وجود دارد که متناظر است با عدد ۳۹۶۰ در دنباله $(*)$.

همچنین، سه عدد متوالی ۳۶ در دنباله $(**)$ ، متناظر است با عددهای

$$29979,\ 29988,\ 29997$$

از دنباله $(*)$ و عدد بلافاصله قبل از آن‌ها در دنباله $(**)$ برابر است با ۲۷ (که متناظر است با عدد ۲۹۹۷۰).

پرسش آخر مساله، تا حدی مبهم است؛ ولی تاحدی به روشی مربوط می‌شود که، برای تعیین چهار عدد ۳۹۶۹، ۳۹۷۸، ۳۹۸۷ و ۳۹۹۶ به کار بریم در این جا وارد بحث تفصیلی نمی‌شویم و تنها به يك مورد خاص می‌پردازیم و به بررسی کوتاهی از ساختمان عددهای دنباله $(**)$ ، در رابطه با رقم‌هایی که از تقسیم عددهای دنباله $(*)$ بر ۹ به دست می‌آیند، توجه می‌کنیم.

چهار عددی را در نظر بگیرید که متناظر با چهار عدد متوالی ۳۶ در

(**) بودند. از تقسیم این چهار عدد بر ۹، به چهار عدد زیر می‌رسیم:

۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴

چهار عدد سه رقمی که رقم‌های هریک (از چپ به راست) غیر صعودی است. اکنون، عددهای از ۱ تا ۱۱۰ را، مطابق جدول زیر، طوری تنظیم می‌کنیم که، در آن، عددهای دو رقمی که رقم‌های هریک (از چپ به راست) غیر صعودی است، در انتهای هر سطر جدول قرار گیرند. این عددها را، در جدول. درشت‌تر (با حرف‌های سیاه) نشان داده‌ایم. عددهای دو رقمی مختوم به صفر را استثنا کنید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲
۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳
۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴
۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵
۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶
۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷
۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۳	۸۲	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸
۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹
۱۰۰	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷	۱۰۸	۱۰۹	۱۱۰

اگر این عددها را ۹ برابر و، سپس مجموع رقم‌های هر عدد را پیدا کنیم، به جدول زیر می‌رسیم

۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۱۸
۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۱۸	۱۸
۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۱۸	۱۸	۱۸
۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸
۹	۹	۹	۹	۹	۹	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸
۹	۹	۹	۹	۹	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸

۹	۹	۹	۹	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸
۹	۹	۹	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸
۹	۹	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸
۹	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸

به این ترتیب، می‌توان موقعیت‌های جالبی از عددهای دنباله $(**)$ را کشف کرد.

۱۹۵۰. قبل از هر چیز توجه کنیم که هریک از عددهای $I_0, I_1, I_2, \dots$ از عدد قبل از خود و با اضافه کردن چند عدد جدید به دست می‌آید. علاوه بر این، به سادگی دیده می‌شود که، ضمن عبور از I_{n-1} به I_n ، به عددهای جدیدی نیاز داریم که هر کدام آن‌ها، از n بزرگتر است. بنابراین، عدد ۱۹۷۳، درانتخاب عددهای جدیدی که برای اندیس‌های بزرگتر از ۱۹۷۳ انجام می‌دهیم، ظاهر نخواهد شد؛ یعنی در جمله‌هایی از دنباله، که اندیسی بالاتر از ۱۹۷۳ دارند، تعداد عددهای برابر ۱۹۷۳ تغییر نمی‌کند.

a و b را نسبت به هم اول می‌گیریم و ثابت می‌کنیم، زوج ثابت a و b در دنباله $I_0, I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ درست یکبار ظاهر می‌شود (برای مشخص بودن وضع a را درست‌چپ b در نظر می‌گیریم؛ در ضمن زوج (a, b) را با زوج (b, a) متفاوت فرض می‌کنیم)؛ و درحالتی که a و b نسبت به هم اول نباشند، زوج (a, b) ظاهر نمی‌شود. برای اثبات، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. اگر بزرگترین عدد از بین دو عدد a و b ، از ۲ تجاوز نکند، زوج (a, b) تنها می‌تواند به صورت $(1, 2)$ یا $(2, 1)$ باشد و، هریک از آن‌ها، تنها درانتخاب I_1 ، که شامل عددهای ۱، ۲، ۱ است، و فقط یکبار، ظاهر می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم، حکم، برای همه زوج‌های (a, b) که برای آن‌ها داشته باشیم: $\max[a, b] < n$ ، برقرار باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای زوج‌های (a, b) هم که $\max[a, b] = n$ ، برقرار است. فرض می‌کنیم $\max[a, b] = b = n$. روشن است که، اگر بخواهیم زوج (a, b) در I_n ظاهر شود، باید زوج $(a, b - a)$ در I_{n-1} وجود داشته

باشد. از آن جا که

$$\max[a, b-a] < \max[a, b] = b = n$$

از فرض استقرا نتیجه می‌شود که زوج $(a, b-a)$ درست یکبار در عددهای $I_1, I_2, \dots, I_{k-1}$ ظاهر شده است (به شرطی که a و $b-a$ نسبت به هم اول باشند)؛ و اگر a و $b-a$ مقسوم علیه مشترکی داشته باشند، زوج $(a, b-a)$ هرگز ظاهر نشده است. از این جا، بلافاصله نتیجه می‌شود که زوج (a, b) هم، در عددهای دنباله ما، به شرط اول بودن a و b نسبت به هم، تنها یکبار ظاهر می‌شود و، درحالتی که a و b نسبت به هم اول نیستند، در جایی ظاهر نمی‌شود. (در واقع، عددهای a و b ، تنها وقتی نسبت به هم اول اند که عددهای a و $b-a$ نسبت به هم اول باشند و برعکس).

عدد ۱۹۷۳، عددی اول است (آزمایش کنید)، بنابراین، هریک از زوج‌های

$$(1, 1972), (2, 1971), (3, 1970), \dots, (1971, 2), (1972, 1)$$

درست یکبار در دنباله ما ظاهر می‌شود (زیرا در هر زوج، دو عدد نسبت به هم اول اند). تعداد این زوج‌ها، برابر است با ۱۹۷۲ و، بنابراین، عدد ۱۹۷۳ در هر I_n ، به شرط $n > 1973$ (و در حالت خاص در $I_{1000000}$ درست ۱۹۷۲ بار آمده است.

یادداشت. از حل این مساله نتیجه می‌شود که، عدد طبیعی دلخواه N ، در I_n (با شرط $n > N$) درست به تعداد $\varphi(N)$ بار ظاهر می‌شود که، در آن، $\varphi(N)$ برابر است با تعداد عددهای درست کوچکتر از N ، که نسبت به N اول باشند. برای محاسبه $\varphi(N)$ (به ازای هر مقدار مفروض N)، یادداشت زیر صورت مساله ۳۴۱ را ببینید.

۱۹۶. چهار رقم آخر دنباله می‌گیریم؛ هر α_i یا برابر ۰ است و یا برابر ۱ ($i = 1, 2, 3, 4$). اگر دنباله مفروض شامل یک زیر دنباله با رقم‌های متوالی $0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ نباشد، می‌توان دنباله را با اضافه کردن یک صفر در انتهای آن ادامه داد.

همچنین، اگر دنباله شامل زیردنباله $\overline{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ نباشد، می‌توان دنباله را با اضافه کردن عدد ۱ به انتهای آن ادامه داد. چون بنابه فرض نمی‌توانیم دنباله را ادامه دهیم، بنابراین، باید چهار رقم $\overline{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ ، علاوه بر انتهای آن، در دو جای دیگر دنباله آمده باشد (که بعد از یکی از آن‌ها صفر و بعد از دومی عدد واحد قرار دارد). قبل از چهارتایی $\overline{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ یکی از دو رقم ۰ (یا ۱) قرار دارد، بنابراین قبل از چهارتایی دوم باید ۱ (یا ۰) واقع شود، ولی قبل از چهارتایی سوم نمی‌تواند نه صفر و نه واحد باشد، زیرا آن وقت پنج‌تایی $\overline{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ (یا $\alpha_0 = 0$) بر یکی از پنج‌تایی‌های دیگر منطبق می‌شود؛ یعنی چهارتایی سوم باید در ابتدای دنباله باشد و، به این ترتیب چهارتایی‌های ابتدا و انتهای دنباله برهم منطبق‌اند.

۱۹۷. عدد N برابر حاصل ضرب همه عددهای اول از ۲ تا ۳۷ و هر مقسوم علیه عدد N ، حاصل ضرب چندتا از این عددها، و یا یکی از آن‌هاست. ثابت می‌کنیم، حکم مساله، برای هر عدد

$$N_k = 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p_k$$

که برابر با حاصل ضرب k عدد اول متوالی از ۲ تا p_k است، درست است.*
اثبات را با استقرای روی k می‌دهیم. روشن است که، به ازای $k=1$ داریم:
 $N_1 = 2$ ، که تنها دو مقسوم علیه دارد: ۱ و ۲. زیرا عدد ۱، عدد ۱+ و زیر عدد ۲، عدد ۱- نوشته شده است و در نتیجه مجموع آن‌ها برابر صفر می‌شود.
اکنون فرض می‌کنیم، حکم مساله، برای N_k که برابر با حاصل ضرب k عدد متوالی اول است، برقرار باشد؛ یعنی N_k دارای $2n$ مقسوم علیه مختلف باشد (منجمله عددهای ۱ و N_k) که، از بین آن‌ها، n مقسوم علیه متناظر با عدد ۱+ (ما آن‌ها را مقسوم علیه‌های «زوج» می‌نامیم) و n مقسوم علیه متناظر با عدد ۱- (که آن‌ها را، مقسوم علیه‌های «فرد» می‌نامیم) باشد. در واقع عدد ۱ را هم می‌توان مقسوم علیه‌ی «زوج» به حساب آورد، چرا که

(*) این حکم، حتی برای هر عدد طبیعی قابل تجزیه به ضرب عامل‌های اول، به شرطی که این عامل‌ها دو به دو متفاوت باشند، درست است.

هیچ عدد اولی در تشکیل آن دخالت ندارد (عدد ۱ نه اول است و نه مرکب) و، در ضمن، ۰ هم عددی است زوج. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، حکم مسأله، برای عدد $N_{k+1} = N_k \cdot p_{k+1}$ هم درست است (در این جا، p_{k+1} ، یعنی $(k+1)$ امین عدد اول). روشن است که هریک از مقسوم‌علیه‌های عدد N_k ، در ضمن مقسوم‌علیهی از عدد N_{k+1} است، یعنی برای N_{k+1} ، به تعداد $2n$ مقسوم‌علیه وجود دارد (که البته، مجموعه همه مقسوم‌علیه‌های عدد N_{k+1} را تشکیل نمی‌دهند) که، از بین آن‌ها، n مقسوم‌علیه «زوج» و n مقسوم‌علیه دیگر «فرد» است، عدد N_{k+1} ، به جز این $2n$ مقسوم‌علیه، مقسوم‌علیه‌های دیگری هم دارد که، بین مقسوم‌علیه‌های N_k ، پیدا نمی‌شوند. این‌ها همان مقسوم‌علیه‌هایی هستند که بر p_{k+1} بخش پذیرند. این مقسوم‌علیه‌های جدید را، می‌توان با ضرب هریک از مقسوم‌علیه‌های N_k در عدد p_{k+1} به دست آورد. به این ترتیب، از n مقسوم‌علیه «زوج» N_k ، n مقسوم‌علیه «فرد» N_{k+1} به دست می‌آید و از n مقسوم‌علیه «فرد» N_k ، n مقسوم‌علیه «زوج» N_{k+1} (چرا که اگر تعداد عامل‌های ضرب در مقسوم‌علیه N_k زوج باشد، ضمن اضافه کردن عامل p_{k+1} ، تعداد عامل‌های ضرب، فرد می‌شود و برعکس). بنابراین، تعداد کل مقسوم‌علیه‌های N_{k+1} برابر با $4n$ می‌شود که، از بین آن‌ها، $2n$ مقسوم‌علیه «زوج» و $2n$ مقسوم‌علیه «فرد» است؛ یعنی در سطر دوم، $2n$ عدد برابر $1 + 2n$ عدد برابر $1 -$ به دست می‌آید که مجموعی برابر صفر دارند.

یادداشت. با استدلالی که در مسأله آوردیم، می‌توانیم حکم مسأله را، به صورتی روشن‌تر و جامع‌تر بیان کنیم: عدد N_k دارای 2^{k-1} مقسوم‌علیه «زوج» و 2^{k-1} مقسوم‌علیه «فرد» است (در حالت خاص مسأله ما، $N = N_1$ ، $2^1 = 2$ مقسوم‌علیه «زوج» و $2^1 = 2$ مقسوم‌علیه «فرد» دارد) و، در نتیجه، برای N_k ، در سطر پایین، به تعداد 2^{k-1} عدد $1 +$ و به تعداد 2^{k-1} عدد $1 -$ وجود دارد که، مجموع آن‌ها، برابر صفر است.

۱۹۸۰. این حقیقت که p و q نسبت به هم اول‌اند، به ما امکان می‌دهد تا، با استفاده از الگوریتم اقلیدس، ثابت کنیم که هر عدد درست n را می‌توان

به صورت

$$n = px + qy \quad (*)$$

نوشت که، در آن، x و y عددهایی درست‌اند.

$p > q$ می‌گیریم، در این صورت $p = qd + r$ ($0 < r < q$)، یعنی

$$r = p \cdot 1 + q(-d) = px_1 + qy_1$$

که در آن d خارج قسمت r و باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد p بر عدد q است و $x_1 = 1$ و $y_1 = -d$. علاوه بر این $q = rd_1 + r_1$ ($0 < r_1 < q$). از ترکیب این دو برابری، می‌توان r_1 را به صورت $(*)$ نشان داد:

$$\begin{aligned} r_1 &= q - rd_1 = q - (px_1 + qy_1)d_1 = \\ &= p(-x_1d_1) + q(1 - y_1d_1) = px_2 + qy_2 \end{aligned}$$

که در آن $x_2 = -x_1d_1 = -d_1$ و $y_2 = 1 - y_1d_1 = 1 + dd_1$. در مرحله بعد، قرار می‌دهیم $r = r_1d_2 + r_2$ ($0 < r_2 < r_1$). از برابری قبل استفاده و دوباره سعی می‌کنیم، عدد r_2 را، به صورت ترکیبی خطی از نوع $px_3 + qy_3$ بنویسیم؛ و به همین ترتیب تا آخر کار را تا جایی ادامه دهیم که به عدد ۱، مقسوم علیه مشترک p و q برسیم (p و q نسبت به هم اول بودند و تنها مقسوم علیه مشترک آن‌ها، عدد ۱ است). چون عدد ۱ را می‌توان به صورت $1 = px_k + qy_k$ نوشت (که در آن، x_k و y_k عددهایی درست‌اند)، بنابراین، هر عدد

$$n = n \times 1 = n(px_k + qy_k) = p(nx_k) + q(ny_k)$$

را هم می‌توان به صورت $(*)$ درآورد.

درضمن، با توجه به این که p و q نسبت به هم اول‌اند، نتیجه می‌شود که، اگر بتوان n را به دو صورت مختلف $(*)$ نوشت:

$$n = px + qy = px' + qy' \quad (**)$$

(x, y و x', y' ، عددهای درست‌اند)، آن‌گاه تفاضل $x - x'$ مضربی از q

و تفاضل $y - y'$ مضربی از p است. در واقع، از $(**)$ به دست می‌آید:

$$p(x - x') = -q(y - y') \Rightarrow x - x' = -\frac{q(y - y')}{p}$$

چون p و q نسبت به هم اول اند، پس $y - y'$ بر p و $x - x'$ بر q بخش پذیرند. با توجه به نکتهٔ اخیر، می‌توان گفت که، به مفهومی، عدد n را به صورتی منحصر به فرد می‌توان به شکل $(*)$ نوشت؛ یعنی اگر $0 \leq x < q$ ، آن وقت نمایش عدد n به صورت $(*)$ منحصر به فرد است. در واقع، عدد x را در دستور $(*)$ ، همیشه می‌توان به صورت $x = kq + x_0$ نوشت که، در آن، $0 \leq x_0 < q$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n &= px + qy = p(kq + x_0) + qy = px_0 + q(pk + y) = \\ &= px_0 + qy. \end{aligned} \quad (***)$$

که در آن $0 \leq x_0 < q$ و x_0 و y_0 عددهایی درست اند. از طرف دیگر، دو نمایش متفاوت $(***)$ یعنی دوبرابری به صورت $(**)$ ، با شرط $0 \leq x < q$ و $0 \leq x' < q$ و $x \neq x'$ ، نمی‌تواند با هم وجود داشته باشد. زیرا اگر چنین باشد، داریم $|x - x'| < q$ و، آن وقت، $|x - x'|$ مضربی از q نیست. روشن است که، عدد n ، وقتی «خوب» است که y_0 ، در دستور $(***)$ غیرمنفی باشد و وقتی عدد «بد» است که y_0 عدد منفی شود، زیرا اگر در $n = px_0 + qy_0$ داشته باشیم: $0 \leq x_0 < q$ و $y_0 < 0$ ، آن وقت اگر به جای x_0 و y_0 قرار دهیم:

$$x = x_0 - \lambda q \text{ و } y = x_0 + \lambda p$$

(λ عددی است درست)، هرگز به نمایش $(*)$ برای عدد n ، که x و y ، دو عدد درست و غیرمنفی باشند، نمی‌رسیم. با توجه به آنچه تاکنون گفته‌ایم، حل مسأله ساده‌تر می‌شود.

الف) روشن است که، کوچکترین عدد «خوب»، عدد $0 = 0.p + 0.q$ است؛ بزرگترین عدد «بد»، عددی است به صورت $(***)$ که، در آن، x_0

بزرگترین مقدار «قابل قبول» از عددهای مثبت، یعنی $x_0 = q - 1$ و y_0 کوچکترین عدد با علامت منفی است، یعنی $y_0 = -1$. بنابراین، بزرگترین عدد «بد» برابر است با

$$P = p(q - 1) + q(-1) = pq - p - q$$

طبیعی است که عدد A را، مجموع همین دو عدد P بگیریم، به نحوی که مجموعی برابر A داشته باشند، یعنی عدد A برابر است با $P = pq - p - q$. در واقع، اگر عدد n به صورت $(***)$ باشد، آن وقت عدد

$$\begin{aligned} n' &= A - n = (pq - p - q) - (px_0 + qy_0) = \\ &= p(q - 1 - x_0) + q(-1 - y_0) \end{aligned}$$

هم به صورت $(***)$ است. در این جا، نقش x_0 به عهده $x_0 = q - 1 - x_0$ و نقش y_0 به عهده $y_0 = -1 - y_0$ است. از شرط $0 \leq x_0 < q - 1$ نتیجه می شود $0 \leq x_0 < q - 1$ و یکی از عددهای y_0 یا y'_0 مثبت و دیگری منفی است. حکم مسأله ثابت شد.

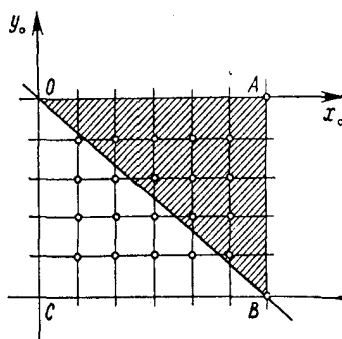
(ب) راه حل اول. از نتیجه ای که از حل بخش الف) به دست آمد، نتیجه می شود که، درست نصف عددهای n ، در نابرابری های $0 \leq n \leq p = pq - p - q$ صدق می کنند (که در آن، P بزرگترین عدد «بد» است)؛ همه این عددها، عددهای «بد» هستند؛ در حالی که بقیه عددها، «خوب» اند. به این ترتیب، اگر تعداد همه عددهای «بد» را t بنامیم، داریم:

$$t = \frac{P+1}{2} = \frac{pq-p-q+1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

(راه حل دوم. عددهای «بد»، به آن عددهای طبیعی n می گوئیم که بتوان آن‌ها را به صورت $(***)$ نوشت که در آن

$$0 \leq x_0 < q, y_0 < 0, px_0 + qy_0 > 0$$

(زیرا n ، عددی است درست و مثبت). صفحه محوره های مختصات قائم را با مختصات x_0 و y_0 در نظر می گیریم (شکل ۲۲). خط های راست $x_0 = 0$



شکل ۲۲

در $y_0 = 0$ و $px_0 + qy_0 = 0$ ، مثلث OAB را به وجود می‌آورند (که در شکل هاشور خورده است). مسأله به اینجا منجر می‌شود که تعداد نقطه‌های با مختصات درست را، در صفحه پیدا کنیم، به نحوی که در درون مثلث OAB واقع باشند. این تعداد برابر است با نصف تعداد نقطه‌های با مختصات درست که در درون مستطیل $OABC$ قرار دارند (چون p و q نسبت به هم اول‌اند، نقطه‌های با مختصات درست، روی قطر مستطیل نیستند). چون تعداد نقطه‌های با مختصات درست، در درون مستطیل $OABC$ برابر است با $(p-1)(q-1)$ ، بنابراین، برای تعداد مورد نظر ما، به دست می‌آید:

$$t = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

۱۹۹۰. (۱) حل اول. ثابت می‌کنیم که، هر عدد درست و غیر منفی n را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} n &= \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = \frac{(x+y)^2 + (x+y) + 2x}{2} = \\ &= \frac{(x+y)^2 + (x+y)}{2} + x = \frac{X(X+1)}{2} + x \end{aligned}$$

که در آن $X = x + y$. از آنجا که x و y عددهایی غیر منفی‌اند، بنابراین $0 \leq x < X$ و $X \geq 0$.

روشن است که، اگر $X \geq 0$ را ثابت و x را در محدوده‌ی از ۰ تا X متغیر

بگیریم، آن وقت عدد $x + \frac{X(X+1)}{2}$ می‌تواند همه‌ی مقدارهای از

$$N_x = \frac{X(X+1)}{2} \text{ تا } N_x = \frac{X(X+1)}{2} + X \text{ (به ازای } x=0 \text{)}$$

(به ازای $x=X$) را قبول کند. در ضمن هر یک از این مقدارهای قابل قبول برای n ، درست یکبار به دست می‌آید. عدد بعدی، یعنی

$$N_{x+1} = \frac{X(X+1)}{2} + X + 1 = \frac{(X+1)(X+2)}{2}$$

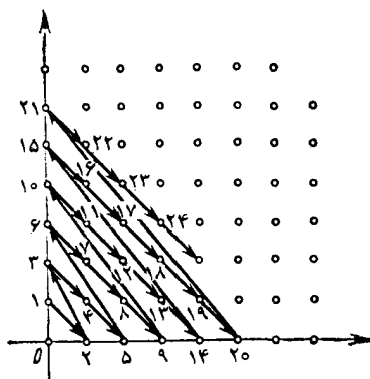
متناظر با مقداری از X که از مقدار قبلی آن یک واحد بزرگتر است (یعنی برابر $X+1$ شده است) و مقدار $x=0$ در این حالت، وقتی x از ۰ تا $X+1$ تغییر می‌کند، دوباره همه‌ی مقدارهای درست از

$$N_{x+1} = \frac{(X+1)(X+2)}{2} \text{ تا } N_{x+1} = N_{x+2} - 1 = N'_{x+1}$$

و غیره. ادامه‌ی این استدلال، حکم مساله را ثابت می‌کند.

داده حل دوم. همه‌ی نقطه‌های صفحه را، که مختصات درست و غیرمنفی

(x, y) دارند اندیس گذاری می‌کنیم (شکل ۲۳)؛ یعنی نقطه‌ی (x, y) را با



اندیس $n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$ مشخص می‌کنیم. هر نقطه (x, y) با مختصات درست و غیرمنفی، متناظر با يك اندیس منحصر به فرد n است و برعکس.

واضح است که اندیس $n = 0$ ، متناظر است با نقطه $(0, 0)$ و اندیس $n = 1$ متناظر با نقطه $(0, 1)$ است؛ زیرا برای این دو نقطه داریم:

$$0 = \frac{(0+0)^2 + 3 \times 0 + 0}{2}$$

$$1 = \frac{(0+1)^2 + 3 \times 0 + 1}{2}$$

اکنون فرض می‌کنیم، حکم برای همه اندیس‌های از ۱ تا n درست باشد و اندیس n را متعلق به نقطه (x, y) می‌گیریم. اگر عرض y این نقطه مخالف صفر باشد، آن وقت مختصات $(n+1)$ امین نقطه $(x-1, y+1)$ خواهد بود و برای آن داریم:

$$\frac{[(x+1)+(y-1)]^2 + 3(x+1) + (y-1)}{2} =$$

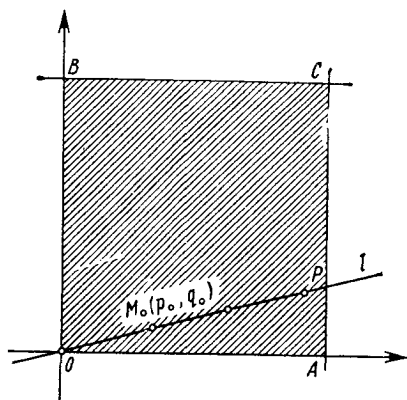
$$= \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} + 1 = n + 1$$

در حالت $y = 0$ ، مختصات نقطه $(n+1)$ ام به صورت $(0, x+1)$ درمی‌آید و باز هم خواهیم داشت:

$$\frac{(0+x+1)^2 + 3 \times 0 + (x+1)}{2} =$$

$$= \frac{(x+0)^2 + 3x + 0}{2} + 1 = n + 1$$

۰۴۰۰. برای هر کسر ساده نشدنی $\frac{p}{q}$ با شرط



شکل ۲۴

$$0 < p \leq 100 \text{ و } 0 < q \leq 100 \quad (*)$$

می‌توان نقطه M به مختصات (p, q) را نسبت داد. از نابرابری‌های $(*)$ نتیجه می‌شود که، نقطه M ، متعلق به مربع $K = OACB$ است که آن را در شکل ۲۴ سایه زده‌ایم. این مربع محدود است به محورهای مختصات و خط‌های راست $x = 100$ و $y = 100$ در درون مربع K یا روی

یکی از ضلع‌های AC و BC قرار دارد). از تحویل ناپذیری کسر $\frac{p}{q}$ نتیجه

می‌شود که پاره‌خط راست OM شامل نقطه‌ای با مختصات درست، به جز هر نقطه M است (در واقع، برابری‌های $p = kp_1$ و $q = kq_1$ نشان می‌دهند

که کسر $\frac{p}{q}$ را می‌توان با حذف عامل k از صورت و مخرج به شکل $\frac{p_1}{q_1}$ درآورد

و این، به معنای آن است که نقطه $M_1(p_1, q_1)$ متعلق به پاره‌خط راست OM است). علاوه بر این، اگر پاره‌خط راست OP بر خط راست l که از مبدا

O می‌گذرد، واقع باشد (P نقطه برخورد خط راست l با ضلع AC یا ضلع BC از مربع K است)، آن وقت شامل n نقطه $(p_0, q_0), (2p_0, 2q_0), \dots$

(np_0, nq_0) با مختصات درست است (از بین این نقطه‌ها، نقطه $M_0(p_0, q_0)$ کوتاه‌ترین فاصله را تا مبدا مختصات دارد). بنابراین، چون

$np_0 \leq 100$ و $nq_0 \leq 100$ خواهیم داشت:

$$p_0 \leq \frac{100}{n} < \frac{100}{n-1} < \frac{100}{n-2} < \dots < \frac{100}{1},$$

$$q_0 \leq \frac{100}{n} < \frac{100}{n-1} < \frac{100}{n-2} < \dots < \frac{100}{1}$$

بنابراین، وقتی جمله‌های $d\left(\frac{100}{1}\right), d\left(\frac{100}{2}\right), \dots, d\left(\frac{100}{n}\right)$ از مجموع

S را محاسبه می‌کنیم، کسر تحویل‌ناپذیر $\frac{p_0}{q_0}$ هم به حساب می‌آید، یعنی تعداد

کل دفعه‌هایی که کسر $\frac{p_0}{q_0}$ ، ضمن محاسبه S به دست می‌آید، برابر است با n

(البته، کسرهای تحویل‌پذیر $\frac{2p_0}{2q_0}, \frac{3p_0}{3q_0}, \dots, \frac{np_0}{nq_0}$ در محاسبه S منظور

نشده‌اند). بنابراین، تعداد کسرهای $\frac{p_0}{q_0}$ در مجموع S ، برابر است با n ، یعنی

برابر با تعداد نقطه‌های با مختصات درست متعلق به پاره‌خط راست OP .

از آنچه گفتیم نتیجه می‌شود که، تعداد کسرهایی که در S منظور شده‌اند، برابر است با تعداد نقطه‌های با مختصات درست که در درون مربع

K قرار دارند یعنی

$$S = 100 \times 100 = 10000$$

(۱.۲۰۱) x و y را عددهایی حقیقی و دلخواه می‌گیریم. در این صورت

داریم:

$$x = [x] + \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

$$y = [y] + \beta, \quad (0 \leq \beta < 1)$$

بنابراین $x + y = [x] + [y] + \alpha + \beta$

از نابرابری‌های $0 \leq \alpha < 1$ و $0 \leq \beta < 1$ به دست می‌آید:

$0 \leq \alpha + \beta < 2$. بنابراین، در حالت $0 \leq \alpha + \beta < 1$ داریم:
 $[x+y] = [x] + [y]$ و در حالت $1 \leq \alpha + \beta < 2$:

$$[x+y] = [x] + [y] + 1 > [x] + [y]$$

به این ترتیب

$$[x+y] \geq [x] + [y]$$

(۲) داحل اول. فرض می‌کنیم $x = [x] + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$). از تقسیم $[x]$ بر n ، خارج قسمتی برابر q و باقی‌مانده‌ای برابر r به دست می‌آید
 ($0 \leq r < n-1$) یعنی

$$\frac{[x]}{n} = q + \frac{r}{n}, \quad (0 \leq \frac{r}{n} < 1) \quad \text{و} \quad \left[\frac{[x]}{n} \right] = q$$

از طرف دیگر داریم:

$$x = [x] + \alpha = nq + r + \alpha = nq + r_1, \quad (r_1 = r + \alpha < n)$$

بنابراین $\left(0 \leq \frac{r_1}{n} < 1 \right) \frac{x}{n} = q + \frac{r_1}{n}$ ، یعنی

$$\left[\frac{x}{n} \right] = q = \frac{n}{x} \left[\frac{[x]}{n} \right]$$

داحل دوم. همهٔ عددهای درستی را در نظر می‌گیریم که بر n بخش پذیر باشند و از x تجاوز نکنند. روشن است که، تعداد این عددها، برابر است با $\left[\frac{x}{n} \right]$. اکنون، تعداد عددهای درستی را در نظر می‌گیریم که بر n بخش پذیر

باشند و از $[x]$ تجاوز نکنند. تعداد این گونه عددها برابر است با $\left[\frac{[x]}{n} \right]$.

این تعداد در هر دو حالت یکی است، یعنی $\left[\frac{[x]}{n} \right] = \left[\frac{x}{n} \right]$.

(۳) فرض می‌کنیم و دو حالت در نظر می‌گیریم.

(الف) $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. در این حالت داریم: $[x + \frac{1}{2}] = [x]$. از طرف

دیگر، چون $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ، بنابراین $0 \leq 2\alpha < 1$ و $[2x] = 2[x]$ ، یعنی

$$[2x] - [x] = 2[x] - [x] = [x]$$

$$[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$$

و از آنجا

(ب) $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$. در این حالت $[x + \frac{1}{2}] = [x] + 1$ و چون

$$1 \leq 2\alpha < 2$$

پس $[2x] = 2[x] + 1$ و دوباره

$$[2x] - [x] = 2[x] + 1 - [x] = [x] + 1 = [x + \frac{1}{2}]$$

(۴) راه حل اول. $x = [x] + \alpha$. چون $0 \leq \alpha < 1$.

بنابراین عدد α ، بین دو عدد مجاور از کسرهای $\frac{0}{n}$ ، $\frac{1}{n}$ ، $\frac{2}{n}$ ، ...، $\frac{n-1}{n}$ و

$$\frac{n}{n}$$

قرار دارد. فرض می‌کنیم: $\frac{k}{n} \leq \alpha < \frac{k+1}{n}$. داریم:

$$x + \frac{n-k-1}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-k-1}{n} <$$

$$< [x] + \frac{k+1}{n} + \frac{n-k-1}{n} = [x] + 1$$

و به همین ترتیب

$$x + \frac{n-k}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-k}{n} \geq [x] + \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} = [x] + 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned}x + \frac{n-1}{n} &= [x] + \alpha + \frac{n-1}{n} < [x] + \frac{k+1}{n} + \frac{n-1}{n} = \\&= [x] + \frac{n+k}{n} < [x] + 2\end{aligned}$$

در نتیجه

$$[x] \leq \left[x + \frac{1}{n} \right] \leq \left[x + \frac{2}{n} \right] \leq \dots \leq \left[x + \frac{n-k+1}{n} \right] < [x] + 1$$

و

$$\begin{aligned}[x] + 1 &\leq \left[x + \frac{n-k}{n} \right] \leq \left[x + \frac{n-k+1}{n} \right] \leq \dots \\&\dots \leq \left[x + \frac{n-1}{n} \right] < [x] + 2\end{aligned}$$

به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}[x] &= \left[x + \frac{1}{n} \right] = \left[x + \frac{2}{n} \right] = \dots = \left[x + \frac{n-k-1}{n} \right], \\&\left[x + \frac{n-k}{n} \right] = \left[x + \frac{n-k+1}{n} \right] = \dots \\&\dots = \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [x] + 1\end{aligned}$$

در این جا، گروه اول شامل $(n-k)$ عدد و گروه دوم شامل k عدداست، بنابراین

$$\begin{aligned}[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] &= \\&= (n-k)[x] + k([x] + 1) = n[x] + k\end{aligned}$$

بخش درست عدد nx برابر است با $n[x] + k$. در واقع، از آن جا که

داریم: $k \leq n\alpha < k+1$ ، بنابراین $n\alpha = k + \beta$ ($0 \leq \beta < 1$). در نتیجه

$$[nx] = [n[x] + n\alpha] = [n[x] + k + \beta] = n[x] + k$$

به این ترتیب ثابت شد که

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx]$$

(۱۰ حل دوم). به عبارت سمت چپ برابری توجه می‌کنیم. اگر $0 \leq x < \frac{1}{n}$ ،

آن وقت همهٔ عددهای $x, x + \frac{1}{n}, \dots, x + \frac{n-1}{n}$ از واحد کوچکترند و،

بنابراین، بخش درست هر یک از آن‌ها برابر صفر می‌شود. در این حالت $[nx]$ هم

برابر صفر است؛ به این ترتیب، در حالت $0 \leq x < \frac{1}{n}$ ، برابری مفروض درست

است.

اکنون x را عددی دلخواه می‌گیریم. اگر به x به اندازهٔ $\frac{1}{n}$ اضافه

کنیم، هر یک از جمله‌های سمت چپ برابری، به جملهٔ سمت راست خود تبدیل

می‌شود و جملهٔ آخر به صورت $[x+1]$ درمی‌آید که یک واحد از $[x]$

بزرگتر است. به این ترتیب، اگر x را به اندازهٔ $\frac{1}{n}$ بزرگ کنیم، سمت چپ

برابری به اندازهٔ یک واحد بزرگتر می‌شود. روشن است که با اضافه کردن $\frac{1}{n}$

به x ، مقدار سمت راست برابری هم به اندازهٔ یک واحد بزرگتر می‌شود.

به جز این، برای هر مقدار x ، عدد α ($0 \leq \alpha < \frac{1}{n}$) وجود دارد، به نحوی

که، اختلاف x با α ، برابر با $\frac{m}{n}$ باشد (m ، عددی است درست). از این جا،

درستی برابری مفروض روشن می‌شود.

۲۰۲. (۱۴ حل اول. با توجه به حل مسئله ۲۰۱، ۳)، عبارت مفروض را (که البته، تعداد جمله‌های غیر صفر آن، محدود است)، می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{n}{8} + \frac{1}{2} \right] + \dots = \\ & = \left([n] - \left[\frac{n}{2} \right] \right) + \left(\left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{4} \right] \right) + \left(\left[\frac{n}{4} \right] - \left[\frac{n}{8} \right] \right) + \dots = \\ & = [n] = n \end{aligned}$$

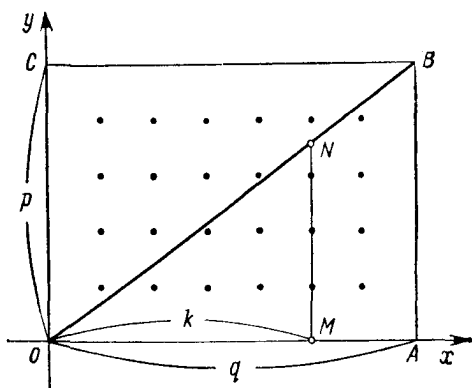
(۱۴ حل دوم). این مجموع به ازای $n = 1$ برابر است با واحد. اگر در این مجموع، n را به $n+1$ تبدیل کنیم، هر جمله آن یا تغییر نمی‌کند و یا به اندازه یک واحد اضافه می‌شود. اگر دقیق‌تر بگوییم، با تبدیل n به $n+1$ ، درست یک جمله وجود دارد که به اندازه یک واحد بزرگ می‌شود. این جمله متناظر است با مقداری از k که، به ازای آن، 2^k بزرگ‌ترین توانی از ۲ باشد که $n+1$ بر آن بخش‌پذیر است. در واقع، اگر $n+1 = 2^k(2m+1)$ ، آن وقت

$$\left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{2^k(2m+2)}{2^{k+1}} \right] = m+1,$$

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[m+1 - \frac{1}{2^{k+1}} \right] = m$$

و چون برای $i \neq k$ داریم: $\left[\frac{n+1+2^i}{2^{i+1}} \right] = \left[\frac{n+2^i}{2^{i+1}} \right]$ (چرا؟)، بنابراین با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شود که، مجموع مفروض برابر است با n .

۲۰۳. همه نقطه‌های صفحه مختصات xOy را در نظر می‌گیریم که برای مختصات (x, y) هر یک داشته باشیم: $1 \leq x \leq q-1$ و $1 \leq y \leq p-1$. این نقطه‌ها در درون مستطیل $OABC$ قرار دارند (شکل ۲۵) که ضلع‌های آن $OA = q$ و $OC = p$ ، و تعداد همه نقطه‌های



شکل ۲۵

واقع در درون آن، برابر $(p-1)(q-1)$ است.

قطر OB از مستطیل را رسم می‌کنیم. روشن است که هیچ کدام از این

نقطه‌های بامختصات درست، روی این قطر نیستند (زیرا x و y هر نقطه

متعلق به قطر OB با رابطه $\frac{x}{y} = \frac{OA}{OB} = \frac{q}{p}$ به هم بستگی دارند و، چون p و

q نسبت به هم اول‌اند، نمی‌توان عددهای درست و مثبت $x < p$ و $y < q$ را

پیدا کرد، به نحوی که $\frac{x}{y} = \frac{q}{p}$.

اکنون توجه می‌کنیم که، تعداد نقطه‌های بامختصات درست که طولی

برابر k دارند $(k, \text{ عددی درست و مثبت و کوچکتر از } q \text{ است})$ و، درضمن،

زیر قطر OB واقع‌اند، برابر است با بخش درست عددی که طول پاره‌خط راست

MN را بیان می‌کند (شکل ۲۵ را ببینید). چون $MN = \frac{OM}{OA} \cdot AB = \frac{kp}{q}$

این عدد برابر است با $\left[\frac{kp}{q} \right]$ ، یعنی مجموع

$$\left[\frac{p}{q} \right] + \left[\frac{2p}{q} \right] + \left[\frac{3p}{q} \right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q} \right]$$

برابر است با تعداد کل همه نقطه‌های بامختصات درست که در زیر قطر OB واقع‌اند. تعداد همه نقطه‌های بامختصات درست واقع در درون مستطیل $OABC$ ، برابر است با $(p-1)(q-1)$ ، درست نصف این نقطه‌ها (باتوجه به تقارن) در زیر قطر OB قرار دارند (تاکید می‌کنیم که، خود قطر OB ، شامل چنین نقطه‌هایی نیست)، یعنی

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{1}{2}(q-1)(p-1)$$

و به همین روش ثابت می‌شود:

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \left[\frac{3q}{p}\right] + \dots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$$

۲۰۴. داحل اول. برای $n=1$ ، در سمت چپ هریک از دو برابری، تنها یک جمله می‌ماند و، بنابراین، به ازای $n=1$ ، برابری‌ها برقرارند. اکنون فرض می‌کنیم، این برابری‌ها، برای عدد مفروض n برقرار باشند و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای عدد $n+1$ هم برقرار می‌شوند. اگر $n+1$ بر k بخش پذیر نباشد، یعنی اگر

$$n+1 = qk + r, \quad (1 \leq r \leq k-1)$$

آن وقت $n = qk + r'$ که در آن $r' = r-1$ یعنی $0 \leq r' \leq k-2$. در این حالت، دو عدد $\left[\frac{n+1}{k}\right]$ و $\left[\frac{n}{k}\right]$ برابرند (هر کدام برابر است با q). در حالتی که $n+1$ مضربی از k باشد (یعنی $n+1 = qk$)، روشن است که

$$\left[\frac{n+1}{k}\right] = q, \quad \left[\frac{n}{k}\right] + q = 1 \quad \text{و} \quad \left[\frac{n+1}{k}\right] = \left[\frac{n}{k}\right] + 1$$

بنابراین

$$\left[\frac{n+1}{k}\right] = \left[\frac{n}{k}\right] \quad \text{اگر } k \text{ مقسوم‌علیه‌ی } n+1 \text{ نباشد؛}$$

اگر k مقسوم‌علیهی از $n+1$ باشد: $\left[\frac{n+1}{k} \right] = \left[\frac{n}{k} \right] + 1$

از این جا بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \left[\frac{n+1}{1} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n+1}{n+1} \right] = \\ & = \left[\frac{n}{1} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n+1} \right] + \tau_{n+1} \end{aligned}$$

و چون $\left[\frac{n}{1} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n} \right] = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ بنابراین

$$\left[\frac{n+1}{1} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n+1}{n+1} \right] = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad & \left[\frac{n+1}{1} \right] + 2 \left[\frac{n+1}{2} \right] + 3 \left[\frac{n+1}{3} \right] + \dots + (n+1) \left[\frac{n+1}{n+1} \right] = \\ & = \left[\frac{n}{1} \right] + 2 \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + (n+1) \left[\frac{n}{n+1} \right] + \sigma_{n+1} = \\ & = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{n+1} \end{aligned}$$

د) حل دوم. تعداد عضوهای از دنباله $1, 2, 3, \dots, n$ که بر عدد k

بخش‌پذیرند، برابر است با $\left[\frac{n}{k} \right]$ (این عددهای بخش‌پذیر بر k عبارتند از

$k, 2k, 3k, \dots, \left[\frac{n}{k} \right] k$). همچنین، مجموع مقسوم‌علیه‌های برابر k ،

که برای عددهای این دنباله وجود دارد، برابر است با $k \left[\frac{n}{k} \right]$. اکنون

$$\text{الف) مجموع } \left[\frac{n}{1} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{k} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n} \right]$$

برابر است با تعداد جمله‌هایی از دنباله $1, 2, \dots, n$ که مضرب ۱ هستند،

به اضافه تعدادی از جمله‌های دنباله که مضرب ۲ هستند، ...، به اضافه تعدادی از جمله‌های دنباله که مضرب n اند، یعنی همان مجموع $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$.

$$(ب) \quad \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \dots + n \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

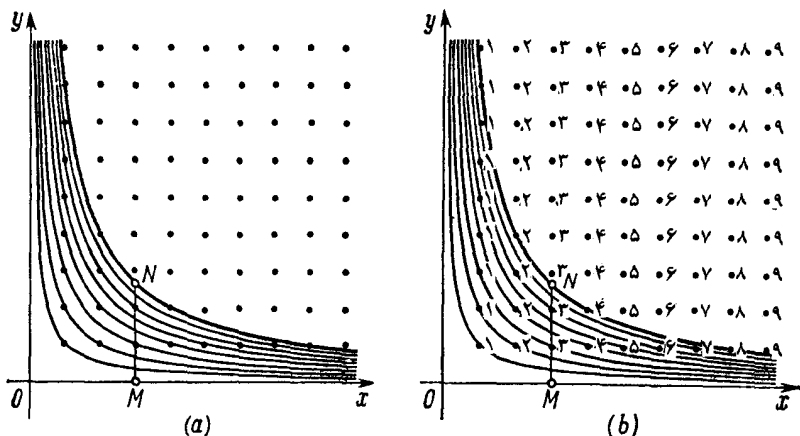
برابر است با مجموع مقسوم‌علیه‌های برابر ۱، به اضافه مجموع مقسوم‌علیه‌های برابر ۲، ...، به اضافه مجموع مقسوم‌علیه‌های برابر n در دنباله ۱، ۲، ...، n ، یعنی همان مجموع $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$.

داحل سوم. می‌توان بر اساس اندیشه راه‌حل دوم، راه‌حلی هندسی برای مساله پیدا کرد.

هذلولی متساوی‌الساقین $y = \frac{k}{x}$ را در نظر می‌گیریم (این هذلولی که

با رابطه $xy = k$ بیان می‌شود، دارای این ویژگی است که، معکوس آن، برخوردش منطبق است). دقیق‌تر، ما تنها به بخشی از هذلولی نیاز داریم که در ربع اول دستگاه مختصات قائم قرار دارد (شکل ۲۶ را ببینید).

نقطه‌هایی از ربع اول دستگاه مختصات را در نظر می‌گیریم که مختصات هریک از آن‌ها، با عددی درستی بیان شده باشند. اگر x مقسوم‌علیه‌ی



از عدد k باشد، آن وقت نقطه‌ای به طول x ، واقع بر هذلولی $xy = k$ ، وجود دارد. برعکس اگر هذلولی $xy = k$ از نقطه‌ای بامختصات درست و به طول x عبور کند، آن وقت، عدد x ، مقسوم‌علیه‌ی از عدد k است. بنابراین، عدد τ_k ، تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد k ، برابر است با تعداد نقطه‌های بامختصات درست که بر نمودار هذلولی $xy = k$ قرار دارند. همچنین، مجموع σ_k ، از مقسوم‌علیه‌های عدد k ، برابر است با مجموع طول‌های نقطه‌های بامختصات درست که بر نمودار هذلولی $xy = k$ واقع‌اند. این واقعیت هم روشن است که نمودار همه هذلولی‌های $xy = 1$ ، $xy = 2$ ، $xy = \dots$ ، $xy = n-1$ ، در زیر نمودار هذلولی $xy = n$ قرار می‌گیرند.

اکنون می‌توانیم، این نتیجه‌ها را به طور جداگانه به دست آوریم.
الف) مجموع $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ برابر است با تعداد همه نقطه‌های بامختصات درست که روی هذلولی $xy = n$ و یا در زیر آن واقع‌اند. از طرف دیگر، هیچ کدام از این نقطه‌ها، طولی بیشتر از n ندارند؛ تعداد نقطه‌های بامختصات درست که طولی برابر k داشته باشند و زیر هذلولی $xy = k$ قرار گیرند، برابر است با بخش درست طول پاره خط راست MN ، که در شکل ۲۶، a) نشان داده شده است؛ یعنی این عدد برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$ ، و چون

$$MN = \frac{n}{k} \quad (\text{حل مسأله } ۲۰۳ \text{ را ببینید})، \text{ بنابراین}$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{n}\right]$$

ب) برای هر نقطه بامختصات درست، اندیسی برابر با طول نقطه را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۶، b). بنابراین، مجموع $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$ برابر است با مجموع اندیس‌های همه نقطه‌های بامختصات درست که در زیر هذلولی $xy = k$ قرار دارند. از طرف دیگر، مجموع اندیس‌های همه این نقطه‌ها، که طولی برابر k دارند، برابر است با $k \left[\frac{n}{k}\right]$ ، یعنی

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = \left[\frac{n}{1} \right] + 2 \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + n \left[\frac{n}{n} \right]$$

۲۰۵. عبارت $(2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n$ عددی است درست، زیرا اگر

فرض کنیم $(2 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$ ، آن وقت $(2 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n \sqrt{2}$ که، در آن‌ها، a_n و b_n عددهایی درست‌اند (این مطلب را می‌توان به کمک دستور بسط دوجمله‌ای و یا با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کرد).

چون $(2 - \sqrt{2})^n < 1$ ، بنابراین

$$[(2 + \sqrt{2})^n] = (2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n - 1$$

و از آن‌جا

$$(2 + \sqrt{2})^n - [(2 + \sqrt{2})^n] = 1 - (2 - \sqrt{2})^n$$

چون $2 - \sqrt{2} < 1$ ، بنابراین اگر n را به اندازه کافی بزرگ بگیریم، آن وقت می‌توانیم عبارت $(2 - \sqrt{2})^n$ را به دلخواه کوچک کنیم. به این ترتیب، اگر n را طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم: $(2 - \sqrt{2})^n < 0.000001$ ، آن وقت

$$\{(2 + \sqrt{2})^n\} = 1 - (2 - \sqrt{2})^n > 0.999999$$

۲۰۶. الف) حل اول. چون $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ عددی

است درست و چون $(2 - \sqrt{3})^n < 1$ ، بنابراین

$$[(2 + \sqrt{3})^n] = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1$$

(حل مسأله ۲۰۵ را ببینید). اگر، با استفاده از دستور بسط دوجمله‌ای، پرانتزها را باز کنیم، داریم:

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2(2^n + C(n, 2)2^{n-2} \times 3 + \dots + C(n, 4)2^{n-4} \times 3^2 + \dots)$$

به این ترتیب $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ عددی است زوج و، بنابراین عدد

$$[(2 + \sqrt{3})^n] = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1$$

عددی فرد می‌شود.

راه حل دوم. عدد $(2 + \sqrt{3})^n$ را می‌توان به صورت $a_n + b_n\sqrt{3}$ نوشت که، در آن، a_n و b_n عددهایی درست‌اند. ثابت می‌کنیم:

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1 \quad (*)$$

و برای این منظور، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

به ازای $n=1$ داریم $a_1 = 2$ و $b_1 = 1$

$$a_1^2 - 3b_1^2 = 2^2 - 3 \times 1 = 4 - 3 = 1$$

اکنون فرض می‌کنیم، برابری $(*)$ ، برای مقداری از n برقرار باشد.

در این صورت، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^{n+1} &= (2 + \sqrt{3})^n \cdot (2 + \sqrt{3}) = (a_n + b_n\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = \\ &= (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3} \end{aligned}$$

که در آن $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ و $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. از آنجا

$$a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = (2a_n + 3b_n)^2 - 3(a_n + 2b_n)^2 = a_n^2 - 3b_n^2 = 1$$

به این ترتیب، برابری $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ ، برای هر مقدار n ، ثابت شد. اکنون داریم:

$$[a_n + b_n\sqrt{3}] = a_n + [b_n\sqrt{3}] = a_n + [\sqrt{3}b_n] =$$

$$= a_n + [\sqrt{a_n^2 - 1}] = a_n + (a_n - 1) = 2a_n - 1$$

و این نتیجه نشان می‌دهد که عدد $[a_n + b_n\sqrt{3}] = [(2 + \sqrt{3})^n]$ ، عددی فرد است.

(ب) داریم:

$$[(1 + \sqrt{3})^n] = \begin{cases} (1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n - 1 & (n = 2k) \\ (1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n & (n = 2k + 1) \end{cases}$$

روشن است که درست‌ترین این برابری‌ها، با عددهای درستی سروکار

داریم و، درضمن، برای عددهای زوج n داریم $0 < (1 - \sqrt{3})^n < 1$ و
برای عددهای فرد n : $-1 < (1 - \sqrt{3})^n < 0$.
برای هر یک از دو حالتی که n زوج باشد یا فرد، به طور جداگانه بحث
می‌کنیم.

(۱) n عددی است زوج: $n = 2k$. داریم:

$$\begin{aligned} [(1 + \sqrt{3})^{2k}] &= (1 + \sqrt{3})^{2k} + (1 - \sqrt{3})^{2k} - 1 = \\ &= \{(1 + \sqrt{3})^2\}^k + \{(1 - \sqrt{3})^2\}^k - 1 = (4 + 2\sqrt{3})^k + \\ &+ (4 - 2\sqrt{3})^k - 1 = 2^k \{(2 + \sqrt{3})^k + (2 - \sqrt{3})^k\} - 1 \end{aligned}$$

عدد داخل آکولاد، عددی درست است و بنابراین عدد

$$[(1 + \sqrt{3})^{2k}] = 2^k N - 1$$

همواره عددی فرد است. به این ترتیب، در حالتی که n زوج باشد، بزرگترین
توان ۲، که عدد $[(1 + \sqrt{3})^n]$ بر آن بخش پذیر باشد، صفر است.

(۲) n عددی است فرد: $n = 2k + 1$. داریم:

$$\begin{aligned} [(1 + \sqrt{3})^{2k+1}] &= (1 + \sqrt{3})^{2k+1} + (1 - \sqrt{3})^{2k+1} = \\ &= (4 + 2\sqrt{3})^k (1 + \sqrt{3}) + (4 - 2\sqrt{3})^k (1 - \sqrt{3}) = \\ &= 2^k \{(2 + \sqrt{3})^k (1 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})^k (1 - \sqrt{3})\} = \\ &= 2^k \{((2 + \sqrt{3})^k + (2 - \sqrt{3})^k) + \sqrt{3}((2 + \sqrt{3})^k - (2 - \sqrt{3})^k)\} \end{aligned}$$

فرض کنید $(2 + \sqrt{3})^k = a_k + b_k \sqrt{3}$ که، در آن، a_k و b_k عددهایی
درست‌اند؛ در این صورت $(2 - \sqrt{3})^k = a_k - b_k \sqrt{3}$. اگر این عبارت‌ها را
در دستور بالا قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} [(1 + \sqrt{3})^{2k+1}] &= 2^k \{a_k + b_k \sqrt{3} + a_k - b_k \sqrt{3} + \\ &+ \sqrt{3}(a_k + b_k \sqrt{3} - a_k + b_k \sqrt{3})\} = \\ &= 2^k (2a_k + 6b_k) = 2^{k+1} (a_k + 3b_k) \end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم، عدد $a_k + 3b_k$ ، عددی فرد است. در واقع داریم:

$$(a_k + 3b_k)(a_k - 3b_k) = a_k^2 - 9b_k^2 = (a_k^2 - 3b_k^2) - 6b_k^2 = 1 - 6b_k^2$$

(راه‌حل دوم مسأله ۲۰۶، الف) را ببینید). چون عدد $1 - 6b_k^2$ فرد است، بنابراین هردو عامل $a_k + 3b_k$ و $a_k - 3b_k$ فردند. به این ترتیب، در حالت $n = 2k + 1$ ، بزرگترین توان ۲ که $[(1 + \sqrt{3})^n]$ بر آن بخش پذیر باشد، برابر است با نمای

$$k + 1 = \frac{n + 1}{2} = \left[\frac{n}{2} \right] + 1$$

۲۰۷. عبارت $(2 + \sqrt{5})^p + (2 - \sqrt{5})^p$ عددی است درست و، در ضمن، چون p عددی است فرد $0 < (2 - \sqrt{5})^p < 1$ ؛ بنابراین

$$(2 + \sqrt{5})^p + (2 - \sqrt{5})^p = [(2 + \sqrt{5})^p]$$

(حل مسأله‌های ۲۰۵ و ۲۰۶ را ببینید). بنابر دستور بسط دو جمله‌ای

$$(2 + \sqrt{5})^p + (2 - \sqrt{5})^p = 2(2^p + C(p, 2)2^{p-2} \cdot 5 + C(p, 4)2^{p-4} \cdot 5^2 + \dots + C(p, p-1)2 \cdot 5^{\frac{p-1}{2}})$$

$$[(2 + \sqrt{5})^p] - 2^{p+1} = \text{و از آن جا}$$

$$= 2(2^p + C(p, 2)2^{p-2} \cdot 5 + C(p, 4)2^{p-4} \cdot 5^2 + \dots + C(p, p-1)2 \cdot 5^{\frac{p-1}{2}})$$

همه ضریب‌های بسط دو جمله‌ای، یعنی

$$C(p, 2) = \frac{p(p-1)}{1 \times 2}, C(p, 4) = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}, \dots$$

$$\dots, C(p, p-1) = p$$

بر عدد اول p بخش پذیرند (همه‌جا، صورت کسر مضربی است از p ، درحالی

که مخرج کسر بر p بخش‌پذیر نیست). به این ترتیب تفاضل $2^{p+1} - [(2 + \sqrt{5})^p]$ بر p بخش‌پذیر است.
۲۰۸ داریم:

$$C(n, p) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$$

در بین p عدد متوالی $n, n-1, n-2, \dots, n-p+1$ تنها یک عدد وجود دارد که بر p بخش‌پذیر است؛ این عدد را با N نشان می‌دهیم. پس می‌توانیم بنویسیم: $\left[\frac{n}{p}\right] = \frac{N}{p}$ و تفاضل مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(N+1)N(N-1)\dots(n-p+1)}{p!} - \frac{N}{p}$$

اکنون یادآوری می‌کنیم که از تقسیم عددهای $n, n-1, n-2, \dots, N+1, N-1, \dots, n-n+1$ بر p ، همه باقی‌مانده‌های ممکن، یعنی $1, 2, 3, \dots, p-1$ به دست می‌آید (وقتی p عدد متوالی از $n-p+1$ تا n را بر p تقسیم کنیم، همه باقی‌مانده‌های $1, 2, 3, \dots, p-1$ و، درضمن، هر کدام یکبار به دست می‌آیند). در نتیجه، تفاضل

$$n(n-1)\dots(N+1)(N-1)\dots(n-p+1) - (p-1)!$$

بر p بخش‌پذیر است (برای اثبات این مطلب کافی است همه برابری‌های

$$n = k_1 p + a_1, n-1 = k_2 p + a_2, \dots, N+1 = k_i p + a_i,$$

$$N-1 = k_{i+1} p + a_{i+1}, \dots, n-p+1 = k_{p-1} p + a_{p-1}$$

را درهم ضرب کنیم؛ $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ عددهایی درست‌اند و $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ از بین عددهای $1, 2, \dots, p-1$ ، به ترتیبی، در نظر گرفته

شده‌اند). از ضرب این تفاضل، در عدد درست $\frac{N}{p}$ ، به تفاضل جدیدی می‌رسیم:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p} - \frac{N(p-1)!}{p}$$

که البته بر p بخش پذیر است. سرانجام، اگر هر دو جمله تفاضل را بر $(p-1)!$ تقسیم کنیم، به نتیجه مطلوب می‌رسیم (خارج قسمت حاصل از تقسیم بر $(p-1)!$ داریم، باز هم بر p بخش پذیر است، زیرا p و $(p-1)!$ نسبت به هم اول‌اند).

۲۰۹. α را مثبت می‌گیریم. روشن است که $\alpha = 1$ ، با شرط مسأله سازگار است در حالت $\alpha > 1$ ، عددهای $[\alpha]$ ، $[2\alpha]$ ، $[3\alpha]$ ، ...، $[N\alpha]$ دو به دو متمایزند؛ بنابراین، تنها باید تحقیق کنیم که، با شرط $\frac{1}{\alpha} = \alpha < 1$ ، عددهای $[\beta]$ ، $[2\beta]$ ، $[3\beta]$ ، ...، $[N\beta]$ هم با یکدیگر فرق دارند. چون $N\beta < N$ ، بنابراین $[N\beta] \leq N-1$ ؛ N عدد غیر منفی $[\beta]$ ، $[2\beta]$ ، ...، $[N\beta]$ ، تنها وقتی می‌توانند N مقدار متفاوت را قبول کنند که داشته باشیم:

$$[\beta] = 0, [2\beta] = 1, [3\beta] = 2, \dots, [N\beta] = N-1 \quad (*)$$

برابری $[k\beta] = k-1$ هم‌ارز است با نابرابری‌های

$$k-1 \leq k\beta < k$$

و یا نابرابری‌های

$$1 - \frac{1}{k} \leq \beta < 1, \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (**)$$

بنابراین، دستگاه $(*)$ ، هم‌ارز است. با نابرابری‌های $(**)$ ، یعنی

$$1 - \frac{1}{N} \leq \beta < 1$$

به این ترتیب، اگر $\alpha > 1$ ، آن‌گاه $\frac{1}{\alpha} < 1$ و در نتیجه

$$\frac{N-1}{N} \leq \alpha < 1 \quad (\text{این حالت، به}$$

خودی خود ثابت شده است).

اگر اکنون حالت $\alpha = 1$ را هم به حساب آوریم (که در ابتدای حل

از آن یاد کردیم)، می‌بینیم که در حالت $\alpha > 0$ باید داشته باشیم:

$$\frac{N-1}{N} \leq \alpha \leq \frac{N}{N-1}$$

به همین ترتیب، برای حالت $\alpha < 0$ به دست می آید:

$$-\frac{N-1}{N} \geq \alpha \geq -\frac{N}{N-1}$$

۲۱۰. داحل اول. روشن است $(a) = \left[a + \frac{1}{2} \right]$. بنابراین باید ثابت

کنیم:

$$N = \left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{N}{4} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{N}{8} + \frac{1}{2} \right] + \dots$$

فرض کنید:

$$N = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

(هر یک از رقم‌های $a_0, a_1, \dots, a_n$ برابر است با ۰ یا ۱). در واقع، بسط عدد N را بر حسب توان‌های ۲ به دست آورده‌ایم (یعنی بسط عدد N ، در عددنویسی به مبنای ۲). به روشنی داریم:

$$\left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2} \right] = \left[a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 + \frac{a_0 + 1}{2} \right] =$$

$$= a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 + a_0;$$

$$\left[\frac{N}{4} + \frac{1}{2} \right] = \left[a_n \cdot 2^{n-2} + a_{n-1} \cdot 2^{n-3} + \dots + \frac{a_1 + 1}{2} + \frac{a_0}{4} \right] =$$

$$= a_n \cdot 2^{n-2} + a_{n-1} \cdot 2^{n-3} + \dots + a_1;$$

.....

$$\left[\frac{N}{2^n} + \frac{1}{2} \right] = \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \dots + \frac{a_0}{2^n} \right] = a_n + a_{n-1};$$

$$\left[\frac{N}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{a_n + 1}{2} + \frac{a_{n-1}}{4} + \dots + \frac{a_n}{2^{n+1}} \right] = a_n;$$

$$\left[\frac{N}{2^{n+2}} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{N}{2^{n+3}} + \frac{1}{2} \right] = \dots = 0$$

(دوباره یادآوری می‌کنیم که، هر یک از رقم‌های $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ یا برابر ۰ است و یا برابر ۱). به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{N}{4} + \frac{1}{2} \right] + \dots + \left[\frac{N}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right] + \dots = \\ & = a_n(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1 + 1) + a_{n-1}(2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1 + 1) + \dots + a_1(1 + 1) + a_0 = a_n \cdot 2^n + \\ & + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0 = N \end{aligned}$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۴ حل دوم. روشن است، تعداد عددهای فردی که از N تجاوز نکنند،

در حالت زوج بودن N برابر $\frac{N}{2}$ و در حالت فرد بودن N برابر

$$\frac{N+1}{2} = \left[\frac{N}{2} \right] + 1 \text{ است، یعنی همواره برابر است با } \left(\frac{N}{2} \right). \text{ به همین-}$$

ترتیب، تعداد عددهای زوجی که از N تجاوز نکنند و بر ۴ بخش پذیر نباشند،

برابر است با $\left[\frac{N}{4} \right]$ ؛ در حالتی که N مضرب ۴ باشد یا در تقسیم بر ۴

به باقی‌مانده واحد برسد، این تعداد برابر است با $\left[\frac{N}{4} \right]$. و در حالتی که از

از تقسیم N بر ۴، باقی‌مانده‌ای برابر با ۲ یا ۳ به دست آید، برابر است با $\left[\frac{N}{4} \right] + 1$ ،

به زبان دیگر، این تعداد همواره برابر است با $\left(\frac{N}{4} \right)$. به همین ترتیب، تعداد

عددهایی که بر ۴ بخش پذیرند و لی بر ۸ بخش پذیر نیستند و در ضمن از N

تجاوز نمی‌کنند، برابر است با $\left(\frac{N}{8} \right)$. به همین ترتیب روشن می‌شود که

تعداد عددهایی که از N تجاوز نکنند، بر ۸ بخش پذیر باشند ولی بر ۱۶

بخش پذیر نباشند، برابر $\left(\frac{N}{۱۶}\right)$ ، تعداد عددهایی که از N تجاوز نکنند،

بر ۱۶ بخش پذیر ولی بر ۳۲ بخش ناپذیر باشند برابر $\left(\frac{N}{۳۲}\right)$ است و غیره.

با این روش، همه عددهای از ۱ تا n را به حساب آوردیم و در نتیجه

$$\left(\frac{N}{۲}\right) + \left(\frac{N}{۴}\right) + \left(\frac{N}{۸}\right) + \dots = N$$

۲۱۱۰ چون $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ ، پس $۱۰۲۴^{۱۰} = ۲^{۱۰۰}$. عدد $۱۰۳۰ = ۱۰۰۰^{۱۰}$

در عدد نویسی به مبنای ده، دارای ۳۱ رقم است (یک رقم برابر ۱ و سی رقم برابر ۰). بنابراین $۱۰۲۴^{۱۰}$ که از $۱۰۰۰^{۱۰}$ بزرگتر است، نمی تواند کمتر از ۳۱ رقم داشته باشد. از طرف دیگر

$$\frac{۱۰۲۴^{۱۰}}{۱۰۰۰^{۱۰}} < \left(\frac{۱۰۲۵}{۱۰۰۰}\right)^{۱۰} = \left(\frac{۴۱}{۴۰}\right)^{۱۰} = \underbrace{\frac{۴۱}{۴۰} \times \frac{۴۱}{۴۰} \times \dots \times \frac{۴۱}{۴۰}}_{۱۰ \text{ بار}} <$$

$$< \frac{۴۱}{۴۰} \times \frac{۴۰}{۳۹} \times \frac{۳۹}{۳۸} \times \frac{۳۸}{۳۷} \times \frac{۳۷}{۳۶} \times \frac{۳۶}{۳۵} \times \frac{۳۵}{۳۴} \times \frac{۳۴}{۳۳} \times \frac{۳۳}{۳۲} \times \frac{۳۲}{۳۱} = \\ = \frac{۴۱}{۳۱} < ۱۰$$

در واقع در این جا از این نابرابری های روشن استفاده کرده ایم (اگر به صورت و مخرج کسری، یک واحد اضافه کنیم، این کسر به واحد نزدیکتر می شود):

$$\frac{۴۱}{۴۰} < \frac{۴۰}{۳۹} < \frac{۳۹}{۳۸} < \dots < \frac{۳۳}{۳۲} < \frac{۳۲}{۳۱}$$

به این ترتیب

$$۲^{۱۰۰} = ۱۰۲۴^{۱۰} < ۱۰ \times ۱۰۰۰^{۱۰}$$

یعنی عدد $۲^{۱۰۰}$ کمتر از ۳۲ رقم دارد، یعنی تعداد رقم های عدد $۲^{۱۰۰}$ برابر ۳۱ است.

یادداشت. جواب این مساله را می توان به سادگی و به کمک جدول های لگاریتم به دست آورد. داریم:

$$\log 2 = 0/30103, \log 2^{100} = 100 \log 2 = 30/103$$

از آن جا که مفسر لگاریتم عدد 2^{100} برابر است با ۳۰، بنابراین عدد 2^{100} در دستگاه دهدهی عدد نویسی، دارای ۳۱ رقم است. راه حلی که در بالا آوردیم، دارای این برتری بود که از جدول‌های لگاریتم استفاده نکردیم.

۰۳۱۲ الف) راه حل اول. حاصل ضرب $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100}$ را A و

حاصل ضرب $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{98}{99}$ را B می‌نامیم. چون

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \frac{6}{7} > \frac{5}{6}, \dots, \frac{98}{99} > \frac{97}{98}, 1 > \frac{99}{100}$$

بنابراین $B > A$ در ضمن

$$A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$$

بنابراین $A^2 < A \cdot B = \frac{1}{100}$ و $A < \frac{1}{10}$

از طرف دیگر

$$B < 2A = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100}$$

زیرا $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \frac{4}{5} < \frac{5}{6}, \frac{6}{7} < \frac{7}{8}, \dots, \frac{98}{99} < \frac{99}{100}$ در نتیجه

$$A \cdot 2A > A \cdot B = \frac{1}{100} \Rightarrow A > \frac{1}{10\sqrt{2}}$$

راه حل دوم. A را به همان معنای راه حل اول می‌گیریم. داریم:

$$A^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100}$$

از آنجا

$$\frac{1^2 \cdot 3^2 - 1 \cdot 5^2 - 1 \dots 99^2 - 1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots 100^2} < A^2 < \frac{1^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1} \times \\ \times \frac{5^2}{6^2 - 1} \dots \frac{99^2}{100^2 - 1}$$

اکنون، با استفاده از اتحاد $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ، مخارجها را در سمت چپ، تجزیه می کنیم. به دست می آید:

$$\frac{1}{2 \times 2} \cdot \frac{2 \times 4}{4 \times 4} \cdot \frac{6 \times 4}{6 \times 6} \dots \frac{98 \times 100}{100 \cdot 100} < A^2 < \frac{1}{1 \times 3} \times \\ \times \frac{3 \times 5}{3 \times 5} \cdot \frac{5 \times 7}{5 \times 7} \dots \frac{99 \times 99}{99 \times 101}$$

که بعد از ساده کردن، به این صورت در می آید:

$$\frac{1}{200} < A^2 < \frac{1}{101} \Rightarrow \frac{1}{10\sqrt{2}} < A < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}$$

یادداشت. با همین روش، می توان رابطه کلی تر زیر را ثابت کرد:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

(ب) ثابت می کنیم:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad (*)$$

که ساده ترین راه، برای اثبات آن، استفاده از روش استقرای ریاضی است. برای $n=1$ داریم:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3 \times 1 + 1}} = \frac{1}{2}$$

اکنون فرض می‌کنیم، نابرابری (*)، به‌ازای مقدار مشخصی از n

برقرار باشد. دو طرف نابرابری (*) را در $\frac{2n+1}{2n+2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\left(\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}} \right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{12n^3 + 28n^2 + 20n + 1} =$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(12n^3 + 28n^2 + 19n + 4) + n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2(3n+4) + n} < \frac{1}{3n+4}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}} = \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

و بنابراین

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

یعنی نابرابری (*)، بدون علامت برابری، برای $n+1$ هم برقرار است. به‌این ترتیب، نابرابری (*) به‌ازای $n=1$ به‌برابری تبدیل می‌شود و برای $n > 1$ به‌صورت نابرابری اکید است.

اکنون، اگر در (*) فرض کنیم $n=50$ ، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} < \frac{1}{\sqrt{151}} = \frac{1}{12.288 \cdots}$$

که حتی از نابرابری موردنظر مسأله قوی‌تر است.

۲۱۳. به‌ترتیب داریم:

$$31^{11} < 32^{11} = (25)^{11} = 255 < 256 = (24)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$$

یعنی $31^{11} < 17^{14}$

۰۲۱۴ الف) چون $2^2 = 2^4 = 16 < 27 = 3^2$ ، بنابراین، برای هر $n > 1$ داریم:

$$\begin{array}{ccc} 2^{2^0} \dots 2^{2^{n-1}} & < & 2^{2^0} \dots 2^{2^{n-1}} \\ (2 \text{ بار رقم } n+1) & (n \text{ رقم}) & (n \text{ رقم}) \end{array}$$

که در حالت $n = 1000$ به نابرابری مفروض تبدیل می شود. در حالت $n = 2$ ، نابرابری دوم به برابری تبدیل می شود، در حالی که نابرابری اول همیشه صورتی اکید دارد، تنها در حالت $n = 1$ جهت نابرابری اول عوض می شود، زیرا $3 > 2^2 = 4$.

ب) ثابت می کنیم، برای $n > 1$:

$$\begin{array}{ccc} 4^{4^0} \dots 4^{4^{n-1}} & \leq & 2^{2^0} \dots 2^{2^{n-1}} \\ (n-1 \text{ رقم}) & (n \text{ رقم}) & (n \text{ رقم}) \end{array}$$

(که در این صورت، برای حالت خاص $n = 1000$ هم برقرار است). برابری دوم با توجه به بخش الف) روشن است؛ بنابراین تنها باید نابرابری اول را ثابت کنیم. اثبات را می توان با روش استقرای ریاضی داد. به ازای $n = 2$ ، درست چپ نابرابری اول تنها یک عدد ۴، و درست راست آن عدد ۲۲، یعنی ۴ قرار دارد. به ازای $a = 3$ هم، نابرابری به برابری تبدیل می شود: در سمت چپ ۴۴ و درست راست نابرابری $2^8 = 2^{2^3}$ ، یعنی همان ۴۴ می شود. به ازای $n = 4$ ، سمت چپ نابرابری اول 4^{4^4} یعنی 2^{256} است و درست راست نابرابری داریم:

$$2^{2^{2^2}} = 2^{2^{27}} < 2^{2^{10}} = 2^{1024} = 4^{512}$$

و روشن است که $۴۵۱۲ < ۴۲۵۶$. اکنون فرض می‌کنیم، نابرابری به ازای مقداری از n ($n \geq ۴$) برقرار باشد. ثابت کنیم که در این صورت، برای $n+۱ \geq ۵$ هم برقرار است داریم:

$\varphi = (22)$ $\leq (22)^2$
 (۴ رقم ۱۱) (۴ رقم ۱۲-۱) (۳ رقم ۱۲-۲)

(در این جا، از فرض استقرا، استفاده کردیم). سپس داریم:

$$\begin{aligned} (2^2) &= 2^2 \times 2 = 2^{2(2+1)} < 2^{2^2} \\ (3 \leq n-2) & \quad (3 \leq n-2) & \quad (3 \leq n-2) & \quad (n-1 \text{ رقم برابر}) \end{aligned}$$

زیرا روشن است که

$$\begin{array}{c} \textcircled{\gamma} \\ \vdots \\ \textcircled{\gamma} \end{array} > \begin{array}{c} \textcircled{\gamma} \\ \vdots \\ \textcircled{\gamma} \end{array} + 1$$

(3 [5 12-1]). (7[5, 12-1])

و به این ترتیب، اثبات درستی نابرابری مورد نظر کامل می شود.

۲۱۵. اگر تعداد رقم‌های عدد $k \mid 1974^n$ بگیریم، باید داشته باشیم:

$$10^{k-1} \leq 1974^n < 10^k$$

چون $1000^n = 10^{3n}$ ، بنابراین روشن است که $k \geq 3n$. اگر نمایش دهدهی عدد $1974^n + 2^n$ بیش از k رقم داشته باشد، آن وقت $1974^n + 2^n \geq 10^k$.

از طرف دیگر، چون $2^n(987^n + 1) = 2^n + 1974^n$ و $1974^n = 2^n \cdot 987^n$ بنابراین (با صرف نظر کردن از عامل 2^n)، باید داشته باشیم:

$$q \wedge \gamma^n < \gamma^{k-n} \cdot \Delta^k, \quad q \wedge \gamma^n + 1 \geq \gamma^{k-n} \cdot \Delta^k$$

این دو نابرابری، وقتی می‌توانند باهم برقرار باشند که داشته باشیم:

$$987^n + 1 = 2^{k-n} \cdot 5^k, \quad (987^n = 2^{k-n} \cdot 5^k - 1)$$

چون $2n - n = 2n - n = 2n$ ، $k - n \geq 3n - n = 2n$ بنا براین عدد $2^{k-n} \cdot 5^k$ مضربی است از ۸ (و چون $n > 2$ ، حتی مضربی از ۱۶). از طرف دیگر، از تقسیم ۹۸۷ بر ۸، باقی‌مانده‌ای برابر ۳ به دست می‌آید، بنابراین باقی‌مانده حاصل از تقسیم 987^n بر ۸، برابر است با باقی‌مانده حاصل از تقسیم 3^n بر ۸. در ضمن، با آزمایش مستقیم معلوم می‌شود که اگر در 3^n ، عدد n را برابر ۱، ۲، ۳، ۴، ... بگیریم، باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم 3^n بر ۸، دنباله‌ای متناوب را تشکیل می‌دهند که به این صورت است:

$$3, 1, 3, 1, 3, 1, \dots$$

بنابراین، اگر عدد $987^n + 1$ را ۸ تقسیم کنیم، در باقی‌مانده، یکی از دو عدد ۴ یا ۲ به دست می‌آید، یعنی عدد $987^n + 1$ هرگز بر ۸ بخش پذیر نیست. تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۲۱۷. عدد 36^m به ازای هر m به ۶، و عدد 5^n به ازای هر n به ۵ ختم می‌شود. بنابراین تفاضل $36^m - 5^n$ در حالت $36^m > 5^n$ به رقم ۱، و در حالت $36^m < 5^n$ به رقم ۹ ختم می‌شود؛ به این ترتیب، رقم یکان عدد $N = |36^m - 5^n|$ تنها می‌تواند برابر ۱ یا ۹ باشد. کمترین مقدار N می‌تواند یکی از سه عدد ۱، ۹ یا ۱۱ باشد. به ازای $m = 1$ و $n = 2$ به دست می‌آید $N = 11$. ثابت می‌کنیم، به ازای مقدارهای مختلف m و n ، نمی‌توان به $N = 1$ یا $N = 9$ رسید. در واقع، اگر داشته باشیم: $5^n - 36^m = 9$ ، روشن است که باید 5^n مضربی از ۹ باشد که ممکن نیست. اکنون فرض می‌کنیم $36^m - 5^n = 1$. داریم:

$$5^n = 36^m - 1 = 6^{2m} - 1 = (6^m + 1)(6^m - 1)$$

روشن است که $n > m$ ، بنابراین باید داشته باشیم:

$$6^m - 1 = 5^k \quad \text{و} \quad 6^m + 1 = 5^{n-k}$$

ولی $1 + 6^n$ بر ۵ بخش پذیر نیست و در تقسیم بر ۵ به باقی مانده‌ای برابر ۲ می‌رسد.

به این ترتیب، کمترین مقدار $N = |36^n - 5^n|$ همان عدد ۱۱ است.
۰۲۱۷ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{100}} C(100, 50) &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100}{2^{50} (1 \times 2 \times \dots \times 50) \cdot 2^{50} (1 \times 2 \times \dots \times 50)} = \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100}{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100) \cdot (2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100)} = \\ &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 99}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 100} \end{aligned}$$

بنابراین، تنها این می‌ماند که از بخش الف) مسأله ۲۱۲ استفاده کنیم.

۰۲۱۸. در واقع، باید روشن کنیم که از دو عدد $101^n - 99^n$ و 100^n ، کدام بزرگترند. این نسبت را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{101^n - 99^n}{100^n} &= \frac{(100+1)^n - (100-1)^n}{100^n} = \\ &= \frac{2(C(n, 1) \cdot 100^{n-1} + C(n, 3) \cdot 100^{n-3} + \dots)}{100^n} = \\ &= 2 \left(\frac{n}{100} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3! \cdot 100^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

به آسانی ثابت می‌شود که، این نسبت، به ازای $n \geq 50$ ، از واحد بزرگتر است. اکنون ثابت می‌کنیم که، این نسبت، به ازای $n = 49$ هم از واحد بزرگتر است:

$$2 \left(\frac{49}{100} + \frac{49 \times 48 \times 47}{3! \cdot 100^3} + \dots \right) > 2 \left(\frac{49}{100} + \frac{18424}{100^3} \right) >$$

$$> 2 \left(\frac{49}{100} + \frac{100^2}{100^3} = 1 \right)$$

اکنون نشان می‌دهیم که این نسبت، به ازای $n = 48$ ، از واحد کوچکتر است. داریم:

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{48}{100} + \frac{48 \times 47 \times 46}{3! \cdot 100^3} + \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{5! \cdot 100^5} + \dots \right) < \\ & < 2 \left(\frac{48}{100} + \frac{48^2}{(1 \times 2 \times 3) \cdot 100^3} + \frac{48^5}{(1 \times 2 \times 3) \cdot (2 \times 3) \cdot 100^5} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{48^7}{(1 \times 2 \times 3) \cdot (2 \times 3) \cdot (2 \times 3) \cdot 100^7} + \dots \right) = \\ & = 2 \left(\frac{48}{100} + \frac{1}{6} \left(\frac{48}{100} \right)^2 + \frac{1}{6^2} \left(\frac{48}{100} \right)^5 + \dots \right) < \\ & = 2 \cdot \frac{\frac{48}{100}}{1 - \frac{1}{6} \left(\frac{48}{100} \right)^2} = \frac{9600}{9616} < 1 \end{aligned}$$

روشن است که به ازای $n < 48$ هم، این نسبت، از واحد کوچکتر می‌شود. به این ترتیب، عدد $99^n + 100^n$ ، به ازای $n \leq 48$ از 101^n بزرگتر و، به ازای $n > 48$ از 101^n کوچکتر است.

۲۱۹. حل مسأله‌ها با استفاده از يك قضیه کمکی می‌دهیم: حاصل ضرب

n عدد درست متوالی، بزرگتر است از ریشه دوم حاصل ضرب توان n کوچکترین عدد در بزرگترین عدد.

n عدد درست متوالی را به صورت $a, a+1, a+2, \dots, a+n-1$ در نظر می‌گیریم. k امین عدد (از ابتدا به انتها) برابر $a+k-1$ و k امین عدد (از انتها به ابتدا) برابر $a+n-k$ است. برای حاصل ضرب این دو عدد داریم:

$$(a+k-1)(a+n-k) = a^2 + an - a + (k-1)(n-k) \geq \\ \geq a^2 + an - a = a(a+n-1)$$

(علامت برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم $k=1$ یا $k=n$. به این ترتیب، حاصل ضرب دو عدد $a+k-1$ و $a+n-k$ (که در حالت فرد بودن n ، ممکن است یکی باشند)، همیشه از حاصل ضرب دو عدد اول و آخر (کوچکترین و بزرگترین عدد دنباله)، بزرگتر است. در نتیجه، برای حاصل ضرب همه عددهای دنباله خواهیم داشت:

$$a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \geq [a(a+n-1)]^{\frac{n}{2}} = \\ = \sqrt{a^n(a+n-1)^n}$$

در این جا، علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که $n=1$ یا $n=2$. اکنون ثابت می‌کنیم $100^{200} > 300!$ داریم:

$$1 \times 2 \times \dots \times 25 > \sqrt{25^{25}} = 5^{25},$$

$$26 \times 27 \times \dots \times 50 > (\sqrt{26 \times 50})^{25} > 35^{25},$$

$$51 \times 52 \times \dots \times 100 > (\sqrt{51 \times 100})^{50} > 70^{50},$$

$$101 \times 102 \times \dots \times 200 > \sqrt{100^{100}} \cdot \sqrt{200^{100}} = 10^{200} \cdot 2^{50},$$

$$201 \times \dots \times 300 > \sqrt{200^{100}} \cdot \sqrt{300^{100}} = 10^{200} \cdot 2^{50} \cdot 3^{50}$$

از ضرب این نابرابری‌ها به دست می‌آید:

$$300! > 5^{25} \cdot 35^{25} \cdot 70^{50} \cdot 100^{400} \cdot 2^{100} \cdot 3^{50} = \\ = 5^{50} \cdot 7^{25} \cdot 5^{50} \cdot 14^{50} \cdot 10^{400} \cdot 2^{100} \cdot 3^{50} = 10^{500} \cdot 7^{25} \cdot 14^{50} \cdot 3^{50} = \\ = 10^{500} \cdot 21^{25} \cdot 42^{25} \cdot 14^{25} > 10^{500} \cdot 20^{25} \cdot 40^{25} \cdot 14^{25} = \\ = 10^{550} \cdot 2^{25} \cdot 4^{25} \cdot 14^{25} = 10^{550} \cdot 112^{25} = \\ = 10^{600} \cdot 1/12^{25} > 10^{600} = 100^{300}$$

یادداشت. تعمیم این مساله را در مساله ۲۲۳ خواهید دید.

۲۲۵. ثابت می کنیم، به شرط $k \leq n$ ، داریم:

$$1 + \frac{k}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

اثبات را با روش استقرای ریاضی می دهیم. نابرابری ها به ازای $k = 1$ برقرارند. اکنون فرض می کنیم، نابرابری ها برای k برقرار باشند و ثابت می کنیم که، در این صورت، برای $k + 1$ هم برقرارند. داریم:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n^2} > 1 + \frac{k+1}{n} \end{aligned}$$

اکنون، برای $k \leq n$ داریم:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2 + 2k + 1}{n^2} - \frac{k^2 + 1}{n^2} + \frac{k^2}{n^2} = \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{n(k+1) - k^2}{n^2} < 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} \end{aligned}$$

زیرا به ازای $n \geq k$ داریم: $n(k+1) > k^2$.

اکنون اگر در این نابرابری ها قرار دهیم $k = n$ ، به دست می آید:

$$2 = 1 + \frac{n}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3$$

۲۲۱. با توجه به نتیجه ای که از مساله قبل به دست آوردیم، داریم:

$$(1/0000001)^{1000000} = \left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} > 2$$

۲۲۲. به ترتیب داریم:

$$\frac{1001^{999}}{1000^{1000}} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{1001} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{1001} < \\ < 3 \times \frac{1}{1000} < 1$$

(مساله ۲۲۰ را ببینید). بنابراین $1001^{999} > 1000^{1000}$.

۲۲۳. از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. به ازای $n = 6$ ، نابرابری‌ها

برقرارند، زیرا

$$\left(\frac{6}{3}\right)^6 = 64, \quad 6! = 720, \quad \left(\frac{6}{2}\right)^6 = 3^6 = 729$$

و روشن است که $64 < 720 < 729$. اکنون فرض می‌کنیم نابرابری‌ها، برای مقداری از $n \geq 6$ برقرار باشند و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای $n+1$ هم برقرارند. باید ثابت کنیم:

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} < (n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

ومی‌دانیم:

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

یعنی باید ثابت کنیم:

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{3}\right)^n < n+1 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

و اگر هر دو نابرابری را به $n+1$ ساده کنیم:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{3} < 1 < \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{2}$$

که باتوجه به نابرابریهای $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ (مسأله ۲۲۰) روشن است.

۲۲۴. الف) باتوجه به دستور بسط دو جمله ای داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C(n, 1) \frac{1}{n} + C(n, 2) \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\dots + C(n, n-1) \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n^{n-1}} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

و به همین ترتیب

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

و اگر آن‌ها را باهم مقایسه کنیم، به سادگی نتیجه می‌شود:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(ب) این نسبت را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \\ &= \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n-1)^n}{n^{2n+1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

و برای $n \geq 2$ داریم:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n &= 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^6} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot \frac{1}{n^8} - \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n^2} - \left[\frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{1}{n^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \frac{1}{n^3} \right] - \dots \leq \\ &\leq \dots 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^4} < 1$$

در نتیجه $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$ و بنابراین

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n < 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

۱۲۵. از روش استقرای ریاضی استفاده می کنیم.

۱. باید ثابت کنیم:

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (*)$$

این نابرابری به ازای $n=1$ برقرار است، زیرا $1 > \frac{1}{e}$. فرض می کنیم،

نابرابری $(*)$ به ازای n برقرار باشد و ثابت می کنیم که، در این صورت، به ازای $n+1$ هم برقرار است، یعنی ثابت می کنیم:

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

با توجه به مسأله ۲۲۴، الف) داریم: $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ، یعنی

$$\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

به دست می آید:

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1) \cdot n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n+1) = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{n^n \cdot e}{(n+1)^n} = \\ &= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

۲. اکنون ثابت می کنیم:

$$n! < n \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (**)$$

ثابت می‌کنیم، نابرابری (***) به ازای هر $n > 6$ برقرار است. از جدول‌های لگاریتم طبیعی (یعنی لگاریتم‌های در مبنای عدد e) استفاده می‌کنیم. به آسانی قابل تحقیق است که نابرابری (***) به ازای $n = 7$ برقرار است:

$$7! < 7 \left(\frac{7}{e}\right)^7 \Rightarrow 6! < \left(\frac{7}{e}\right)^7$$

درواقع $\ln 6! = \ln 720 \approx 6.58$ و

$$\ln \left(\frac{7}{e}\right)^7 = 7(\ln 7 - 1) \approx 6.62$$

اکنون فرض می‌کنیم، رابطه (***) برای مقداری از $n \geq 7$ برقرار باشد (فرض استقرا). با توجه به مسأله ۲۲۴، ب) داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \Rightarrow \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1$$

بافرض درستی نابرابری (***) داریم:

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1) \cdot n! < (n+1) \cdot n \left(\frac{n}{e}\right)^n = \\ &= (n+1) \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{n^{n+1} \cdot e}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= (n+1) \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} < (n+1) \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

یعنی نابرابری (***) برای $n+1$ هم برقرار است.

۲۲۶. روشن است که در مجموع $S = x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1$

به شرط $x > 1$ ، جمله اول بزرگترین جمله و جمله آخر کوچکترین جمله است؛ درحالی‌که به ازای $x < 1$ ، بزرگترین جمله این مجموع، جمله آخر و

کوچکترین جمله آن، جمله اول است. در نتیجه

$$(k+1)x^k > S > k+1 \quad (x > 1 \text{ برای})$$

$$(k+1)x^k < S < k+1 \quad (x < 1 \text{ برای})$$

بافرض $x \neq 1$ ، این نابرابریها را در $x-1$ ضرب می کنیم:

$$(k+1)x^k(x-1) > x^{k+1}-1 > (k+1)(x-1)$$

در این جا $x = \frac{p}{p-1}$ می گیریم، به دست می آید:

$$\frac{(k+1)p^k}{(p-1)^{k+1}} > \frac{p^{k+1}-(p-1)^{k+1}}{(p-1)^{k+1}} > \frac{(k+1)(p-1)^k}{(p-1)^{k+1}}$$

به همین ترتیب، اگر قرار دهیم $x = \frac{p+1}{p}$:

$$\frac{(k+1)(p+1)^k}{p^{k+1}} > \frac{(p+1)^{k+1}-p^{k+1}}{p^{k+1}} > \frac{(k+1)p^k}{p^{k+1}}$$

به این ترتیب، نتیجه می شود:

$$(p+1)^{k+1}-p^{k+1} > (k+1)p^k > p^{k+1}-(p-1)^{k+1}$$

به جای p ، به ترتیب عددهای از ۱ تا n را قرار می دهیم:

$$2^{k+1}-1^{k+1} > (k+1)1^k > 1^{k+1}-0,$$

$$3^{k+1}-2^{k+1} > (k+1)2^k > 2^{k+1}-1^{k+1},$$

$$4^{k+1}-3^{k+1} > (k+1)3^k > 3^{k+1}-2^{k+1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1} > (k+1)n^k > n^{k+1}-(n-1)^{k+1}$$

که از مجموع آنها به دست می آید:

$$(n+1)^{k+1}-1 > (k+1)(1^k+2^k+\dots+n^k) > n^{k+1}$$

و سرانجام، اگر آن را بر $k+1$ تقسیم کنیم:

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} - \frac{1}{n^{k+1}} \right] \frac{1}{k+1} n^{k+1} > \\ > 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k > \frac{1}{k+1} n^{k+1}$$

و به این ترتیب، درستی نابرابری‌های مورد نظر ثابت می‌شود.
۲۲۷. الف) روشن است که

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ مرتبه}} = \frac{1}{2}$$

به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \right) + \right. \\ &+ \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \right) \Big] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2 + (n-1)} + \frac{3n}{2n^2 + 2(n-1)} + \dots + \frac{3n}{2n^2} \right] < \\ &< \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2} + \dots + \frac{3n}{2n^2} \right]}_{(n+1) \text{ مرتبه}} = \frac{1}{2} (n+1) \frac{3}{2n} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4n} < \frac{3}{4} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ب) نابرابری زیر روشن است:

$$\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

اکنون به سادگی به دست می‌آید:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) <$$

$$< \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{(2n-1) \text{ مرتبه}} = \frac{2n}{n} = 2$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{n+3} + \frac{1}{2n-1} \right) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n+1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2n+2}{(2n+1)^2 - n^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2n+2}{(2n+1)^2 - (n-1)^2} + \frac{2n+2}{(2n+1)^2 - (n-2)^2} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{2n+2}{(2n+1)^2 - n^2} \right] >$$

$$> \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{2n+2}{(2n+1)^2} + \frac{2n+2}{(2n+1)^2} + \dots + \frac{2n+2}{(2n+1)^2}}_{(2n+1) \text{ مرتبه}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (2n+1) \cdot \frac{2n+2}{(2n+1)^2} = 1$$

۴۲۸. الف) قبل از هر چیز ثابت می کنیم:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

درواقع داریم:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} &= \frac{(2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

نابرابری دومهم، باهمین روش، ثابت می‌شود. اکنون می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} &> 1 + 2[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &+ (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{1000001} - \sqrt{1000000})] = \\ &= 1 + 2(\sqrt{1000001} - \sqrt{2}) > 2 \times 1001 - \sqrt{8} + \\ &+ 1 > 2000 - 3 + 1 = 1998 \end{aligned}$$

به‌همین ترتیب

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} &< 1 + 2[(\sqrt{2} - 1) + \\ &+ (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{1000000} - \sqrt{999999})] = 1 + \\ &+ 2[\sqrt{1000000} - 1] = 1999 \end{aligned}$$

بنابراین، بخش درست عدد مفروض برابر است با ۱۹۹۸.

ب) باهمان روش راه‌حل مسأله الف) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} &> \\ &> 2[(\sqrt{10001} - \sqrt{10000}) + (\sqrt{10002} - \sqrt{10001}) + \dots \\ &+ (\sqrt{1000001} - \sqrt{1000000})] = 2(\sqrt{1000001} - \sqrt{1000000}) > \\ &> 2(1000 - 1000) = 1800 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{100000}} + \frac{1}{\sqrt{100001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000000}} < \\ < 2[(\sqrt{100000} - \sqrt{99999}) + (\sqrt{100001} - \sqrt{100000}) + \dots + \\ + (\sqrt{10000000} - \sqrt{9999999})] = 2(\sqrt{10000000} - \sqrt{99999}) = \\ = 20000 - \sqrt{399996} < 20000 - 199/98 = 1800/02$$

بنابراین، مجموع مفروض، با دقت تا $\frac{1}{50} = 0/02$ ، برابر است با ۱۸۰۰.

۲۲۹. قبل از هر چیز، این دو برابری را با هم مقایسه می کنیم:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2},$$

$$\left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}\right)^3 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{n^3}$$

که نشان می دهد: $\left(1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n}\right)^3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ ، یعنی $1 + \frac{2}{3n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$

اگر دو طرف این نابرابری را در $n^{\frac{2}{3}}$ ضرب کنیم، به دست می آید:

$$n^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} > (n+1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2} (\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2})$$

به همین ترتیب

$$\left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}\right)^3 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{n^3} >$$

$$> 1 - 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

(زیرا $\left(\frac{1}{3n^2} - \frac{8}{27n^3} > \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{3n^3} \geq 0\right)$ در نتیجه

$$\dots + \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} \right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{1001} > 0/1 - 0/001 = 0/099$$

و به همین ترتیب

$$\begin{aligned} \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{1000^2} &< \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000} = \\ &= \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) + \dots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000} \right) = \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{1000} < 0/112 - 0/001 = 0/111 \end{aligned}$$

بنابراین

$$0/099 < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{1000^2} < 0/111$$

یعنی، این مجموع با دقت ۰/۰۰۶ تقریب، برابر است با ۰/۱۰۵.
(ب) روشن است که

$$\frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \dots + \frac{1}{1000!} > \frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800} \approx 0/000000275$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \dots + \frac{1}{1000!} &< \frac{1}{9} \left(\frac{9}{10!} + \frac{10}{11!} + \frac{11}{12!} + \dots + \frac{999}{1000!} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{10-1}{10!} + \frac{11-1}{11!} + \frac{12-1}{12!} + \dots + \frac{1000-1}{1000!} \right) = \\ &= \frac{1}{9} \left[\left(\frac{1}{9!} - \frac{1}{10!} \right) + \left(\frac{1}{10!} - \frac{1}{11!} \right) + \left(\frac{1}{11!} - \frac{1}{12!} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{999!} - \frac{1}{1000!} \right) \right] = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9!} - \frac{1}{1000!} \right) < \frac{1}{9 \cdot 9!} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3265920} \approx 0/000000305$$

به این ترتیب

$$0/000000275 < \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \dots + \frac{1}{1000!} < 0/000000305$$

یعنی مجموع مفروض، با دقت تا $0/000000015$ تقریب برابر است با $0/000000029$.

۲۳۱. N را عددی درست می‌گیریم (این فرض، به کلی بودن مساله، لطمه‌ای نمی‌زند) و فرض می‌کنیم $n = 2^N$. در این صورت

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2N-1}+1} + \frac{1}{2^{2N-1}+2} + \dots \right. \\ &\left. \dots + \frac{1}{2^{2N}-1} + \frac{1}{2^{2N}}\right) > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{2N \text{ مرتبه}} = N + 1 \end{aligned}$$

یادداشت. یادآوری می‌کنیم که، این مساله را، به کمک نتیجه مساله ۲۲۷، هم می‌توان حل کرد.

۲۳۲. عددهایی از این نوع را در نظر می‌گیریم که بین $\frac{1}{10^k}$ و

$\frac{1}{10^{k+1}}$ واقع‌اند، همراه با خود عدد $\frac{1}{10^k}$ (و نه $\frac{1}{10^{k+1}}$). تعداد این عددها را

(که در مخرج خود شامل رقم ۹ نیستند) n_k می‌نامیم. اگر کسر $\frac{1}{q}$ ، که بین

$\frac{1}{10^{k-1}}$ و $\frac{1}{10^k}$ قرار دارد، حذف نشده باشد، آن وقت از بین کسرهای

$\frac{1}{10q+9}$ و $\frac{1}{10q+8}$ ، ...، $\frac{1}{10q+2}$ ، $\frac{1}{10q+1}$ ، $\frac{1}{10q}$ (که بین $\frac{1}{10^{k+1}}$ و $\frac{1}{10^k}$ قرار دارند)، تنها کسر اخیر حذف می شود. ولی اگر کسر $\frac{1}{q}$ جزو کسری های حذف شده باشد، آن وقت همه کسرهای $\frac{1}{10q}$ ، $\frac{1}{10q+1}$ ، ...، $\frac{1}{10q+9}$ هم حذف می شود. بنابراین

$$n_k = 9n_{k-1}$$

چون $n_0 = 8$ (از بین کسرهای ۱، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، ...، $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{9}$ ، تنها کسر $\frac{1}{9}$ حذف می شود)، بنابراین

$$n_1 = 8 \times 9 = 72; n_2 = 8 \times 9^2; \dots; n_k = 8 \times 9^k$$

اکنون با فرض $n < 10^{m+1}$ ، مجموع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ را در نظر می گیریم. برای این که، این مجموع را محاسبه کنیم، به نحوی که در مخرج کسرها رقم ۹ وجود نداشته باشد، مجموع $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10^{m+1}-1}$ را در نظر می گیریم، جمله هایی را که در مخرج خود شامل رقم ۹ هستند حذف می کنیم و بقیه را به این صورت می نویسیم:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{88}\right) + \\ & + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{888}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10^m} + \dots + \underbrace{\frac{1}{88 \dots 8}}_{m+1 \text{ مرتبه}}\right) \end{aligned}$$

این مجموع، نمی تواند از مجموع زیر بیشتر باشد:

$$1 \times n_0 + \frac{1}{10} \cdot n_1 + \frac{1}{100} \cdot n_2 + \dots + \frac{1}{10^{m-1}} \cdot n_{m-1} + \frac{1}{10^m} n_m$$

(زیرا، در این مجموع، هر جمله برابر است با تعداد جمله‌های پرائتز نظیر در مجموع قبلی، ضرب در بزرگترین جمله آن)، پس به روشنی داریم:

$$\begin{aligned} 1 \times n_0 + \frac{1}{10} \cdot n_1 + \frac{1}{100} \cdot n_2 + \dots + \frac{1}{10^{m-1}} \cdot n_{m-1} + \frac{1}{10^m} \cdot n_m &= \\ &= 8 \left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{10^2} + \dots + \frac{9^{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{9^m}{10^m} \right) = \\ &= 8 \cdot \frac{1 - \frac{9^m}{10^m}}{1 - \frac{9}{10}} < 8 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 8 \times 10 = 80 \end{aligned}$$

که حکم مساله را ثابت می‌کند.

۲۳۲. الف) مجموع $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$ را به شرط $n < 2^{k+1}$

و همچنین، مجموع $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2}$ را در نظر

می‌گیریم. جمله‌ها را، شبیه مساله ۲۳۱، مرتب می‌کنیم:

$$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \right) + \dots$$

$$\begin{aligned} &\dots + \left(\frac{1}{(2^k)^2} + \frac{1}{(2^k+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2} \right) < 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(k^2)^2} + \frac{1}{(k^2)^2} + \dots + \frac{1}{(k^2)^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^k} < 2$$

که حکم مساله را ثابت می کند.

یادداشت. با همین روش می توان ثابت کرد، به شرط $\alpha > 1$ ، داریم:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}$$

یعنی، مجموع $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$ ، به ازای هر $\alpha > 1$ ، با بزرگ شدن

n ، مقداری کران دار است. از نتیجه مساله ۲۳۱ می توان قانع شد که. این

مجموع، به ازای $\alpha \leq 1$ ، می تواند، با بزرگ شدن n ، به دلخواه بزرگ شود.

(ب) روشن است که

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &< \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{4} \right) + \\ &+ \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

از طرف دیگر، با توجه به برابری $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ داریم:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

بنابراین

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 1 \frac{3}{4}$$

۰۲۳۴. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} <$$

$$< \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^k}\right) \times \dots$$

$$\dots \times \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^k}\right)$$

که در آن، k عددی است درست، به نحوی که $2^k \leq n < 2^{k+1}$ و p_1 ، بزرگترین عدد اولی است که از n تجاوز نکند. برای اثبات، پرانتزهای سمت راست نابرابری را بازمی‌کنیم. هر عدد m (از ۱ تا n) را می‌توان به صورت ضرب عددهای اول ۲، ۳، ۵، ...، p_1 ، بانماهای مختلف نشان داد:

$$m = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \dots p_1^{\alpha_l}$$

که در آن، همهٔ نماهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ ، عددهایی درست و غیرمنفی‌اند (والبته، از k تجاوز نمی‌کنند). بنابراین، وقتی پرانتزها را درست راست

نابرابری باز کنیم، مجموعی برابر $\frac{1}{m}$ به دست می‌آید که برابر است با

حاصل ضرب عددهای $\frac{1}{2^{\alpha_1}}, \frac{1}{3^{\alpha_2}}, \frac{1}{5^{\alpha_3}}$ و غیره که، به ترتیب، از پرانتزهای

اول، دوم، سوم و غیره به دست می‌آید. بنابراین، وقتی پرانتزها را درست

راست نابرابری باز کنیم، علاوه بر کسرهای ۱، $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}$ ،

کسرهای دیگری هم به دست می‌آید، یعنی مجموع همهٔ آن‌ها، از مقدار سمت چپ نابرابری، بزرگتر است.

اکنون، از دوطرف نابرابری لگاریتم می‌گیریم:

$$\log\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) <$$

$$\begin{aligned} &< \log \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^k}\right) \times \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \times \left(1 + \frac{1}{p_l} + \frac{1}{p_l^2} + \dots + \frac{1}{p_l^k}\right) \right] = \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \log \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^k}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \log \left(1 + \frac{1}{p_l} + \frac{1}{p_l^2} + \dots + \frac{1}{p_l^k}\right) \end{aligned}$$

از طرف دیگر، برای هر عدد درست k و $p \geq 2$ داریم:

$$\log \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots + \frac{1}{p^k}\right) < \frac{2 \log 3}{p}$$

در واقع

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^k} = \frac{1 - \frac{1}{p^{k+1}}}{1 - \frac{1}{p}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$$

و از نتیجه مسأله ۲۲۰ به دست می آید:

$$\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^{p-1} < 3, \quad 1 + \frac{1}{p-1} < \sqrt[p-1]{3}, \quad \log \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) < \frac{\log 3}{p-1}$$

درضمن، نابرابری زیر واضح است:

$$\frac{2 \log 3}{p} > \frac{\log 3}{p-1}$$

و به این ترتیب، نتیجه می شود:

$$\log \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) < \frac{2 \log 3}{2} + \frac{2 \log 3}{3} + \frac{2 \log 3}{5} + \dots + \frac{2 \log 3}{p_l} =$$

$$= 2 \log 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p_l} \right)$$

اگر عددی مانند N وجود داشته باشد، به نحوی که مجموع

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p_l}$$

N باشد، آن وقت، به ازای هر عدد درست و مثبت n ، باید داشته باشیم:

$$\log \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) <$$

$$< 2 \log 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p_l} \right) < 2(N-1) \log 3$$

از آن جا

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < 3^{2(N-1)} = N_1$$

که در آن، N_1 مستقل از n است. ولی در حل مسأله ۲۳۱ دیدیم که چنین عددی برای N_1 وجود ندارد. بنابراین، عدد N وجود دارد، به نحوی که

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p_l} < N$$

که در آن، p_l برابر است با l امین عدد اول، در دنبالهٔ عددهای طبیعی.
۲۳۵. به سادگی می‌توان ثابت کرد:

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

(ثابت کنید)، بنابراین، باید ثابت کنیم

$$P(a, b, c) = (a+b+c)^{333} - a^{333} - b^{333} - c^{333}$$

برهنگ از عامل‌های $a+b$ ، $b+c$ و $c+a$ بخش پذیر است؛ و این، روشن است، زیرا $P(a, b, c)$ به ازای $a = -b$ یا $b = -c$ یا $c = -a$ برابر

صفر می‌شود.

۲۳۶. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} a^{10} + a^5 + 1 &= \frac{(a^5)^3 - 1}{a^5 - 1} = \frac{a^{15} - 1}{a^5 - 1} = \\ &= \frac{(a^3)^5 - 1}{(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)} = \\ &= \frac{(a^3 - 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)}{(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)} = \\ &= \frac{(a^2 + a + 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)}{a^4 + a^3 + a^2 + a + 1} \end{aligned}$$

و اگر به تقسیم مستقیم متوسل شویم، به دست می‌آید:

$$\frac{a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1}{a^4 + a^3 + a^2 + a + 1} = a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1$$

و بنابراین

$$a^{10} + a^5 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$$

۲۳۷. راه حل اول. چند جمله‌ای اول را B و چند جمله‌ای دوم را A

می‌نامیم. داریم:

$$\begin{aligned} B - A &= (x^{9999} - x^9) + (x^{8888} - x^8) + (x^{7777} - x^7) + \\ &+ (x^{6666} - x^6) + (x^{5555} - x^5) + (x^{4444} - x^4) + \\ &+ (x^{3333} - x^3) + (x^{2222} - x^2) + (x^{1111} - x) = \\ &= x^9[(x^{10})^{999} - 1] + x^8[(x^{10})^{888} - 1] + x^7[(x^{10})^{777} - 1] + \\ &+ x^6[(x^{10})^{666} - 1] + x^5[(x^{10})^{555} - 1] + x^4[(x^{10})^{444} - 1] + \\ &+ x^3[(x^{10})^{333} - 1] + x^2[(x^{10})^{222} - 1] + x[(x^{10})^{111} - 1] \end{aligned}$$

هر يك از عبارت‌های داخل گروه‌ها بر $1 - x^{10}$ و، به‌طور بدیهی،

بر $A = \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$ بخش پذیر است. $B - A$ بر A بخش پذیر می‌شود، بنابراین هم B بر A بخش پذیر است.
 (۱۰ حل دوم). داریم:

$$\begin{aligned} x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= \\ = \frac{x^{10} - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_9)}{x - 1} &= \\ = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_9) \end{aligned}$$

در این جا $a_k = \cos \frac{2k\pi}{10} + i \sin \frac{2k\pi}{10}$ ($k = 1, 2, \dots, 9$). ریشه‌های $x^{10} - 1 = 0$ (یعنی ریشه‌های دهم واحد) هستند. بنابراین، برای اثبات حکم، باید ثابت کنیم که عبارت

$$\begin{aligned} &x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555} + \\ &+ x^{4444} + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111} + 1 \end{aligned}$$

بر هر يك از عامل‌های $x - a_1, x - a_2, \dots, x - a_9$ بخش پذیر است. این بخش پذیری، به معنای آن است که ثابت کنیم، معادله

$$x^{9999} + x^{8888} + \dots + x^{1111} + 1 = 0 \quad (*)$$

دارای ریشه‌های $a_1, a_2, \dots, a_9$ است، یعنی a_k ($k = 1, 2, \dots, 9$) در معادله (*) صدق می‌کند. در واقع، چون $a_k^{10} = 1$ ، بنابراین

$$a_k^{9999} = a_k^{9990+9} = (a_k^{10})^{999} \cdot a_k^9 = a_k^9,$$

$$a_k^{8888} = a_k^{8880+8} = (a_k^{10})^{888} \cdot a_k^8 = a_k^8$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$a_k^{999} + a_k^{888} + \dots + a_k^{111} + 1 = a_k^9 + a_k^8 + \dots + a_k + 1 = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, 9)$$

۰۲۳۸ الف) داهل اول. داریم:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \\ &= a^3 + 3ab(a+b) + b^3 + c^3 - 3abc - 3ab(a+b) = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3ab(c+a+b) = \\ &= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = \\ &= [(a+b)+c][(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) = \\ &= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab] = \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \end{aligned}$$

داهل دوم. به جای a ، مقدار x را قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم $a+b+c=0$. از بسط عبارت $(x+b+c)^3$ نتیجه می‌شود که، به شرط $x+b+c=0$ داریم:

$$x^3 + b^3 + c^3 - 3xabc = 0$$

بنابراین $x = -b - c$ ، ریشه معادله $x^3 - 3bcx + b^3 + c^3 = 0$ است و این، به معنای آن است که عبارت $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ بر $a+b+c$ بخش پذیر است. اگر تقسیم را انجام دهیم، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + \\ &+ b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \end{aligned}$$

ب) a و b را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$x^3 + px + q = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$$

برای این منظور باید دستگاه شامل معادله‌های $\frac{p}{3} = -3ab$ و $a^3 + b^3 = q$

را حل کنیم. اگر دستگاه را به این صورت بنویسیم:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = q \\ a^2 \cdot b^2 = -\frac{p^2}{27} \end{cases}$$

روشن می‌شود که a^3 و b^3 ریشه‌های معادله $z^2 - qz - \frac{p^3}{27} = 0$ هستند داریم*:

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (*)$$

اکنون، با توجه به نتیجه‌ای که در بخش الف) به دست آوردیم: داریم:

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= x^3 + a^3 + b^3 - 3abx = \\ &= (a + b + x)(a^2 + b^2 + x^2 - ab - ax - bx) \end{aligned}$$

و بنابراین، ریشه‌های معادله درجه سوم مفروض، عبارتند از ریشه معادله درجه اول

$$a + b + x = 0$$

و معادله درجه دوم

$$x^2 - (a + b)x + a^2 + b^2 - ab = 0$$

(*) در حالت $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$ ، عددهای a و b ، که از (*) به دست می‌آیند،

حقیقی‌اند، ولی در حالت $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ ، برای a و b ، دو عدد مختلط به دست

می‌آید. در واقع a ، برابر است با یکی از ریشه‌های سوم عدد مختلط

$$ab = -\frac{p}{3}$$

که، بعد از مشخص شدن a ، عدد b ، از برابری $\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

به دست می‌آید.

از معادله درجه اول به دست می‌آید $x = -a - b$ ، یعنی

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

و از معادله درجه دوم

$$x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}i, \quad x_3 = \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}i$$

که در آن‌ها، a و b ، از دستورهای (*) به دست می‌آیند.

۰۲۳۹. راه حل اول. فرض می‌کنیم $\sqrt{a+x} = y$ ؛ در نتیجه به دستگاهی

از دو معادله زیر می‌رسیم:

$$\sqrt{a+x} = y, \quad \sqrt{a-y} = x$$

اگر دو طرف هر یک از این دو معادله را مجذور و، سپس، دومی را از

اولی کم کنیم، خواهیم داشت:

$$x+y = y^2 - x^2$$

که می‌توان آن را این طور نوشت:

$$x^2 - y^2 + x + y = (x+y)(x-y+1) = 0$$

از این جا دو امکان پیش می‌آید:

$$۱) \quad x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow x^2-x-a=0;$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$۲) \quad x-y+1=0 \Rightarrow y=x+1 \Rightarrow x^2+x+1-a=0;$$

$$x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}$$

و به طور مستقیم می‌توان تحقیق کرد که x_1, x_2, x_3 و x_4 ، ریشه‌های معادله

مفروض‌اند. ولی اگر بحث برسر ریشه‌های حقیقی معادله باشد، چنین نیست*.
 راه حل دوم. در معادله مفروض، رادیکال‌ها را از بین می‌بریم:

$$a - \sqrt{a+x} = x^2, (a-x^2)^2 = a+x,$$

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$$

که نسبت به x ، معادله‌ای است از درجه چهارم. ولی اگر آن را برحسب a مرتب کنیم، به معادله‌ای درجه دوم می‌رسیم:

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0;$$

$$a = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x + 1)}{2}; a_1 = x^2 + x + 1, a_2 = x^2 - x$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x &= (a - a_1)(a - a_2) = \\ &= (a - x^2 - x - 1)(a - x^2 + x) \end{aligned}$$

و ریشه‌ها به دست می‌آیند.

۰۲۴۰. راه حل اول. فرض می‌کنیم:

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = y, -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} = y_1$$

و معادله مفروض به صورت $y = y_1$ در می‌آید.

اکنون، اگر x را برحسب y_1 پیدا کنیم، با محاسبه‌های ساده‌ای،

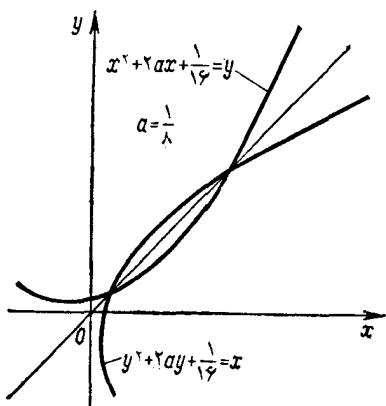
به دست می‌آید.

$$x = y_1^2 + 2ay_1 + \frac{1}{16}$$

(*) در واقع، برای این که رادیکال‌های حاصل، معنا داشته باشند، معادله

مفروض در حالت $a \geq 1$ دارای جواب منحصر (حقیقی) $x_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$ است

و در حالت $a < 1$ جواب ندارد.



شکل ۲۷

به این ترتیب x بر حسب y_1 ، با همان عبارتی بیان می‌شود که y بر حسب x

است. بنابراین نمودار تابع‌های $y_1 = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$ و

$y = x^2 + 2ax + \frac{1}{16}$ دوسهمی را تشکیل می‌دهند که نسبت به نیمساز ربع

اول دستگاه مختصات قرینه یکدیگرند (شکل ۲۷؛ برای هر نقطه $x = x_0$

$y = y_0$ از نمودار تابع اول، نقطه متناظر $x = y_0$ ، $y = x_0$ بر نمودار تابع

دوم قرار دارد و، این دو نقطه، نسبت به نیمساز ربع اول دستگاه مختصات،

قرینه یکدیگرند.) نقطه‌های برخورد دو نمودار، متناظرند با مقدارهایی از

x که برای $y = y_1$ به دست می‌آیند، یعنی طول‌های نقطه‌های برخورد دو

نمودار، ریشه‌های حقیقی معادله مفروض‌اند. در ضمن، چنین نقطه‌هایی،

باید بر محور تقارن شکلی قرار گیرد که از دو نمودار به دست آمده است،

یعنی بر نیمساز ربع اول و، بنابراین، باید در شرط $y = x = y_1$ صدق کنند.

معادله $y = x$ را حل می‌کنیم:

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = x$$

$$x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}}$$

و به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، به ازای $0 < a < \frac{1}{4}$ ، هر دو ریشه حقیقی‌اند و در معادله مفروض صدق می‌کنند.

راه حل دوم. این معادله را با روش عادی، یعنی گویا کردن معادله هم می‌توان حل کرد:

$$\left(x^2 + 2ax + a + \frac{1}{16}\right)^2 = a^2 + x - \frac{1}{16}$$

آن را نسبت به x منظم می‌کنیم:

$$x^4 + 4ax^3 + \left(4a^2 + 2a + \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(4a^2 + \frac{1}{4}a - 1\right)x + \frac{a}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} = 0$$

که با اندکی دقت، می‌توان عبارت سمت چپ را تجزیه کرد:

$$\begin{aligned} & \left[x^4 + (2a-1)x^2 + \frac{1}{16}x^2 \right] + \left[(2a+1)x^2 + (4a^2-1)x^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{16}\right)x \right] + \left[\left(2a + \frac{17}{16}\right)x^2 + \left(4a^2 + \frac{a}{8} - \frac{17}{16}\right)x + \right. \\ & \left. + \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2}\right) \right] = \left[x^2 + (2a-1)x + \frac{1}{16} \right] \times \\ & \times \left[x^2 + (2a+1)x + \left(2a + \frac{17}{16}\right) \right] \end{aligned}$$

کنون به سادگی ریشه‌های معادله به دست می‌آیند:

$$x^2 + (2a+1)x + \frac{1}{16} = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}};$$

$$x^2 + (2a+1)x + 2a + \frac{17}{16} = 0$$

$$x_{3,4} = -\frac{1+2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+2a}{2}\right)^2 - 2a - \frac{17}{16}}$$

که به ازای $0 < a < \frac{1}{4}$ دو ریشه x_1 و x_2 حقیقی اند و در معادله اصلی صدق

می‌کنند، ولی دو ریشه x_3 و x_4 موهومی اند.

۰۲۴۱. برای این که، عبارت سمت چپ برابری، وقتی x حقیقی است،

مقداری حقیقی باشد، باید همه رادیکال‌ها مثبت باشند. رادیکال‌ها را، به ترتیب،

با آغاز از آخرین رادیکال، برابر $y_1^2, y_2^2, \dots, y_{n-1}^2, y_n^2$ می‌نامیم.

داریم:

$$3x = x + 2x = y_1^2$$

$$x + 2y_1 = y_2^2$$

$$x + 2y_2 = y_3^2$$

$$\dots$$

$$x + 2y_{n-2} = y_{n-1}^2$$

$$x + 2y_{n-1} = y_n^2$$

که در آن‌ها همه عددهای $y_1, y_2, \dots, y_n$ حقیقی و مثبت اند. معادله به این صورت درمی‌آید:

$$y_n = x$$

ثابت می‌کنیم $y_1 = x$. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و ابتدا $x > y_1$

می‌گیریم. مقایسه دو برابری اول و دوم در (*) نشان می‌دهد که، در این

حالت، $y_1 > y_2$ ، به همین ترتیب با مقایسه دو برابری دوم و سوم، به دست

می‌آید $y_2 > y_3$ تا آخر، یعنی

$$x > y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_{n-1} > y_n$$

ولی نتیجه $x > y_n$ با شرط $x = y_n$ متناقض است.

با همین روش معلوم می‌شود که فرض $x < y_1$ هم متناقض با $x = y_n$ می‌شود.

چون $y_1^2 = 3x$ ، بنابراین $x^2 = 3x$ که از آن جا به دست می‌آید:

$$x_1 = 3, x_2 = 0$$

آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که هر دو مقدار در معادله صدق می‌کنند. یادداشت. راه حل دیگری هم، برای این معادله، وجود دارد. معادله را این طور می‌نویسیم:

$$x = \underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\dots+2\sqrt{x+2x}}}}_{n \text{ رادیکال}} \quad (**)$$

به جای x در زیر آخرین رادیکال (آن جا که $x+2x$ قرار دارد)، خود عبارت سمت راست برابری بالا را قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$x = \underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\dots+2\sqrt{x+2x}}}}_{2n \text{ رادیکال}}$$

دوباره به جای x در آخرین رادیکال، مقدار آن را از $(**)$ قرار می‌دهیم و غیره. بنابراین، تعداد رادیکال‌ها، به ترتیب، برابر $3n, 4n, 5n, \dots$ می‌شود و می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\dots}}} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\dots+2\sqrt{x+2x}}}}_{N \text{ رادیکال}} \quad (***) \end{aligned}$$

از این جا به سادگی نتیجه می‌شود:

$$x = \sqrt{x + 2 \left[\sqrt{x + 2 \sqrt{x + 2 \sqrt{x + \dots}}} \right]} = \sqrt{x + 2x} = \sqrt{3x}$$

در نتیجه، به همان معادله $x = \sqrt{3x}$ و جواب‌های $x_1 = 3$ و $x_2 = 0$ می‌رسیم.
۲۴۲. کسر سمت چپ برابری را، پشت سرهم، ساده می‌کنیم:

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}; \quad 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1};$$

$$1 + \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1}; \dots$$

و سرانجام، به معادله‌ای به این صورت می‌رسیم:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x$$

که در آن a و b و c و d عددهایی درست و هنوز نامعلوم‌اند. از آن جا که، این معادله، به یک معادله درجه دوم منجر می‌شود، معادله اصلی نمی‌تواند بیش از دو ریشه متمایز داشته باشد (این معادله نمی‌تواند به اتحاد تبدیل شود، زیرا مثلاً $x=0$ در آن صادق نمی‌کند).

مدعی می‌شویم که $x = 1 + \frac{1}{x}$. در واقع، اگر از آخر (پایین‌ترین

مقدار $1 + \frac{1}{x}$) آغاز کنیم و، به ترتیب، به جای $1 + \frac{1}{x}$ ، مقدار x را قرار دهیم،

سرانجام به برابری $x = x$ می‌رسیم.

به این ترتیب، معادله مفروض، هم‌ارز است با معادله

$$1 + \frac{1}{x} = x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

که دارای دو ریشه $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ است و هر دو در

معادله اصلی صدق می‌کنند. معادله ریشه دیگری ندارد.

یادداشت. راه حل دیگری هم برای مسأله وجود دارد (یادداشت مسأله ۲۴۱ را ببینید) اگر به جای x ، در کسر مرکب (که در پایین ترین مکان قرار دارد)، مرتباً مقدار آن را از معادله قرار دهیم، سرانجام به این نتیجه می‌رسیم:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = 1 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots + 1 + \frac{1}{N}}}}}} \quad (*)$$

به تعداد N خط کسری

(در عبارت بلافاصله بعد از علامت تساوی اول، با یک کسر مسلسل نامتناهی سروکار داریم). از این جا، می‌توان نتیجه گرفت:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = 1 + \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \right]} = 1 + \frac{1}{x} \quad (**)$$

هر دو راه حل نشان می‌دهند که، ریشه‌های معادله، بستگی به n ندارد.

$$x+3-4\sqrt{x-1}=x-1-4\sqrt{x-1}+4=(\sqrt{x-1}-2)^2;$$

$$x+8-6\sqrt{x-1}=x-1-6\sqrt{x-1}+9=(\sqrt{x-1}-3)^2$$

بنابراین، معادله مفروض به این صورت درمی آید:

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1$$

همه حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم:

۱. اگر $\sqrt{x-1}-2 \geq 0$ و $\sqrt{x-1}-3 \geq 0$ ، یعنی اگر

$\sqrt{x-1} \geq 3$ ، آن وقت $x \geq 10$ در این حالت، معادله مفروض چنین می‌شود:

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1;$$

$$2\sqrt{x-1}=6; x-1=9; x=10$$

۲. اگر $\sqrt{x-1}-2 \geq 0$ و $\sqrt{x-1}-3 \leq 0$ ، یعنی

$$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3; 4 \leq x-1 \leq 9; 5 \leq x \leq 10$$

و معادله به این صورت درمی آید:

$$\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1$$

که يك اتحاد است، یعنی همه مقادارهای x ، با شرط $5 \leq x \leq 10$ در معادله صدق می‌کنند.

۳. اگر $\sqrt{x-1}-2 \leq 0$ و $\sqrt{x-1}-3 \leq 0$ ، یعنی $\sqrt{x-1} \leq 2$

و $x \leq 5$ در این حالت، معادله مفروض، چنین می‌شود:

$$-\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1;$$

$$2\sqrt{x-1}=4; x-1=4; x=5$$

۴. روشن است که حالت $\sqrt{x-1}-2 \leq 0$ و $\sqrt{x-1}-3 \geq 0$

ممکن نیست.

به این ترتیب، معادله مفروض دارای بی نهایت جواب برای x است، به شرطی که x در نابرابری‌های $10 \leq x \leq 5$ صدق کند.

۲۴۴. همه حالت‌های ممکن را در نظر می‌گیریم.

۱. $x \geq 20$. در این حالت، همه عبارت‌هایی که در داخل قدر مطلق قرار دارند، مثبت می‌شوند و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$x + 1 - x + 3(x - 1) - 2(x - 2) = x + 2$$

که در واقع، یک اتحاد است. بنابراین، هر عددی که از ۲ کوچکتر نباشد، ریشه معادله است.

۲. $10 < x < 20$. در این حالت $x - 2 < 0$ و بقیه عبارت‌های داخل قدر مطلق‌ها مثبت‌اند و معادله مفروض چنین می‌شود:

$$x + 1 - x + 3(x - 1) + 2(x - 2) = x + 2$$

و از آن به دست می‌آید $x = 2$ و چون عدد ۲ در بازه $10 < x < 20$ نیست، بنابراین معادله مفروض، ریشه‌ای در این بازه ندارد.

۳. $0 \leq x < 10$. در این حالت معادله مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$x + 1 - x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = x + 2$$

که از آن به دست می‌آید $x = -1$ ، ولی این عدد در بازه $0 \leq x < 10$ قرار ندارد، بنابراین معادله مفروض در بازه $0 \leq x < 10$ هم بدون جواب است.

۴. $-1 \leq x < 0$. معادله چنین می‌شود:

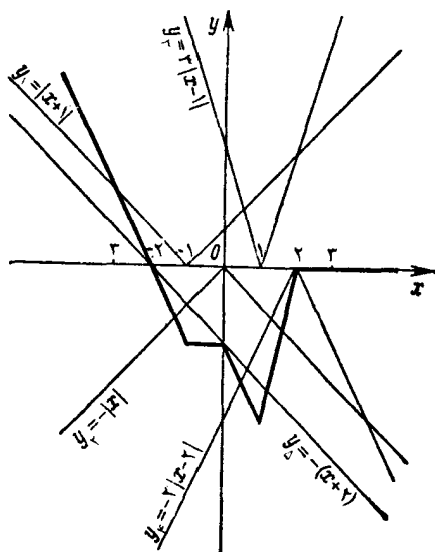
$$x + 1 + x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = x + 2$$

که غیرممکن است. در بازه $-1 \leq x < 0$ ، ریشه‌ای برای معادله وجود ندارد.

۵. $x < -1$. معادله به این صورت درمی‌آید:

$$-(x + 1) + x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = x + 2$$

که از آنجا به دست می‌آید $x = -2$. یکی از ریشه‌های معادله است.



شکل ۲۸

به این ترتیب، ریشه‌های معادله مفروض عبارتند از -۲ و همه عددهای بزرگتر یا برابر ۲ .
یادداشت. اگر نمودار تابع

$$y = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| - (x+2)$$

را رسم کنیم، می‌توان همه نتیجه‌های حاصل را، روی شکل مشاهده کرد. در شکل ۲۸، نمودار تابع‌های $y_1 = |x+1|$ ، $y_2 = -|x|$ ، $y_3 = 3|x-1|$ ، $y_4 = -2|x-2|$ و $y_5 = -(x+2)$ را با خط‌های نازکتر و نمودار تابع

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

را با خط‌های کلفت‌تر نشان داده‌ایم (در این جا، از «جمع» نمودارها استفاده کرده‌ایم). همان‌طور که در شکل می‌بینیم، مقدار y در نقطه $x = -۲$ و در بازه $x \geq ۲$ ، برابر صفر می‌شود.

۲۴۵. عبارت سمت چپ برابری را، در این معادله، که از درجه n است، با $f_n(x)$ نشان می‌دهیم. روشن است که $f_1(x) = 0$ به صورت $1 - x = 0$ درمی‌آید که ریشه آن $x = 1$ است. معادله $f_2(x) = 0$ به صورت $x(x-1) - 2x + 2 = 0$ درمی‌آید که دارای دو ریشه است: $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$. ثابت می‌کنیم، معادله $f_n(x) = 0$ دارای n ریشه است:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots, x_{n-1} = n-1, x_n = n \quad (*)$$

از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، حکم برای $f_n(x) = 0$ درست باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای $f_{n+1}(x) = 0$ هم درست است؛ یعنی معادله $f_{n+1}(x) = 0$ علاوه بر ریشه‌های $(*)$ ، دارای ریشه $x_{n+1} = n+1$ نیز می‌باشد. داریم:

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + (-1)^{n+1} \times \frac{x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)(x-n)}{(n+1)!}$$

روشن است که اگر مقدارهای $(*)$ ، ریشه‌های معادله $f_n(x) = 0$ باشند، همین عددها در معادله $f_{n+1}(x) = 0$ هم صدق می‌کنند. اکنون، برای محاسبه $f_{n+1}(n+1)$ ، با توجه به دستور بسط دوجمله‌ای، داریم:

$$0 = (1-1)^{n+1} = 1 - \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1 \times 2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \times 2 \times 3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n(n-1) \dots \times 2 \times 1}{(n+1)!} = f_{n+1}(n+1)$$

یعنی $n+1$ هم در معادله $f_{n+1}(n+1) = 0$ صدق می‌کند.

۲۴۶. بخش کسری عدد x را با $\{x\}$ نشان می‌دهیم:

$$\{x\} = x - [x] \quad (\text{صفحه‌های ۴۵ و ۴۶ را ببینید})$$

روشن است که $0 \leq \{x\} < 1$ و $[x] = x - \{x\}$. بنابراین، معادله مفروض را می‌توان این طور نوشت:

$$x^3 - x = 3 - \{x\}$$

که از آن جا به دست می‌آید: $2 < x^3 - x \leq 3$

برای $x \geq 2$ داریم: $x^3 - x = x(x^2 - 1) \geq 2(4 - 1) > 3$ ، یعنی $x^3 - x = x(x^2 - 1) < 0 < 2$ و $x^2 - 1 > 0$ ، برای $x < -1$ داریم: $x^3 - x = x(x^2 - 1) < 0 < 2$ ، یعنی $x^3 - x = 0 < 2$ ، برای $x = -1$ داریم: $x^3 - x = 0 < 2$ ، برای $-1 < x \leq 0$ داریم: $x^3 - x \leq -x < 1$ ، یعنی $x^3 - x \leq -x < 1$ ، برای $0 < x \leq 1$ داریم: $x^3 - x < x^3 \leq 1$ ، یعنی $x^3 - x < x^3 \leq 1$ ، یعنی $x > 1$ به این ترتیب $1 < x < 2$ ، یعنی $[x] = 1$ و معادله مفروض، چنین می‌شود:

$$x^3 - 1 = 3 \iff x^3 = 4 \iff x = \sqrt[3]{4}$$

۲۴۷. از معادله اول دستگاه، بلافاصله به دست می‌آید:

$$y^2 = x^2, y = \pm x$$

که اگر در معادله دوم دستگاه، به جای y^2 قرار دهیم، به این معادله می‌رسیم:

$$(x - a)^2 + x^2 = 1 \quad (*)$$

و این، معادله‌ای است از درجه دوم و، در حالت کلی، برای x دو جواب می‌دهد. چون برای هر مقدار x ، دو مقدار برای y به دست می‌آید، پس تعداد جواب‌های دستگاه، در حالت کلی، برابر ۴ است.

وقتی دستگاه دارای سه جواب می‌شود که یکی از جواب‌های x برابر صفر شود. اگر در معادله $(*)$ ، $x = 0$ قرار دهیم، به دست می‌آید: $a = \pm 1$. وقتی دستگاه تنها دو جواب پیدا می‌کند که معادله $(*)$ تنها یک ریشه

داشته باشد. اگر معادله $(*)$ را منظم کنیم

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

و مبین آن را برابر صفر قرار دهیم، به دست می‌آید $a = \pm \sqrt{2}$.

دستگاه به ازای $a = \pm 1$ سه جواب و به ازای $a = \pm \sqrt{2}$ دو جواب

دارد.

۰۲۴۸ الف) با حل دستگاه به دست می‌آید:

$$x = \frac{a^3 - 1}{a^2 - 1}, y = \frac{-a^2 + a}{a^2 - 1}$$

اگر $a \neq \pm 1$ ، آن وقت دستگاه، يك جواب منحصر دارد

$$x = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}, y = -\frac{a}{a + 1}$$

در حالت‌های $a = 1$ و $a = -1$ ، دستورهای بالا برای x و y بی‌معنی می‌شوند. به ازای $a = -1$ ، دستگاه اصلی، به صورت این دو معادله درمی‌آید:

$$y - x = 1, x - y = 1$$

که جواب ندارد؛ در حالت $a = 1$ ، دو معادله دستگاه، برهم منطبق می‌شوند.

$$x + y = 1, x + y = 1$$

که دارای بی‌نهایت جواب است: $x = t, y = 1 - t, (t \in \mathbf{R})$.

ب) از حل دستگاه به دست می‌آید:

$$x = \frac{a^3 - 1}{a^2 - 1}, y = \frac{-a^2 + a}{a^2 - 1}$$

دستگاه، به ازای $a \neq \pm 1$ دارای يك جواب منحصر است:

$$x = a^2 + 1, y = -a$$

به ازای $a = -1$ و $a = 1$ ، به ترتیب، به این دو دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

که در هر دو حالت، دستگاه مفروض بی‌نهایت جواب دارد.

ج) از دو معادله اول و دوم دستگاه، به دست می‌آید:

$$y+z=1-ax, ay+z=a-x$$

اگر این دو معادله را، به عنوان دستگاهی شامل دو مجهول y و z ، در نظر بگیریم، به دست می‌آید:

$$y = \frac{(a-1)(1+x)}{a-1}, z = \frac{-x(a^2-1)}{a-1}$$

بنابراین، با شرط $a \neq 1$ داریم: $y = 1+x$ ، $z = -(1+a)x$. این مقادیرهای y و z را در معادله سوم دستگاه قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$x + (1+x) - a(1+a)x = a^2, -x(a+2)(a-1) = a^2 - 1$$

به این ترتیب، برای $a \neq 1$ و $a \neq -2$ ، جواب منحصر به فرد دستگاه چنین است:

$$x = -\frac{a^2-1}{(a+2)(a-1)} = -\frac{a+1}{a+2},$$

$$y = 1+x = \frac{1}{a+2}, z = -(a+1)x = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$

در حالت‌های $a = 1$ و $a = -2$ ، به ترتیب، به این دو دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=4 \end{cases}$$

دستگاه اول دارای بی‌نهایت جواب است و، دستگاه دوم، جواب ندارد (مجموع دو معادله اول دستگاه، به صورت $-x-y+2z=-1$ در می‌آید که با معادله سوم دستگاه متناقض است).

۲۴۹. معادله دوم را از معادله اول و معادله ششم را از معادله

پنجم کم می‌کنیم، با مقایسه معادله‌های حاصل، به دست می‌آید:

$$(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3) = 0$$

شامل $C(n, m)$ معادله با n مجهول $(n > m + 1)$ ، در یکی از دو حالت زیر جواب دارد:

$$\alpha_n = \beta \text{ و } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = \alpha^{\circ 1}$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{\alpha^n}{n}, \quad x_n = \alpha^{n-1} \left(\beta - \frac{n-1}{n} \alpha \right)$$

۰۲ در دنباله $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ، تعداد $n - m + 1$ عدد (یا بیشتر)

برابر صفر باشند. در این حالت $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

۰۲۵۰ از معادله اول دستگاه داریم: $x = 2 - y$ که اگر در معادله

دوم دستگاه قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$2y - y^2 - z^2 = 1$$

این معادله را می‌توان این‌طور نوشت.

$$z^2 + (y - 1)^2 = 0$$

و این برابری تنها وقتی، برای عددهای حقیقی y و z برقرار است که داشته باشیم:

$$z = 0, \quad y - 1 = 0$$

از آن جا $z = 0$ ، $y = 1$ و $x = 1$ به دست می‌آید. دستگاه تنها یک جواب حقیقی دارد.

۰۲۵۱ اگر $x^4 + y^4 = 1$ ، آن وقت یا $x^4 = 1$ و $y^4 = 0$ و یا

$x^4 = 0$ و $y^4 = 1$ ، و اگر $0 < x^4, y^4 < 1$ ، آن وقت $|x| < 1$ و $|y| < 1$ و از آن جا

$$x^4 = |x^4| = |x^3| \cdot |x| < |x^3|, \quad y^4 < |y^3|,$$

$$|x^3| + |y^3| > x^4 + y^4 = 1$$

از این جا معلوم می‌شود که x و y هم علامت نیستند. در حالتی هم که x و y علامت‌های مختلف داشته باشند، باز هم دستگاه جواب ندارد، زیرا با شرط

$$|x| < 1 \text{ و } |y| < 1 \text{ داریم:}$$

$$x^3 + y^3 \leq |x^3 + y^3| < \max(|x^3|, |y^3|) < 1$$

به این ترتیب، دستگاه، تنها برای $x = \pm 1$ ، $y = 0$ یا برای $x = 0$ ، $y = \pm 1$ جواب دارد. با آزمایش معلوم می‌شود که از این چهارزوج، تنها دو زوج در دستگاه صدق می‌کنند

$$x = 1, y = 0 \text{ و } x = 0, y = 1$$

۲۵۲. يك گروه از جواب‌ها روشن است:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, x = \text{عددی دلخواه}$$

بنابراین، از این جا به بعد، فرض را بر این می‌گذاریم که، دست کم یکی از عددهای x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 مخالف صفر باشد. از دو معادله اول و آخر دستگاه به دست می‌آید:

$$x_3 = xx_2 - x_1 \text{ و } x_5 = xx_1 - x_2 \quad (*)$$

به همین ترتیب از معادله‌های دوم و چهارم دستگاه

$$x_4 = xx_3 - x_2 \text{ و } x_5 = xx_5 - x_1 \quad (**)$$

x_5 و x_3 را از $(*)$ ، در $(**)$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$x_4 = (x^2 - 1)x_2 - xx_1 \text{ و } x_4 = (x^2 - 1)x_1 - xx_2 \quad (***)$$

و اگر دو مقداری را که برای x_4 به دست آمده است، برابر قرار دهیم؛ پس از تبدیل‌های لازم

$$(x^2 + x - 1)x_1 = (x^2 + x - 1)x_2$$

دو حالت پیش می‌آید: $x^2 - x + 1 \neq 0$ یا $x^2 - x + 1 = 0$

اگر $x^2 - x + 1 \neq 0$ ، آن گاه $x_1 = x_2$. چون دستگاه نسبت به مجهول‌های $x_1, \dots, x_5$ متقارن است، می‌توان روشن کرد که در این حالت $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ ، یعنی $x_4 = x_5$ و $x_3 = x_4$ ؛ و اگر

به یکی از معادله‌های دستگاه مراجعه کنیم، $x = 2$ به دست می‌آید.

اگر $x^2 + x - 1 = 0$ (یعنی $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$)، دستگاه (***)

به این معادله منجر می‌شود:

$$x_4 = -x(x_2 + x_1)$$

در این حالت، با انتخاب x_1 و x_2 دلخواه، می‌توان $x_3 = xx_2 - x_1$ و $x_4 = -x(x_1 + x_2)$ و $x_5 = xx_1 - x_2$ را محاسبه کرد.

پاسخ. ۱) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ و x عددی دلخواه؛

۲) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$ و $x = 2$ ؛

۳) x_1 و x_2 دلخواه، $x_3 = xx_2 - x_1$ ، $x_4 = -x(x_1 + x_2)$ ،

$$x_5 = xx_1 - x_2 \text{ و } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

۲۵۳. x, y, z و t را چهار عدد مورد نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$xyzt = A$ روشن است که $A \neq 0$ ، زیرا اگر مثلاً داشته باشیم $x = 0$ آن وقت با توجه به شرط مسأله به دست می‌آید:

$$y = z = t = 2 \text{ و } yzt = 2$$

که ممکن نیست. معادله $x + yzt = 2$ را می‌توان این طور نوشت:

$$x + \frac{A}{x} = 2 \text{ یا } x^2 - 2x + A = 0$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$t^2 - 2t + A = 0, \quad z^2 - 2z + A = 0, \quad y^2 - 2y + A = 0$$

معادله به صورت $u^2 - 2u + A = 0$ ، برای مقدار مشخص A ، نمی‌تواند بیش از دو ریشه متمایز داشته باشد، بنابراین در بین عددهای x, y, z و t بیش از دو عدد متفاوت وجود ندارد. حالت‌های ممکن را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱. $x = y = z = t$. با توجه به شرط مسأله به دست می‌آید:

$$x + x^3 = 2, \quad x^3 + x - 2 = 0, \quad (x-1)(x^2 + x + 2) = 0$$

از آن جا $x_1 = 1$ و $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$ ، و اگر تنها به ریشه‌های حقیقی

کار داشته باشیم: $x = y = z = t = 1$.

۲. $x = y = z \neq t$. از شرط مسأله به دست می‌آید:

$$x + x^2 t = 2 \quad \text{و} \quad t + x^3 = 2 \quad (*)$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$x^3 - x^2 t - x + t = 0 \Rightarrow (x-t)(x^2 - 1) = 0$$

بنابراین یا $x = t$ و یا $x = \pm 1$. برای $x = 1$ از (*) به دست می‌آید $t = 1$ که همان جواب قبلی است در حالت $x = -1$ خواهیم داشت $t = 3$.

۳. $x = y$ و $z = t$. دستگاه معادله‌ها به این صورت در می‌آید:

$$x + xz^2 = 2, \quad z + x^2 z = 2 \quad (**)$$

از تفاضل این دو معادله به دست می‌آید: $(x-z)(1-xz) = 0$. برابری $x = z$ به حالت اول بر می‌گردد. اگر $xz = 1$ ، با توجه به معادله اول (**) داریم: $x + z = 2$ و دوباره به حالت $x = z = 1$ می‌رسیم.

پاسخ: یا هر چهار عدد برابر واحدند و یا سه‌تای آن‌ها برابر ۱- و چهارمی برابر ۳ است.

۲۵۴. با توجه به تقارن دستگاه، اگر فرض کنیم:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad t = x_4; \quad a = a_1, \quad b = a_2, \quad c = a_3, \quad d = a_4$$

می‌توان معادله‌های دستگاه را به این صورت نوشت:

$$\sum_{j=1}^4 |a_i - a_j| x_j = 1, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (*)$$

در ضمن، برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ در این صورت

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 = 1 \\ (a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 = 1 \quad (**) \\ (a_1 - a_3)x_1 + (a_2 - a_3)x_2 + (a_3 - a_4)x_4 = 1 \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1 \end{cases}$$

در این دستگاه، معادله دوم را از معادله اول، معادله سوم را از معادله دوم و معادله چهارم را از معادله سوم کم می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0 \\ (a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0 \\ (a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0 \end{cases}$$

عدهای a_1, a_2, a_3 و a_4 دوه‌دو متمایزند، بنابراین باید داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 + x_3 + x_4, \quad x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \quad x_1 + x_2 + x_3 = x_4$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 = x_4$$

که مثلاً از معادله آخر (***) نتیجه می‌شود: $x_1 = \frac{1}{a_1 - a_4}$. آزمایش

مستقیم نشان می‌دهد که مقدارهای $x_1 = x_4 = \frac{1}{a_1 - a_4}$ و $x_2 = x_3 = 0$ در همه معادله‌های دستگاه صلیق می‌کنند.

پاسخ: به شرط $a < b < c < d$ داریم: $x = t = \frac{1}{a - d}, y = z = 0$.

۲۵۵. فرض می‌کنیم: $x_2 - x_1 = X_1, x_3 - x_2 = X_2, \dots$

در این صورت $x_1 - x_n = X_n, x_n - x_{n-1} = X_{n-1}$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0$$

ودستگاه مفروض، به این صورت درمی آید:

$$ax_1 + (b-1)x_1 + c = X_1, \quad ax_2 + (b-1)x_2 + c = X_2, \dots$$

$$\dots, \quad ax_n + (b-1)x_n + c = X_n \quad (*)$$

اگر $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$ (مبین هریک از سه جمله‌ای‌های درجه دوم سمت چپ برای‌ها) منفی باشد، به معنای آن است که، هریک از سه جمله‌ای‌ها، به ازای هر مقدار x_i ، علامتی موافق علامت a پیدا می‌کند، یعنی همه مقادیرهای $X_1, X_2, \dots, X_n$ هم علامت می‌شوند و، در نتیجه، نمی‌توانند مجموعی برابر صفر داشته باشند؛ و این، به معنای آن است که، دستگاه، جواب حقیقی ندارد. در حالت $\Delta = 0$ ، معادله‌های دستگاه $(*)$ ، تنها به ازای

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{1-b}{2a}$$

می‌توانند برقرار باشند (زیرا، به ازای سایر مقادیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، عبارت‌های سمت چپ برابری‌ها، مقداری هم علامت با a پیدا می‌کنند). سرانجام، در حالت $\Delta > 0$ ، دستگاه مفروض، حداقل دو جواب پیدا می‌کند:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_1^*, \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_2^*$$

$$x_{1,2}^* = \frac{1-b \pm \sqrt{(1-b)^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{که در آن}$$

۲۵۶. مسأله را در حالت‌های ممکن، به طور جداگانه، حل می‌کنیم.

۱°. n ، عددی زوج است. معادله‌های ردیف فرد (اول، سوم، پنجم،

$\dots$ ، $n-1$ ام) را درهم و معادله‌های ردیف زوج (دوم، چهارم، $\dots$ ، n ام)

را درهم ضرب می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}, \quad x_1 x_2 x_3 \dots x_n = a_2 a_4 a_6 \dots a_n$$

روشن است که در حالت $a_1 a_3 \dots a_{n-1} \neq a_2 a_4 \dots a_n$ ، دستگاه جواب ندارد.

فرض می‌کنیم: $a_1 a_3 \dots a_{n-1} = a_2 a_4 \dots a_n$. اگر x_1 را عددی دلخواه (و البته مخالف صفر) بگیریم، از معادله‌های اول، دوم، ...، $(n-1)$ ام دستگاه به‌دست می‌آید:

$$x_2 = \frac{a_1}{x_1}, \quad x_3 = \frac{a_2}{x_2}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}$$

و اگر این مقدارها را در معادله n ام دستگاه قرار دهیم، روشن می‌شود که در آن صدق می‌کنند.

۲. n ، عددی فرد است. اگر معادله‌های اول، سوم، ...، n ام را درهم و، سپس، بقیه معادله‌ها را درهم ضرب کنیم، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$x_1^2 = \frac{a_1 a_3 a_5 \dots a_n}{a_2 a_4 \dots a_{n-1}} \Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{\frac{a_1 a_3 \dots a_n}{a_2 a_4 \dots a_{n-1}}} \quad (*)$$

(به‌یاد بیاوریم که همه a_i ها، مثبت‌اند). سپس، از $(n-1)$ معادله اول دستگاه خواهیم داشت:

$$x_2 = \frac{a_1}{x_1}, \quad x_3 = \frac{a_2}{x_2}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}$$

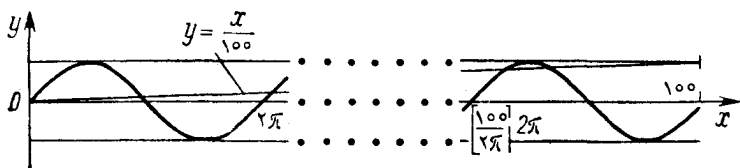
و با آزمایش مستقیم معلوم شود که این مقدارها، در معادله آخر دستگاه صدق می‌کنند.

پاسخ: اگر n زوج باشد و داشته باشیم: $a_1 a_3 \dots a_{n-1} \neq a_2 a_4 \dots a_n$ دستگاه جواب حقیقی ندارد.

اگر n زوج باشد و $a_1 a_3 \dots a_{n-1} = a_2 a_4 \dots a_n$ ، دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است.

اگر n فرد باشد، دستگاه دارای دو جواب است.

۲۵۷. الف) قبل از هر چیز توجه می‌کنیم که، اگر x ریشه‌ای از معادله باشد، $-x$ هم ریشه دیگری از آن است؛ بنابراین، تعداد ریشه‌های مثبت معادله، برابر است با تعداد ریشه‌های منفی آن. به‌جزاین، صفر هم در



شکل ۲۹

معادله صدق می‌کند. به این ترتیب، کافی است، تعداد ریشه‌های مثبت معادله

را پیدا کنیم. از برابری $\frac{x}{100} = \sin x$ به دست می‌آید:

$$|x| = 100 |\sin x| \leq 100 \times 1 = 100$$

یعنی، قدر مطلق هر ریشه‌ای از معادله، از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند.

محور Ox را در بازه $[0, 100]$ ، به بازهای به طول 2π تقسیم می‌کنیم (بازه آخر ممکن است، طول کمتری داشته باشد) و تعداد ریشه‌های معادله را در هر یک از این بازها پیدا می‌کنیم (شکل ۲۹).

در بازه $[0, 2\pi]$ ، تنها یک ریشه مثبت وجود دارد (و همچنین ریشه $x=0$). هر کدام از بازهای بعدی، به جز آخرین بازه، شامل دور ریشه است. برای پیدا کردن تعداد ریشه‌هایی که در آخرین بازه واقع‌اند، ابتدا طول این

بازه را ارزیابی می‌کنیم. روشن است که عدد $\frac{100}{2\pi}$ بین دو عدد ۱۵ و ۱۶

قرار دارد (چون $2\pi < \frac{100}{15} = 6.66... < \frac{100}{16} = 6.25$)،

یعنی تعداد بازه‌هایی که طولی برابر 2π دارند، برابر است با ۱۵، و یک بازه در آخر که ممکن است طول آن از 2π کمتر باشد. برای طول این آخرین بازه داریم:

$$100 - 15 \times 2\pi > 0 > \pi$$

یعنی طول پاره خط راستی از محور Ox که متناظر با نیم موج سینوسی واقع

در بالای محور x هاست، از طول آخرین بازه کوچکتر است و از این جا نتیجه می‌شود که، در این بازه هم، دوریشه معادله وجود دارد.

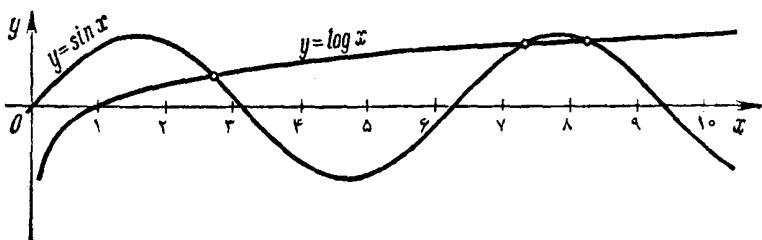
به این ترتیب، تعداد ریشه‌های مثبت معادله، برابر می‌شود با

$$1 + 14 \times 2 + 2 = 31$$

و اگر ریشه‌های منفی و ریشه صفر را هم به حساب آوریم، تعداد ریشه‌های حقیقی معادله، برابر ۶۳ می‌شود.

ب) راه حل این مساله، شبیه راه حل مساله الف) است. روشن است که، اگر $\sin x = \log x$ ، آن وقت $x \leq 10$ (زیرا، به ازای $x > 10$ ؛ مقدار سمت راست برابری از واحد بزرگتر می‌شود). چون $2 \times 2\pi > 10$ ، بنابراین بازه $[0, 10]$ از محور x ها، تنها شامل یک موج از منحنی $y = \sin x$ و یک نیم موج از تناوب دوم خواهد بود (شکل ۳۰). روشن است که نمودار تابع $y = \log x$ ، نیم موج اول نمودار تابع $y = \sin x$ را (در بالای محور x ها) در یک نقطه قطع می‌کند؛ و چون $2\pi + \frac{\pi}{2} < 10$ ، برای $x = \frac{5\pi}{2}$ داریم:

$\log x > \sin x = 1$ ، یعنی نمودار تابع $y = \log x$ ، تناوب دوم نمودار تابع $y = \sin x$ را قطع می‌کند. از طرف دیگر، چون در نقطه $x = 10$ داریم: $\log x > \sin x$ ؛ نمودار تابع $y = \log x$ باید نیمه دوم نیم موج اول تناوب دوم را قطع کند. به این ترتیب، معادله $\sin x = \log x$ دارای سه ریشه است.



شکل ۳۰

۲۵۸. اگر همه این نابرابری‌ها را باهم جمع کنیم، در سمت چپ، مجموعی از عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ به دست می‌آید که ضریب هر کدام از آن‌ها برابر $3 + (-4) + 1$ ، یعنی صفر است. بنابراین دستگاه نابرابری‌های مفروض، باید به این صورت باشد:

$$a_1 - 4a_2 + 3a_3 = 0, \quad a_2 - 4a_3 + 3a_4 = 0, \quad \dots$$

$$\dots, \quad a_{100} - 4a_1 + 3a_2 = 0$$

که می‌توان آن‌ها را، این طور نوشت:

$$a_1 - a_2 = 3(a_2 - a_3), \quad a_2 - a_3 = 3(a_3 - a_4), \quad \dots$$

$$\dots, \quad a_{99} - a_{100} = 3(a_{100} - a_1), \quad a_{100} - a_1 = 3(a_1 - a_2)$$

و از آن جا نتیجه می‌شود:

$$a_1 - a_2 = 3(a_2 - a_3) = 3^2(a_3 - a_4) = 3^2(a_4 - a_5) = \dots$$

$$\dots = 3^{99}(a_{100} - a_1) = 3^{100}(a_1 - a_2)$$

و برابری $a_1 - a_2 = 3^{100}(a_1 - a_2)$ تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a_1 - a_2 = 0. \quad \text{و از آن جا}$$

$$a_2 - a_3 = \frac{1}{3}(a_1 - a_2) = 0, \quad a_3 - a_4 = \frac{1}{3}(a_2 - a_3) = 0, \quad \dots$$

$$\dots, \quad a_{100} - a_1 = \frac{1}{3}(a_{99} - a_{100}) = 0$$

یعنی همه عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}$ باهم برابرند و، اگر $a = 1$ آن وقت

$$a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_{99} = a_{100} = 1$$

۲۵۹. نابرابری‌های مفروض را به این صورت

می‌نویسیم:

$$\begin{cases} A = a - b + c + d > 0 \\ B = ab - ac - ad - bc - bd + cd > 0 \\ C = abc + abd - acd - bcd > 0 \end{cases} \quad (*)$$

این معادله را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a)(x-b)(x+c)(x+d) = \\ &= x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + abcd = 0 \end{aligned}$$

همه ضریب‌های این معادله مثبت‌اند (باتوجه به نابرابری‌های $(*)$ و باتوجه به مثبت بودن عددهای a, b, c, d). بنابراین، این معادله، ریشه مثبت ندارد (به‌ازای $x > 0$ خواهیم داشت: $P(x) > 0$). از طرف دیگر معادله $P(x) = 0$ دارای دو ریشه مثبت $x = a$ و $x = b$ است. تناقض حاصل، درستی حکم مساله را تایید می‌کند.

داده حل دوم.. از دونا برابری اول نتیجه می‌شود:

$$(a+b)^2(c+d) < (c+d)(ab+cd)$$

یعنی:

$$(a+b)^2 < ab+cd \quad (*)$$

به‌همین ترتیب، از دونا برابری آخر، به‌دست می‌آید:

$$(a+b)^2 cd < (ab+cd)ab \quad (**)$$

چون $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$ ، بنابراین $(a+b)^2 \geq 4ab$ و از نابرابری‌های $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود:

$$4ab < ab+cd \text{ و } 4abcd < (ab+cd)ab$$

یعنی $cd > 3ab$ و $4cd < ab+cd$ که به معنای $ab > 3ad$ است؛ و این ممکن نیست، زیرا دو نابرابری $cd > 3ab$ و $cd < \frac{1}{3}ab$ نمی‌توانند باهم برقرار باشند.

۲۶۰. روشن است که

$$\begin{aligned} & \underbrace{(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}})}}_{n \text{ رادیکال}} \underbrace{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}})}}_{n \text{ رادیکال}} = \\ & = 2^2 - \underbrace{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}})}_{n-1 \text{ رادیکال}} = 2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ رادیکال}} \end{aligned}$$

بنابراین کسر مفروض، برابر است با عکس عبارت

$$R_n = 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ رادیکال}}$$

به این ترتیب، کافی است ثابت کنیم: $R_n < 4$. اثبات را با استقرای ریاضی می‌دهیم. روشن است که $R_1 = 2 < 4$. در ضمن اگر $R_{n-1} < 4$ ، آن وقت

$$R_n = 2 + \sqrt{R_{n-1}} < 2 + \sqrt{4} = 4$$

یادداشت. می‌توان ثابت کرد $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 4$. در واقع، دنباله R_n ،

دارای حد است، زیرا کران‌دار است (به ازای همه مقدارهای n : $R_n < 4$)، در ضمن، دنباله‌ای اکیداً صعودی است ($R_{n-1} < R_n$)، زیرا R_{n+1} را می‌توان از R_n ، با قراردادن مقدار $2 + \sqrt{2}$ به جای ۲، در آخرین رادیکال R_n ، به دست آورد). $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R = r^2$. می‌گیریم؛ با میل n به سمت

بی‌نهایت در برابری

$$R_{n+1} = 2 + \sqrt{R_n}$$

به دست می‌آید: $r^2 = 2 + r$ یا $(2-r)(1+r) = 0$ و از آن جا $r = 2$ (چون $r > 0$). به این ترتیب $R = 4$. از این جا می‌توان نتیجه گرفت که حد

کسر مفروض در این مساله، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، برابر است با $\frac{1}{4}$ ؛ یعنی ارزیابی

این کسر را نمی‌توان از این، دقیق‌تر کرد.

۲۶۱. a ، b و c را، سه عدد مورد نظر می‌گیریم. چون $abc = 1$ ،

پس $c = \frac{1}{ab}$. با توجه به شرط مسأله داریم:

$$a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \quad a + b + \frac{1}{ab} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab \quad (*)$$

نابرابری (*) را، این طور می‌نویسیم:

$$ab - a - b + 1 < \frac{1}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + 1$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$(a-1)(b-1) < \left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right) = \frac{1}{ab}(a-1)(b-1)$$

بنابراین، نابرابری (*)، هم‌ارز است با نابرابری

$$(a-1)(b-1)\left(\frac{1}{ab}-1\right) > 0$$

و از این نابرابری نتیجه می‌شود که از سه عدد $a-1$ ، $b-1$ و

$\frac{1}{ab}-1 = c-1$ ، باید یکی مثبت و دو تا منفی باشند که حکم مسأله را

ثابت می‌کند (روشن است که سه عدد $a-1$ ، $b-1$ و $c-1$ نمی‌توانند

با هم مثبت باشند، زیرا اگر $a > 1$ و $b > 1$ ، آن وقت $c = \frac{1}{ab} < 1$ ، یعنی

$\frac{1}{ab} - 1$ منفی می‌شود).

۲۶۲. عددهای ۱۹۵۹ و ۱۰۰۰ که در این مسأله آمده‌اند، نقش

عمده‌ای ندارند و به تصادف انتخاب شده‌اند. قضیه کلی چنین است:

اگر برای $n, \dots, 2, 1$ و $a_i > 0$ داشته باشیم:

$$\sum a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

آن وقت، مجموع $S_{n,k} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ از همه حاصل ضرب-

های ممکن k عدد ($1 \leq k < n$) از بین عدد مفروض $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، از واحد تجاوز نمی‌کند و برای $k > 1$ ، این مجموع از واحد کوچکتر است.

این قضیه را باروش‌های مختلفی می‌توان ثابت کرد؛ در این جا، از روش استقرای ریاضی (استقرا روی عددهای n و k) استفاده می‌کنیم. درستی قضیه، برای $n=1$ و $n=2$ روشن است. فرض می‌کنیم، قضیه، برای همه مقدارهای n کوچکتر از مقدار مشخص N و، به ازای همان مقدار مشخص N ، برای همه مقدارهای $k \geq 2$ ، که از مقدار ثابت K کوچکترند ($K \geq 2$)، ثابت شده باشد (روشن است که قضیه، برای هر مقدار n و $k=1$ درست است). ثابت می‌کنیم که، در این صورت، قضیه، برای مقدارهای N و K هم درست است.

مجموع $S_{N,K} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_K=1}^n a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_K}$ را در نظر می‌گیریم

و آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} S_{N,K} &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{K-1}=1}^{N-1} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{K-1}} a_N + \\ &+ \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{K-1}=1}^{N-1} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_K} = S_{N-1, K-1} a_N + S_{N-1, K} \end{aligned}$$

که در آن $S_{N-1, K-1}$ و $S_{N-1, K}$ به ترتیب، عبارتند از مجموع همه حاصل ضرب‌های $K-1$ تایی و K تایی از عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$. مجموع این $N-1$ عدد را می‌توان این طور نوشت:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} &= (a_1 + a_2 + \dots \\ &\dots + a_{N-1} + a_N) - a_N = 1 - a_N \end{aligned}$$

اکنون، به جای عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ به ترتیب عددهای $a'_1 = \frac{a_1}{1-a_N}, a'_2 = \frac{a_2}{1-a_N}, \dots, a'_{N-1} = \frac{a_{N-1}}{1-a_N}$ را قرار می‌دهیم. مجموع عددهای جدیدهم، برابر واحد است. مجموع همه حاصل ضربهای ممکن $K-1$ به $K-1$ و K به K از این $N-1$ عدد جدید a'_i ($i=1, 2, \dots, N-1$) را به ترتیب برابر $S'_{N-1, K-1}$ و $S'_{N-1, K}$ می‌گیریم. بنا به فرض استقرا

$$S'_{N-1, K-1} < 1 \text{ و } S'_{N-1, K} < 1$$

از طرف دیگر، چون عددهای a'_i با عددهای a_i ($i=1, 2, \dots, N-1$) متناسب‌اند، داریم:

$$S_{N-1, K-1} = S'_{N-1, K-1} \cdot (1-a_N)^{K-1} \leq (1-a_N)^{K-1},$$

$$S_{N-1, K} = S'_{N-1, K} \cdot (1-a_N)^K < (1-a_N)^K$$

و سرانجام به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} S_{N, K} &= S_{N-1, K-1} a_N + S_{N-1, K} < (1-a_N)^{K-1} \cdot a_N + (1-a_N)^K = \\ &= (1-a_N)^{K-1} [a_N + (1-a_N)] = (1-a_N)^{K-1} < 1 \end{aligned}$$

که اثبات را کامل می‌کند.

۰۲۶۳. به ازای $N=2$ ، برای m و n تنها يك حالت، ممکن است:

$m=1, n=2$. در این حالت، «مجموع» s_2 از کسرهای مورد نظر برابر

است با $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$. به ازای $N=3$ ، برای (m, n) دو جواب به دست

می‌آید، $m=1, n=3$ و $m=2, n=3$. در این حالت، مجموع کسرهای

مورد نظر، برابر است با $s_3 = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2}$. اکنون ثابت می‌کنیم

که مجموع s_N ، برای هر عدد طبیعی $N > 1$ ، برابر است با $\frac{1}{2}$.

از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. قضیه برای $N=2$ و

$N=3$ درست است. فرض می‌کنیم $s_{N-1} = \frac{1}{2}$ و ثابت می‌کنیم که،

در این صورت، $s_N = \frac{1}{2}$. ببینیم چه رابطه‌ای بین s_N و s_{N-1} وجود دارد!

برای پیدا کردن s_N ، از روی s_{N-1} ، باید جمله‌های به صورت $\frac{1}{mn}$ را که، در آن،

$m+n=N$ ، حذف کنیم، یعنی جمله‌های به صورت $\frac{1}{i(N-i)}$ ($1 \leq i < \frac{N}{2}$)

در ضمن، i و $N-i$ نسبت به هم اول اند؛ از طرف دیگر، باید به مجموع

s_{N-1} ، همه کسرهای به صورت $\frac{1}{jN}$ ($1 \leq j < N$) را اضافه کنیم (j و N

نسبت به هم اول اند). برای هر i داریم:

$$\frac{1}{i(N-1)} = \frac{1}{iN} + \frac{1}{(N-i)N}$$

عدهای i و $N-i$ تنها وقتی نسبت به هم اول اند که i و N نسبت به هم اول باشند، یعنی تنها وقتی که دو عدد $N-i$ و N نسبت به یکدیگر اول باشند.

بنابراین، اگر از مجموع s_{N-1} ، کسرهای به صورت $\frac{1}{i(N-i)}$ را حذف کنیم

و، به جای آن، کسرهایی به صورت مجموع $\frac{1}{iN} + \frac{1}{(N-i)N}$ را قرار دهیم،

مجموع s_N به دست می‌آید و، در ضمن، مقدار کل مجموع تغییر نمی‌کند؛ یعنی

$$s_N = s_{N-1} = \frac{1}{2}$$

۲۶۴. ثابت می‌کنیم، هر ۱۹۷۳ عدد مفروض، با هم برابرند. از برهان

خلف استفاده می‌کنیم و مثلاً فرض می‌کنیم $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_i \neq a_{i+1}$.

کافی است نادرستی این فرض را برای $i = 1$ ثابت کنیم، یعنی ثابت کنیم a_1 نمی‌تواند با a_2 برابر نباشد (عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{1973}$ در شرط مساله، به‌صورتی دوری قرار دارند و، بنابراین، فرض اخیر، به‌کلی بودن راه‌حل لطمه‌ای نمی‌زند) و برای روشن بودن وضع $a_1 > a_2$ می‌گیریم (حالت $a_1 < a_2$ را هم باروش مشابه می‌توان مورد بررسی قرارداد).

از برابری‌های شرط مساله، روشن می‌شود که، یا همهٔ عددها از واحد بزرگتر، یا همهٔ آن‌ها از واحد کوچکتر و یا همه برابر واحدند. حالت اخیر (حالتی که همهٔ عددها برابر واحدند)، به‌خودی‌خود حکم موردنظر ما را ثابت می‌کند، بنابراین تنها به دو حالت دیگر می‌پردازیم:

۱. همهٔ عددهای a_k ($k = 1, 2, \dots, 1973$) از واحد بزرگترند.
در این حالت

از برابری $a_1^{a_2} = a_2^{a_3}$ و با فرض $a_1 > a_2$ داریم: $a_2 < a_3$ ؛

از برابری $a_2^{a_3} = a_3^{a_4}$ و با فرض $a_2 < a_3$ داریم: $a_3 > a_4$ ؛

از برابری $a_3^{a_4} = a_4^{a_5}$ و با فرض $a_3 > a_4$ داریم: $a_4 < a_5$ ؛

.....

.....

به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 \dots a_{1972} < a_{1973} > a_1 < a_2$$

که یک تناقض است (نتیجهٔ $a_1 < a_2$ با فرض $a_1 > a_2$ متناقض است). بنابراین، الزاماً باید داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{1973}$$

۲. همهٔ a_k ها از واحد کوچکترند. در این حالت

از $a_1^{a_2} = a_2^{a_3}$ و $a_1 > a_2$ نتیجه می‌شود: $a_2 > a_3$ ؛

از $a_2^{a_3} = a_3^{a_4}$ و $a_2 > a_3$ نتیجه می‌شود: $a_3 > a_4$ ؛

.....

.....

بنابراین

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_{1972} > a_1$$

به تناقض $a_1 > a_1$ می‌رسیم؛ یعنی در این حالت هم، همهٔ عددهای a_k باهم برابرند.

۰۲۶۵. حکم، برای $n=0$ ، $n=1$ و $n=2$ درست است:

$$x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2, \quad x_1 + x_2 = 6,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 36$$

سپس داریم:

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n &= (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1x_2(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = \\ &= 6(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) \end{aligned}$$

که می‌توان آن را، این‌طور نوشت:

$$x_1^n + x_2^n = 5(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + [(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})] \quad (*)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که، اگر $x_1^{n-2} + x_2^{n-2}$ و $x_1^{n-1} + x_2^{n-1}$ عددهایی درست باشند، $x_1^n + x_2^n$ هم عددی درست است.

برای اثبات بخش دوم حکم مسأله، از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم، به ازای یک عدد طبیعی n ، برای نخستین بار، عدد $x_1^n + x_2^n$ مضربی از ۵ باشد و به ازای مقادیرهای کوچکتر از n ، مضرب ۵ نباشد. در این صورت از (*) نتیجه می‌شود که تفاضل $(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$ هم باید مضرب ۵ باشد. اگر در دستور (*)، به جای n ، مقدار $n-1$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} = 5(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) + (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) - (x_1^{n-3} + x_2^{n-3})$$

از این‌جا به دست می‌آید:

$$x_1^{n-3} + x_2^{n-3} = 5(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) - [(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})]$$

یعنی $x_1^{n-3} + x_2^{n-3}$ هم باید مضربی از ۵ باشد. و این، فرض ما را مبنی بر این که $x_1^n + x_2^n$ برای $m < n$ مضربی از ۵ نیست، نقض می‌کند. به این ترتیب، عدد درست و مثبت n وجود ندارد که، به ازای آن، $x_1^n + x_2^n$ مضرب ۵ باشد. به سادگی می‌توان ثابت کرد که، حکم مساله، برای مقادیرهای درست و منفی n هم صادق است. برای $n < 0$ داریم:

$$x_1^n + x_2^n = \frac{1}{x_1^{-n}} + \frac{1}{x_2^{-n}} = \frac{x_1^{-n} + x_2^{-n}}{(x_1 x_2)^{-n}} = x_1^{-n} + x_2^{-n}$$

که عددی درست و بخش‌ناپذیر بر ۵ است ($-n > 0$).

۲۶۶. فرض می‌کنیم، مجموع $a_1 + a_2 + \dots + a_{1000}$ شامل n جمله مثبت و $1000 - n$ جمله منفی باشد. در این صورت، همه حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی جمله‌های مثبت (تعداد این حاصل ضرب‌ها برابر است با $\frac{1}{2}n(n+1)$) و همه حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی $(1000 - n)$ عدد منفی (تعداد این حاصل ضرب‌ها برابر است با $\frac{1}{2}(1000 - n)(1000 - n - 1)$)، مثبت اند، و همه حاصل ضرب‌هایی که شامل یک عامل مثبت و یک عامل منفی اند (تعداد این حاصل ضرب‌ها، برابر است با $n(1000 - n)$)، منفی می‌شوند. بنابراین به شرط مساله باید داشته باشیم:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(1000-n)(1000-n-1)}{2} = n(1000-n)$$

که از آنجا به دست می‌آید:

$$2n^2 - 2000n + \frac{999000}{2} = 0;$$

$$n = \frac{1000 \pm \sqrt{1000000 - 999000}}{2} = 500 \pm 5\sqrt{10}$$

که به روشنی ممکن نیست (n ، عددی است درست و مثبت).

برای حالتی که مجموع ۱۰۰۰۰ جمله را مجذور می‌کنیم، با همان روش، به دست می‌آید:

$$n = \frac{10000 \pm \sqrt{10000}}{2} = \frac{10000 \pm 100}{2}$$

و از این جا نتیجه می‌شود که، در این حالت، حاصل ضرب‌های دوی‌دوی عددهای مختلف، نیمی مثبت و نیمی منفی می‌شوند. برای این منظور، باید بین ۱۰۰۰۰ عددی که مجموع آن‌ها را مجذور می‌کنیم، به تعداد

$$4950 = \frac{10000 - 100}{2} \text{ جمله مثبت و به تعداد } 5050 = \frac{10000 + 100}{2}$$

جمله منفی و یا، برعکس، ۵۰۵۰ جمله منفی و ۴۹۵۰ جمله مثبت وجود داشته باشد.

۰۲۶۷. روشن است که

$$(\sqrt{2} - 1)^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1},$$

$$(\sqrt{2} - 1)^2 = \sqrt{4} - \sqrt{8}$$

اکنون ثابت می‌کنیم، اگر عبارت

$$(\sqrt{2} - 1)^{2k-1} = B\sqrt{2} - A = \sqrt{2B^2} - \sqrt{A^2}$$

را بتوان به صورت $\sqrt{N} - \sqrt{N-1}$ نوشت، یعنی اگر $2B^2 - A^2 = 1$ ، آن وقت عدد

$$(\sqrt{2} - 1)^{2k+1} = B'\sqrt{2} - A'$$

را هم می‌توان به همان صورت نوشت، یعنی $2B'^2 - A'^2 = 1$. در واقع -

$$(\sqrt{2} - 1)^{2k+1} = (\sqrt{2} - 1)^{2k-1}(\sqrt{2} - 1)^2 =$$

$$= (B\sqrt{2} - A)(3 - 2\sqrt{2}) = (3B + 2A)\sqrt{2} - (4B + 3A)$$

یعنی $B' = 3B + 2A$ و $A' = 4B + 3A$. بنابراین

$$\begin{aligned}
 2B'^2 - A'^2 &= 2(3B + 2A)^2 - (4B + 3A)^2 = \\
 &= 18B^2 + 24AB + 8A^2 - 16B^2 - 24AB - 9A^2 = 2B^2 - A^2 = 1
 \end{aligned}$$

حالت $(\sqrt{2} - 1)^{2k} = C - D\sqrt{2}$ را هم می‌توان، با همین روش، مورد بررسی قرارداد، یعنی با روش استقرای ریاضی ثابت کرد که اگر $C^2 - 2D^2 = 1$ ، آن وقت، برای $C' + D'\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^{2k+2}$ هم خواهیم داشت $C'^2 - 2D'^2 = 1$.

۰۲۶۸. اگر $(A + B\sqrt{3})^2 = C + D\sqrt{3}$ آن وقت، $C = A^2 + 3B^2$ ، $D = 2AB$ و $(A - B\sqrt{3})^2 = A^2 + 3B^2 - 2AB\sqrt{3} = C - D\sqrt{3}$ بنا براین بافرض

$$(A + B\sqrt{3})^2 = 99999 + 111111\sqrt{3}$$

باید داشته باشیم:

$$(A - B\sqrt{3})^2 = 99999 - 111111\sqrt{3}$$

که ممکن نیست، زیرا $99999 - 111111\sqrt{3}$ عددی منفی است و نمی‌تواند برابر با مجذور یک عدد حقیقی باشد.

۰۲۶۹. فرض می‌کنیم: $\sqrt{2} = p + q\sqrt{r}$. با مکعب کردن دو طرف برابری به دست می‌آید:

$$2 = p(p^2 + 3q^2r) + q(3p^2 + q^2r)\sqrt{r}$$

اکنون ثابت می‌کنیم، اگر $\sqrt{2} = p + q\sqrt{r}$ آن وقت، $\sqrt{2}$ عددی است گویا. درواقع، اگر $q = 0$ ، آن وقت $\sqrt{2} = p$ عددی است گویا. اگر $q \neq 0$ و $3p^2 + q^2r \neq 0$ داریم:

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p(p^2 + 3q^2r)}{q(3p^2 + q^2r)}$$

$$\sqrt{2} = p + q \frac{2 - p(p^2 + 3q^2r)}{q(3p^2 + q^2r)}$$

یعنی $\sqrt[3]{2}$ عددی است گویا. اگر $3p^2 + q^2r = 0$ ، آن وقت
 $q^2r = -3p^2$

$$2 = p[p^2 + 3(-3p^2)] = -8p^3$$

یعنی $\sqrt[3]{2} = -2p$ و عددی است گویا.

به این ترتیب، تنها این می‌ماند که ثابت کنیم $\sqrt[3]{2}$ ، عددی گنگ است.

اگر فرض کنیم: $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$ به دست می‌آید: $m^3 = 2n^3$. از این جا باید m^3 ،

و در نتیجه m ، عددی زوج باشد؛ یعنی، m^3 مضربی است از ۸. بنابراین

$n^3 = \frac{m^3}{2}$ هم عددی زوج است و، در نتیجه، این شرط را که m و n نسبت

به هم اول اند، نقض می‌کند. به این ترتیب، فرض $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$ به تناقض می‌رسد.

$$x = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2} \cdot 270. \text{ می‌گیریم؛ پس}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{n + \sqrt{n^2 - 4}} = \frac{2(n - \sqrt{n^2 - 4})}{4} = \frac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2}$$

بنابراین، x ، در معادله $x + \frac{1}{x} = n$ صدق می‌کند، اگر $x + \frac{1}{x}$ برابر عدد

درست n باشد، به سادگی ثابت می‌شود که $x^m + \frac{1}{x^m}$ هم عددی درست است.

در واقع، اگر عبارت $a_i = x^i + \frac{1}{x^i}$ ، به ازای $i \leq N$ ، عددی درست باشد،

عبارت $a_{N+1} = x^{N+1} + \frac{1}{x^{N+1}}$ هم عددی درست است، زیرا با توجه به این که

$$a_N a_1 = \left(x^N + \frac{1}{x^N}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{N+1} + \frac{1}{x^{N+1}}\right) +$$

$$+\left(x^{N-1}+\frac{1}{x^{N-1}}\right)=a_{N+1}+a_{N-1}$$

به دست می‌آید: $a_{N+1}=a_N a_1 - a_{N-1}$ ؛ یعنی اگر a_N و a_{N-1} عددهای درستی باشند، a_{N+1} هم عددی درست است.

با فرض $x^m = y$ ، برابری $y + \frac{1}{y} = k$ را می‌توان به صورت $k = a_m$

نوشت که عددی طبیعی است. برابری $y + \frac{1}{y} = k$ ، هم‌ارز است با معادله‌ای درجه دوم با جواب‌های

$$y = \frac{1}{2} \left(k \pm \sqrt{k^2 - 4} \right)$$

چون عدد $x = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}$ از واحد بزرگتر است، پس $x^m = y > 1$ و

در نتیجه

$$y = x^m = A = \frac{1}{2} (k + \sqrt{k^2 - 4}) \text{ و } \frac{1}{x^m} = \frac{1}{2} (k - \sqrt{k^2 - 4}) < 1$$

۲۷۱. قبل از هر چیز یادآوری می‌کنیم که، عدد حقیقی α را نمی‌توان

به دو طریق به صورت $\alpha = x + y\sqrt{2}$ نشان داد (x و y ، عددهایی گویا هستند). در واقع، اگر داشته باشیم:

$$\alpha = a + b\sqrt{2} = a_1 + b_1\sqrt{2}$$

(a, b, a_1, b_1 ، عددهایی گویا هستند)، آن وقت $\sqrt{2} = \frac{a - a_1}{b - b_1}$ ؛ و این،

تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم $a = a_1$ و $b = b_1$ ، چرا که $a - a_1$ و $b - b_1$ عددهایی گویا هستند، درحالی که $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

به جز این، با توجه به دستور بسط دوجمله‌ای، برابری صورت‌مسئله

را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$(X + Y\sqrt{2}) + (Z + T\sqrt{2}) = 5 + 4\sqrt{2}$$

که در آن

$$X = x^{2n} + C(2n, 2)x^{2n-2} \cdot 2y^2 + \dots;$$

$$Y = C(2n, 1)x^{2n-1}y + C(2n, 3)x^{2n-3}y^3 + \dots$$

و غیره. از برابری بالا نتیجه می‌شود:

$$X + Z = 5, Y + T = 4 \quad (*)$$

اگر دو طرف برابری دوم (***) را در $\sqrt{2}$ ضرب و، سپس، از برابری اول کم کنیم، به دست می‌آید:

$$(X - Y\sqrt{2}) + (Z - T\sqrt{2}) = 5 - 4\sqrt{2}$$

یعنی

$$(x - y\sqrt{2})^{2n} + (z - t\sqrt{2})^{2n} = 5 - 4\sqrt{2} \quad (***)$$

به این ترتیب، برابری (***) نتیجه‌ای از برابری فرض مسأله است. ولی به سادگی می‌توان ثابت کرد که برابری (***) امکان ندارد. در واقع، در سمت چپ برابری (***) عددی مثبت داریم، در حالی که در سمت راست آن، عددی منفی قرار گرفته است. به این ترتیب برابری فرض مسأله هرگز نمی‌تواند برقرار باشد.

۲۷۲. نه، ممکن نیست. فرض کنید با ظرف اول k_1 بار از بشکه اول به بشکه دوم و k_2 بار از بشکه دوم به بشکه اول ریخته باشیم. این، به معنای آن است که با ظرف اول، به اندازه $k\sqrt{2} = (k_1 - k_2)\sqrt{2}$ لیتر از بشکه اول به بشکه دوم ریخته ایم (k عدد درستی است که می‌تواند غیر مثبت باشد). به همین ترتیب، اگر با ظرف دوم، l_1 بار از بشکه اول به بشکه دوم و l_2 بار از بشکه دوم به بشکه اول ریخته باشیم، به معنای آن است که

وارد شده است. بنابراین، طبق شرط مسأله، باید داشته باشیم:

$$k\sqrt{2} + l(2 - \sqrt{2}) = 1 \quad \text{یا} \quad (l - k)\sqrt{2} = 2l - 1$$

یعنی $\sqrt{2} = \frac{2l - 1}{l - k}$. و این، ممکن نیست، زیرا به دلیل گنگ بودن عدد $\sqrt{2}$ ،

این برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $2l - 1 = 0$ و

$l - k = 0$ ، یعنی $l = k = \frac{1}{2}$ که ممکن نیست، زیرا l و k عددهایی درست‌اند.

۲۷۳. داحل اول. درواقع، باید همهٔ جواب‌های گویای (x, y) را

در معادله

$$3x^2 - 5x + 9 = y^2 \quad (y \geq 0)$$

پیدا کنیم (مسئله‌های بخش ۵ همین کتاب را ببینید). روشن است که جواب $(3, 0)$ در معادله صدق می‌کند. $x = x_1$ ، $y = y_1 + 3$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$3x_1^2 - y_1^2 - 5x_1 - 6y_1 = 0$$

برای هر جواب (x_1, y_1) ، به جز $(0, 0)$ ، باید داشته باشیم:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{m}{n} \quad \text{که، در آن، } m \text{ و } n \text{ نسبت هم اول‌اند. در نتیجه}$$

$$3x_1^2 - \frac{m^2}{n^2}x_1^2 - 5x_1 - 6\frac{m}{n}x_1 = 0$$

از آن‌جا $x_1 = \frac{5n^2 + 6mn}{3n^2 - m^2}$ ، زیرا $x \neq 0$. دستور $x = \frac{5n^2 + 6mn}{3n^2 - m^2}$ ، همهٔ

جواب‌های مسأله را به ما می‌دهد (جواب $x = 0$ ، متناظر است با $n = 0$).

داحل دوم. اگر نقطهٔ (x, y) با مختصات گویا، یکی از نقطه‌های

واقع بر منحنی درجه دوم $y^2 = 3x^2 - 5x + 9$ باشد (این منحنی، يك

هذلولی است)، آن وقت نسبت $k = \frac{y-3}{x}$ هم عددی است گویا (این نسبت، برابر بی‌نهایت هم می‌تواند باشد). از طرف دیگر، اگر k عددی گویا باشد، آن وقت خط راست $y = kx + 3$ ، هذلولی را در نقطه با مختصات گویا، یعنی $(3, 0)$ و $(\frac{6k+5}{3-k^2}, \frac{3k^2+5k+9}{3-k^2})$ قطع می‌کند. در نتیجه، همه نقطه‌های با مختصات گویا و متعلق به این منحنی، متناظرند با مقادارهایی از x که با برابری $x = \frac{6k+5}{3-k^2}$ بیان می‌شوند.

۰۲۷۴. $x^2 + px + q = 0$ و $y^2 + py + q_1 = 0$ ، به ترتیب، معادله اصلی و معادله گرد شده می‌گیریم. بنابه فرض $|\varepsilon| \approx 0/01$. $|q_1 - q| = |\varepsilon|$. اگر معادله دوم را از معادله اول کم کنیم، به دست می‌آید:

$$x^2 - y^2 + p(x - y) = q_1 - q = \varepsilon;$$

$$(x - y)(x + y + p) = \varepsilon$$

ریشه‌های دو معادله را که به هم نزدیک‌اند x_1 و y_1 می‌نامیم و ریشه دوم معادله اول را با x_2 نشان می‌دهیم. داریم: $-(x_1 + x_2) = p$ و از رابطه‌های حاصل نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} |y_1 - x_1| &= \frac{|\varepsilon|}{|x_1 + y_1 + p|} \approx \frac{|\varepsilon|}{|2x_1 - (x_1 + x_2)|} = \\ &= \frac{|\varepsilon|}{|x_1 - x_2|} = \frac{|\varepsilon|}{\Delta} \end{aligned}$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۰۲۷۵. روشن است، اگر در بین عددهای مفروض، چند عدد درست وجود داشته باشد، می‌توان آن‌ها را حذف کرد. بنابراین، اگر حکم مسأله، برای عددهای غیردرست برقرار باشد، آن وقت برای هر گونه‌ای از عددها

برقرار است. عددهای مفروض را $a_1, a_2, \dots, a_n$ می‌گیریم؛ بخش درست این عددها برابر است با $[a_1], [a_2], \dots, [a_n]$ ؛ بخش کسری این عددها، یعنی $\{a_i\} = a_i - [a_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) را با $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ نشان می‌دهیم. در ضمن عددها را طوری مرتب می‌کنیم که، بخش کسری آن‌ها، کاهش پیدا نکند، یعنی

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n < 1$$

اکنون k عدد نخستین a_i را ($1 \leq i \leq k$) به این ترتیب گرد می‌کنیم که به جای a_i ، عدد $[a_i]$ را که کوچکتر از آن است قرار می‌دهیم (عدد k با شرط $0 \leq k \leq n$ ، بعداً مشخص خواهد شد)؛ سپس، به جای $n - k$ عدد باقی‌مانده a_j ($k < j \leq n$)، $[a_j] + 1$ را، که بزرگتر از آن است می‌گذاریم. اگر در مجموع‌های

$$a_1 + a_2 - \dots + a_k, \quad a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n$$

به جای عددها، گردشده آن‌ها را قرار دهیم، خطای حاصل برای مجموع اول

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq k\alpha_k$$

و برای مجموع دوم، چنین می‌شود:

$$(1 - \alpha_{k+1}) + (1 - \alpha_{k+2}) + \dots + (1 - \alpha_n) \leq (n - k)(1 - \alpha_{k+1})$$

و شرط مسأله وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$k\alpha_k \leq \frac{n+1}{4} \quad \text{و} \quad (n+k)(1 - \alpha_{k+1}) \leq \frac{n+1}{4}$$

فرض کنید k ، بزرگترین عدد درستی باشد که، برای آن، داشته باشیم:

$$k\alpha_k \leq \frac{n+1}{4} \Rightarrow \alpha_k \leq \frac{n+1}{4k}$$

(این تعداد نمی‌تواند برابر صفر باشد). چون k را بزرگترین عدد ممکن

گرفته‌ایم، با تبدیل k به $k+1$ ، باید داشته باشیم: $\alpha_{k+1} > \frac{n+1}{4(k+1)}$ که از آن به دست می‌آید:

$$(n-k)(1-\alpha_{k+1}) < (n-k)\left(1-\frac{n+1}{4(k+1)}\right)$$

اکنون تحقیق می‌کنیم که: $\frac{n+1}{4} \leq (n-k)\left(1-\frac{n+1}{4(k+1)}\right)$ در واقع، این نابرابری هم‌ارز است با نابرابری

$$(n-k)(4k-n+3) \leq (n+1)(k+1)$$

و نابرابری اخیر، به وضوح هم‌ارز است با نابرابری

$$[n-(4k+1)]^2 \geq 0$$

که برای هر مقدار k و n برقرار است.

یادداشت. از حل مسأله می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که، وقتی $n=2l+1$ ، عددی فرد باشد، این برآورد، چندان دقیق نیست. مثلاً اگر داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = \frac{1}{4}$$

بهترین وضع وقتی ظاهر می‌شود که به جای l عدد 0 و به جای $l+1$ عدد، واحد را قرار دهیم و یا برعکس. در حالت $n=2l$ هم می‌توان مقدار $\frac{n+1}{4}$ را کاهش داد (چرا؟ به چه اندازه؟).

۰۲۷۶. روشن است که در حالت $0/001 < a$ وقتی a را گرد کنیم، 0 به دست می‌آید و، در نتیجه، نسبت $a_0:a$ و تقریب آن نیز برابر 0 می‌شود. بنابراین، فرض می‌کنیم: $a \geq 0/001$. در این صورت $a_0 \geq 0/001$ و خطای تقریب، کمتر از $0/001$ است. در نتیجه، روشن است که

$$d = \frac{a_0}{a} = \frac{a-\alpha}{a} = 1 - \frac{\alpha}{a}$$

بین ۰ و ۱ قرار دارد ($0 < d \leq 1$). از این گذشته، چون $0/001 < \alpha$ و

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{4} \text{ و } \alpha + \alpha = 2\alpha < a_0 + \alpha = a \text{ و بنا بر این } \alpha < a_0, a_0 > 0/001$$

در نتیجه

$$d = 1 - \frac{\alpha}{a} > \frac{1}{4} \text{ و } d \leq 1 \quad (*)$$

مقدار کسر d را نمی‌توان از این محدودتر کرد، زیرا نسبت $\delta = \frac{\alpha}{a}$

می‌تواند هر مقداری را در محدوده $0 \leq \delta < \frac{1}{4}$ قبول کند (که در نتیجه، d

می‌تواند هر يك از مقدارهای واقع در محدوده $\frac{1}{4} < d \leq 1$ باشد) روشن

است، اگر a_0 را برابر $0/001$ بگیریم، آن وقت

$$\delta = \frac{\alpha}{a_0 + \alpha} = \frac{\alpha}{0/001 + \alpha} \Rightarrow \alpha = 0/001 \frac{\delta}{1 - \delta} \quad (**)$$

این مقدار α ، به ازای هر مقدار δ از بازه $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ ، در نابرابری

$0 \leq \alpha < 0/001$ صدق می‌کند و عدد $a = 0/001 + \alpha$ ، متناظر با

$d = 1 - \delta$ می‌شود. روشن است که، اگر δ همه مقدارهای بین ۰ و $\frac{1}{4}$ را

پیماید، آن گاه d ، همه مقدارهای مجاز از $\frac{1}{4}$ تا ۱ را قبول می‌کند. به این

ترتیب، d می‌تواند هر يك از این مقادرها باشد:

$$0, 0/5, 0/501, 0/502, \dots, 0/999, 1$$

۱۰۰۱۰۲۷۷ عدد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$0.\alpha = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, 1000\alpha$$

و بخش کسری هر يك از این عددها را در نظر می‌گیریم (بخش کسری يك عدد،

برابر است با تفاضل بین عدد مفروض و بزرگترین عدد درستی که از عدد مفروض تجاوز نکند). این بخش‌های کسری، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که ۱۰۰۱ عضو دارد و، هر عضو آن، از واحد تجاوز نمی‌کند. بازه‌ای از محور عددی را، که بین ۰ و ۱ واقع است، به ۱۰۰۰ بخش برابر، و هر بخش به طول $\frac{1}{1000}$ ، تقسیم می‌کنیم (در هر یک از این ۱۰۰۰ فاصله،

انتهای چپ را جزو فاصله به حساب می‌آوریم، ولی انتهای راست آن را جزو فاصله به حساب نمی‌آوریم). توزیع نقطه‌های معرف بخش‌های کسری را (که در بالا داشتیم)، بر روی این فاصله‌های جزئی، مورد بررسی قرار می‌دهیم. تعداد این فاصله‌ها برابر ۱۰۰۰ و تعداد نقطه‌ها برابر ۱۰۰۱ است، بنابراین، دست کم در یکی از فاصله‌ها، دو نقطه قرار می‌گیرد؛ به این ترتیب، دو عدد p و q (که هیچ کدام از ۱۰۰۰ تجاوز نمی‌کند) وجود دارند، به نحوی که تفاضل بین بخش کسری دو عدد $p\alpha$ و $q\alpha$ از $\frac{1}{1000}$ کمتر است.

برای روشن بودن موقعیت، فرض می‌کنیم $p > q$. عدد $p\alpha - q\alpha$ ، یعنی $(p - q)\alpha$ را در نظر می‌گیریم. چون $p\alpha = P + d_1$ و $q\alpha = Q + d_2$ ، عددهایی درست و d_1 و d_2 ، بخش‌های کسری $p\alpha$ و $q\alpha$ ، بنابراین عدد

$$(p - q)\alpha = (P - Q) + d_1 - d_2$$

با عدد $P - Q$ ، به اندازه‌ای کمتر از $\frac{1}{1000}$ اختلاف دارد؛ و این، به معنای

آن است که اختلاف کسر $\frac{P - Q}{p - q}$ با عدد α ، از $\frac{1}{p - q} \cdot \frac{1}{1000}$ کمتر است.

۲۷۸ الف) وقتی α کوچکتر از واحد باشد، $\sqrt{\alpha}$ هم از واحد کوچکتر

است. فرض می‌کنیم، تعداد رقم‌های q بعد از ممیز، در نمایش دهدهی $\sqrt{\alpha}$

کمتر از ۱۰۰ باشد. این، به معنای آن است که: $\sqrt{\alpha} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$

اگر دو طرف این نابرابری را مجذور کنیم، به دست می‌آید:

$$\alpha < 1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200}$$

از طرف دیگر داریم:

$$1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$$

یعنی $\alpha < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ و در نمایش دهدهی عدد α ، تعداد رقم‌های ۹ که

بعد از ممیز قرار گرفته‌اند، از ۱۰۰ کمتر می‌شود.

(ب) ابتدا توجه کنیم که

$$\underbrace{0/111\dots111}_{\text{رقم } 100} = \frac{1}{9} \times \underbrace{0/999\dots999}_{\text{رقم } 100} = \frac{1}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}\right)$$

بنابراین باید مقدار عدد $\frac{1}{9} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}}$ را ارزیابی کنیم. کافی است

حالت (۴) این مسأله را حل کنیم، در این صورت، جواب حالت‌های (۱) و (۲) و (۳) هم، به‌خودی‌خود، به دست می‌آید.

می‌دانیم، برای هر $a \leq 1$ داریم $\frac{a}{2} < 1 - \sqrt{1-a}$ ، زیرا

$$\left(1 - \frac{a}{2}\right)^2 = 1 - a + \frac{a^2}{4} > 1 - a$$

بنابراین

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}} < 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10}\right)^{100} = \underbrace{0/999\dots999}_{\text{رقم } 100}$$

برای دقیق‌تر کردن این ارزیابی، عددهای مثبت c_1 و c_2 را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \right)^{100} - c_1 \left(\frac{1}{10} \right)^{200} > \\ > \sqrt{1 - \left(\frac{1}{10} \right)^{100}} > 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \right)^{100} - c_2 \left(\frac{1}{10} \right)^{200}$$

اگر همه طرف‌های نابرابری‌های زیر را مجذور کنیم:

$$1 - \frac{1}{2}a - c_1a^2 > \sqrt{1-a} > 1 - \frac{1}{2}a - c_2a^2$$

به دست می‌آید:

$$1 + \frac{1}{4}a^2 + c_1^2a^4 - a - 2c_1a^2 + c_1a^2 > 1 - a >$$

$$> 1 + \frac{1}{4}a^2 + c_1^2a^4 - a - 2c_2a^2 + c_2a^2$$

ابتدا $1 - a$ را از همه طرف‌ها کم و، سپس، نابرابری‌های حاصل را بر a^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{4} - 2c_1 \right) + c_1a + c_1^2a^2 > 0 > \left(\frac{1}{4} - 2c_2 \right) + c_2a + c_2^2a^2$$

ثابت می‌کنیم که، این نابرابری‌ها، در حالت $a = \left(\frac{1}{10} \right)^{100}$ ، مثلاً، برای

$$c_1 = \frac{1}{8} + \frac{a}{1000} = 0.125 + \left(\frac{1}{10} \right)^{102} \text{ و } c_2 = \frac{1}{8} + \frac{a}{10} = \\ = 0.125 + \left(\frac{1}{10} \right)^{101}$$

برقرارند. در واقع، برای هر $a > 0$ داریم:

$$\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{100}a\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{100}a\right)a + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{100}a\right)^2 a^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{50}\right)a + \dots > 0$$

از طرف دیگر، برای هر $a = \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ به دست می‌آید:

$$\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}a\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}a\right)a + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}a\right)^2 a^2 =$$

$$= -\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right)a + \left[\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}a\right)^2\right]a^2 < 0$$

زیرا به روشنی، عدد $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right)a = \frac{3}{40} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ از عدد بعدی که به عدد

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{64}\right)a^2 = \frac{37}{3200}a^2 = \frac{37}{320} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{200}$$

نزدیک است، بزرگتر می‌شود. به این ترتیب داریم:

$$1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^{100} - \left(0.125 + \left(\frac{1}{10}\right)^{102}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{200} > \sqrt{\underbrace{999\dots 999}_{\text{رقم } 100}} >$$

$$> 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^{100} - \left(0.125 + \left(\frac{1}{10}\right)^{101}\right) \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{200}$$

این نابرابری‌ها را می‌توان چنین نوشت:

$$0.\underbrace{999\dots 999}_{\text{رقم } 100} 4 \underbrace{999\dots 999}_{\text{رقم } 99} 874 \underbrace{999\dots 999}_{\text{رقم } 99} >$$

$$> \sqrt{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}} > 0.\underbrace{999\dots 999}_{\text{رقم } 100} 4 \underbrace{999\dots 999}_{\text{رقم } 99} 874 \underbrace{999\dots 999}_{\text{رقم } 91}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \dots + \frac{1}{a}}$$

وبه همین ترتیب

$$\frac{1}{B} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^{n-1}} + \dots + \frac{1}{b}}$$

از این جا روشن است که $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ و در نتیجه $B > A$.

۰۲۸۵. با توجه به دستور

$$(X - a)^2 - (x - a)^2 = X^2 - x^2 - 2a(X - x)$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & [(X - a_1)^2 + (X - a_2)^2 + \dots + (X - a_n)^2] - \\ & - [(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2] = \\ & = n(X^2 - x^2) - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(X - x) \end{aligned}$$

اکنون اگر قرار دهیم $x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ ، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & [(X - a_1)^2 + (X - a_2)^2 + \dots + (X - a_n)^2] - \\ & - [(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2] = \\ & = n(X^2 - x^2) - 2nx(X - x) = n(X^2 - x^2 - 2Xx + 2x^2) = \\ & = n(X - x)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

به این ترتیب، مقدار مورد نظر x ، برابر است با $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

۰۲۸۱ الف) حالت‌های ممکن را می‌توان در سه حالت خلاصه کرد:

۱. a_1, a_2, a_3, a_4 . در این حالت داریم:

$$\Phi_1 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a_1)^2$$

۲. a_1, a_2, a_3, a_4 . در این حالت داریم:

$$\Phi_2 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a_1)^2$$

۳. a_1, a_2, a_3, a_4 . در این حالت داریم:

$$\Phi_3 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_4 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2$$

اکنون، به سادگی، نتیجه می‌گیریم:

$$\Phi_3 - \Phi_1 = -2a_2a_4 - 2a_3a_4 + 2a_2a_3 +$$

$$+ 2a_1a_4 = 2(a_2 - a_1)(a_3 - a_4) < 0$$

$$\Phi_3 - \Phi_2 = -2a_1a_2 - 2a_3a_4 + 2a_2a_3 + 2a_1a_4 =$$

$$= 2(a_3 - a_1)(a_2 - a_4) < 0$$

بنابراین، ردیف موردنظر، عبارت است از a_1, a_2, a_3, a_4 .

(ب) داخل اول. این عبارت را در نظر می‌گیریم:

$$\Phi = (a_{i_1} - a_{i_2})^2 + (a_{i_2} - a_{i_3})^2 + \dots + (a_{i_{n-1}} - a_{i_n})^2 + (a_{i_n} - a_{i_1})^2$$

که در آن $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}, a_{i_{r+1}}, \dots, a_{i_n}$ همان n عدد مفروض و به ردیف موردنظر است.

a_{i_α} و a_{i_β} را دو تا از این عددها می‌گیریم ($\alpha < \beta$). ثابت می‌کنیم، اگر

a_{i_α} بزرگتر (یا کوچکتر) از a_{i_β} باشد، آن وقت $a_{i_{\alpha-1}}$ بزرگتر (یا کوچکتر)

از $a_{i_{\beta+1}}$ خواهد بود (در این جا، شرط می‌کنیم: $a_{i_0} = a_{i_n}$).

در واقع، اگر این حکم درست نباشد، یعنی اگر داشته باشیم:

$$(a_{i_\alpha} - a_{i_\beta})(a_{i_{\alpha-1}} - a_{i_{\beta+1}}) < 0$$

آن وقت ترتیب $a_{i_\alpha}, a_{i_{\alpha+1}}, \dots, a_{i_\beta}, a_{i_{\beta+1}}, \dots, a_{i_n}$ در جهت عکس، مجموع Φ را

کاهش می‌دهد، زیرا تفاضل مجموع Φ' با مجموع اصلی Φ را می‌توان چنین

نوشت:

$$\Phi' - \Phi = -2a_{i_{\alpha-1}}a_{i_{\beta}} - 2a_{i_{\alpha}}a_{i_{\beta+1}} + 2a_{i_{\alpha-1}}a_{i_{\alpha}} + \\ + 2a_{i_{\beta}}a_{i_{\beta+1}} = 2(a_{i_{\alpha}} - a_{i_{\beta}})(a_{i_{\alpha-1}} - a_{i_{\beta+1}}) < 0$$

این حکم می‌تواند حل مساله را به انجام برساند. چون تبدیل دوری همهٔ عددها، مقدار مجموع Φ را تغییر نمی‌دهد، می‌توانیم a_{i_1} را برابر کوچکترین عددهای a_i بگیریم، یعنی $i_1 = 1$. از این فرض نتیجه می‌شود که عددهای a_{i_1} و a_{i_n} ، عددهای بعد از a_1 ، از نظر اندازه‌های آن‌ها هستند. در واقع، اگر $a_{i_{\beta}} < a_{i_r}$ ($\beta \neq n$)، آن وقت باید داشته باشیم:

$$(a_{i_r} - a_{i_{\beta}})(a_{i_1} - a_{i_{\beta+1}}) < 0$$

و اگر $a_{i_{\beta}} < a_{i_n}$ ($\beta \neq 2$)، آن وقت $(a_{i_1} - a_{i_{\beta-1}})(a_{i_n} - a_{i_{\beta}}) < 0$. چون ترتیب عددها را در دنبالهٔ $a_1, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ می‌توان به ردیف عکس نوشت، بدون این که مجموع Φ تغییر کند، بنابراین می‌توان فرض کرد: $a_{i_r} < a_{i_n}$ ، یعنی $i_2 = 2, i_3 = 3$.

اکنون ثابت می‌کنیم که عددهای a_{i_r} و $a_{i_{n-1}}$ بر حسب مقدار خود،

بعد از عددهای a_{i_1}, a_{i_2} قرار می‌گیرند. در واقع، اگر مثلاً

$$a_{i_r} > a_{i_{\beta}} \quad (\beta \neq 1, 2, n-1, n)$$

آن وقت باید داشته باشیم:

$$(a_{i_r} - a_{i_{\beta}})(a_{i_r} - a_{i_{\beta+1}}) < 0$$

علاوه بر این چون $(a_{i_r} - a_{i_{n-1}})(a_{i_r} - a_{i_n}) > 0$ ، بنابراین $a_{i_r} < a_{i_{n-1}}$

یعنی $a_{i_r} = a_4$ و $a_{i_{n-1}} = a_5$.

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که $i_4 = 4$ و $i_{n-2} = 7$ ؛ سپس

$i_5 = 8$ و $i_{n-3} = 9$ و غیره. به این ترتیب، به این ردیف از عددها

که از ردیف $n+1$ عدد در Φ'_{n+1} با حذف a_{n+2} به دست آمده است، آن وقت

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1} - \Phi'_n &= (a_\alpha - a_{n+1})^2 + (a_{n+1} - a_\beta)^2 - (a_\alpha - a_\beta)^2 = \\ &= 2a_{n+1}^2 - 2a_\alpha a_{n+1} - 2a_\beta a_{n+1} + 2a_\alpha a_\beta = \\ &= 2(a_{n+1} - a_\alpha)(a_{n+1} - a_\beta) \geq \Phi_{n+1} - \Phi_n\end{aligned}$$

به این ترتیب، می‌بینیم که

$$\Phi_{n+1} - \Phi'_{n+1} = [\Phi_n - \Phi'_n] + [(\Phi_{n+1} - \Phi_n) - (\Phi'_{n+1} - \Phi'_n)] \leq 0$$

(عبارت داخل کروشۀ اول بنابه فرض استقرای، عبارت داخل کروشۀ دوم بنابه آن چه ثابت کردیم، غیر مثبت است). اگر مجموع Φ'_{n+1} با مجموع Φ_{n+1} اختلاف داشته باشد، آن وقت یا $\Phi_n - \Phi'_n < 0$ (و در این صورت $\Phi_{n+1} - \Phi'_{n+1} < 0$) و یا داخل کروشۀ دوم منفی است (که باز هم به نابرابری $\Phi_{n+1} < \Phi'_{n+1}$ منجر می‌شود).

در حالت فرد بودن n هم، با همین روش می‌توان از n به $n+1$ عبور کرد.

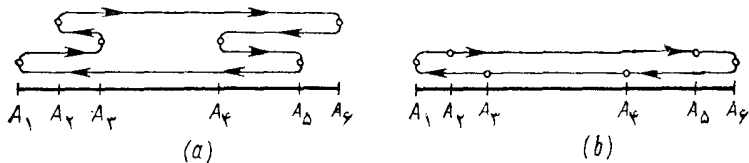
راه حل سوم. راه حل هندسی ساده‌ای از این مسأله می‌آوریم. عددهای

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$$

را متناظر با نقطه‌های $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ روی محور عددها، در نظر می‌گیریم. پاره‌خط‌های راست $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, \dots, A_{n-1} A_n$ را، به ترتیب، با $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ نشان می‌دهیم. در این صورت مجموع

$$\begin{aligned}\Phi &= (a_{i_1} - a_{i_2})^2 + (a_{i_2} - a_{i_3})^2 + \dots + (a_{i_{n-1}} - a_{i_n})^2 + \\ &+ (a_{i_n} - a_{i_1})^2 = (A_{i_1} A_{i_2})^2 + (A_{i_2} A_{i_3})^2 + \dots + \\ &+ (A_{i_{n-1}} A_{i_n})^2 + (A_{i_n} A_{i_1})^2\end{aligned}$$

برابر است با مجموع مجذورهای طول‌های پاره‌خط‌های «خط شکسته» $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_n} A_{i_1}$ (که همه پاره‌خط‌های آن، روی یک خط راست قرار دارند؛ شکل ۳۱، (a)).



شکل ۳۱

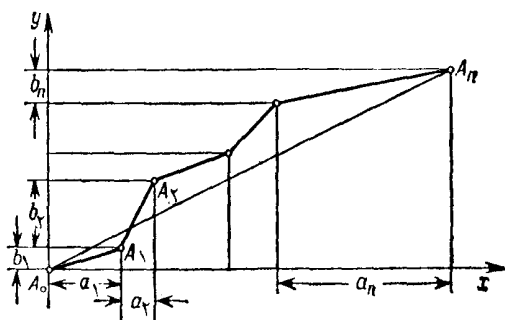
چون، این خط شکسته بسته، تمامی پاره‌خط‌راست $A_1 A_n$ را می‌پوشاند، هر یک از پاره‌خط‌های $A_k A_{k+1} = d_k$ ، دست کم دو بار، در خط شکسته ظاهر می‌شود (یکبار در جهت از A_k به A_{k+1} و بار دیگر در جهت از A_{k+1} به A_k). بنابراین، بدون این که توجهی به ردیف نقطه‌ها داشته باشیم، اگر مجموع Φ را بر حسب پاره‌خط‌های راست $d_1, d_2, \dots, d_n$ بیان کنیم و، سپس، پرانتزها را باز کنیم، در نتیجه حاصل، باید $2d_k^2$ ظاهر شده باشد، یعنی این مجموع باید شامل همه جمله‌های $2d_1^2, 2d_2^2, \dots, 2d_{n-1}^2$ باشد.

اکنون، اگر $A_{k-1} A_k = d_{k-1}$ و $A_k A_{k+1} = d_k$ را دو پاره‌خط مجاور فرض کنیم، روشن است که، اگر پاره‌خطی از خط شکسته، پاره‌خط $A_k A_{k+1}$ را با آغاز از A_k بپوشاند، آن وقت، پاره‌خطی که $A_k A_{k+1}$ را در جهت عکس می‌پوشاند، نمی‌تواند در نقطه A_k متوقف شود. بنابراین، در هر حال، باید پاره‌خطی از خط شکسته وجود داشته باشد که، به طور هم‌زمان، پاره‌خط‌های $A_{k-1} A_k$ و $A_k A_{k+1}$ را بپوشاند. به این ترتیب، در هر حال، مجموع Φ شامل جمله‌ای به صورت $2d_{k-1} d_k$ است، یعنی شامل همه جمله‌های $2d_1 d_2, 2d_2 d_3, \dots, 2d_{n-2} d_{n-1}$ است.

اکنون کافی است به حالتی توجه کنیم که ردیف نقطه‌ها، به صورت پایان راه حل اول، باشد. در این صورت داریم:

$$\Phi = 2d_1^2 + 2d_2^2 + \dots + 2d_{n-1}^2 + 2d_1 d_2 + 2d_2 d_3 + \dots + 2d_{n-2} d_{n-1}$$

(شکل ۳۱، b) را ببینید). با توجه به آن چه گفتیم، معلوم می‌شود که، اگر



شکل ۳۲

ردیف عددها به این صورت باشد، آن وقت مجموع Φ ، کمترین مقدار ممکن را دارد.

۲۸۲. الف) روشن است که می‌توان همه عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ ؛ $b, b_2, \dots, b_n$ را مثبت به حساب آورد. در واقع، اگر برخی از عددها منفی باشند، می‌توان آن‌ها را باقرینه خود، که عددی مثبت است، عوض کرد؛ در این صورت، مقدار سمت چپ نابرابری تغییر نمی‌کند و مقدار سمت راست آن، افزایش می‌یابد.

خط شکسته $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ را طوری در نظر می‌گیریم که، تصویر پاره‌خط‌های آن یعنی $A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n$ ، بر محور Ox به ترتیب برابر $a_1, a_2, \dots, a_n$ و بر محور Oy به ترتیب برابر $b_1, b_2, \dots, b_n$ باشد. فرض کنید، هر راس خط شکسته درست راست و بالای راس قبل از خود قرار گیرد (شکل ۳۲). از قضیه فیثاغورث نتیجه می‌شود:

$$A_0 A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad A_1 A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad \dots, \quad A_{n-1} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};$$

$$A_0 A_n = \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}$$

و از این جا، درستی نابرابری مورد نظر ثابت می‌شود. نابرابری وقتی به برابری تبدیل می‌شود که پاره‌خط شکسته $A_0 A_1 \dots A_n$ بر پاره‌خط راست $A_0 A_n$ منطبق شود و این، تنها وقتی امکان دارد که داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

ب) ارتفاع هرم را h ، طول ضلع‌های قاعده هرم را به ترتیب $a_1, a_2, \dots, a_n$ و طول عمودهای وارد از پای ارتفاع بر ضلع‌های قاعده هرم را به ترتیب $b_1, b_2, \dots, b_n$ می‌گیریم؛ در این صورت محیط قاعده (P) و مساحت آن (S) چنین‌اند:

$$P = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad S = \frac{a_1 b_1}{2} + \frac{a_2 b_2}{2} + \dots + \frac{a_n b_n}{2}$$

و Σ ، سطح جانبی هرم

$$\Sigma = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{b_1^2 + h^2} + \frac{1}{2} a_2 \sqrt{b_2^2 + h^2} + \dots + \frac{1}{2} a_n \sqrt{b_n^2 + h^2}$$

اکنون، باتوجه به نابرابری بخش الف) مسأله ۲۸۲ داریم:

$$2\Sigma = \sqrt{(a_1 b_1)^2 + (a_1 h)^2} + \sqrt{(a_2 b_2)^2 + (a_2 h)^2} + \dots$$

$$\dots + \sqrt{(a_n b_n)^2 + (a_n h)^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 + (a_1 h + a_2 h + \dots + a_n h)^2} = \\ = \sqrt{4S^2 + h^2 P^2}$$

بنابراین، علامت برابری، وقتی برقرار خواهد بود که داشته باشیم:

$$a_1 b_1 : a_2 b_2 : \dots : a_n b_n = a_1 h : a_2 h : \dots : a_n h$$

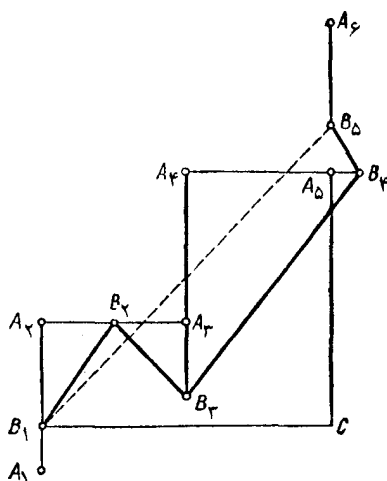
یعنی وقتی که $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

۲۸۳. مسأله را در دو حالت جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱. a° ، عددی زوج است، خط شکسته $A_1 A_2 A_3 \dots A_n A_{n+1} A_{n+2}$

را طوری رسم می‌کنیم که، طول همه پاره‌خط‌های راست آن، یعنی طول

هر یک از پاره‌خط‌های $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n+1} A_{n+2}$ برابر واحد



شکل ۳۳

باشد، در ضمن، پاره‌خط‌های $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6$ ، پاره‌خط‌های راست A_iA_{i+1} را، برای i از ۱ تا $n+1$ ، روی پاره‌خط‌های راست B_iA_{i+1} یا روی امتداد آن‌ها، طوری انتخاب می‌کنیم که طول پاره‌خط راست B_iA_{i+1} برابر a_i باشد (در این جا a_{n+1} را برابر a_1 گرفته‌ایم، یعنی نقطه B_{n+1} را طوری انتخاب کرده‌ایم که $B_{n+1}A_{n+2} = a_1$). همچنین توافق می‌کنیم که، نقطه B_i ، در حالت $a_i > 0$ ، درست‌چپ یا زیر نقطه A_{i+1} ، و در حالت $a_i < 0$ ، در سمت راست یا بالای A_{i+1} باشد. در شکل ۳۳، داریم:

$$0 < a_1 < 1, 0 < a_2 < 1, a_3 > 1, a_4 < 0$$

اکنون، خط شکسته $B_1B_2 \dots B_{n+1}$ را رسم می‌کنیم. با توجه به قضیه فیثاغورث داریم:

$$B_iB_{i+1} = \sqrt{B_iA_{i+1}^2 + B_{i+1}A_{i+1}^2}$$

چون $B_iA_{i+1} = a_i$ و به سادگی می‌توان نشان داد که

به این نتیجه می‌رسیم که $B_{i+1}A_{i+1} = |1 - a_{i+1}|$

$$B_i B_{i+1} = \sqrt{a_i^2 + (1 - a_{i+1})^2}$$

بنابراین، مجموع

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2}$$

برابر خواهد شد با طول خط شکسته $B_1 B_2 \dots B_{n+1}$.

روشن است که طول خط شکسته $B_1 B_2 \dots B_{n+1}$ نمی‌تواند از طول پاره‌خط راست $B_1 B_{n+1}$ کمتر باشد. طول پاره‌خط راست اخیر را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، مثلث قائم‌الزاویه BCB_{n+1} را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۳). می‌بینیم که

$$B_1 C = A_2 A_3 + A_4 A_5 + \dots + A_n A_{n+1} = \frac{n}{2};$$

$$CB_{n+1} = A_1 A_2 + A_3 A_4 + \dots + A_{n-1} A_n = \frac{n}{2}$$

(زیرا $A_1 B_1 = A_{n+1} B_{n+1} = |1 - a_1|$). از این جا، به دست می‌آید:

$$B_1 B_{n+1} = \sqrt{(B_1 C)^2 + (CB_{n+1})^2} = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} n \sqrt{2}$$

و درستی نابرابری مورد نظر ثابت می‌شود.

اکنون دیگر، به سادگی می‌توان حالتی را پیدا کرد که، در آن، علامت نابرابری، به علامت برابری تبدیل می‌شود. برای این منظور، باید همه نقطه‌های $B_1, B_2, \dots, B_n$ بر خط راست $B_1 B_{n+1}$ قرار گیرند (یعنی نقطه B_i باید بر نقطه برخورد خط‌های راست $B_1 B_{n+1}$ و $A_i A_{i+1}$ منطبق باشد). از آن جا که خط‌های راست $B_1 B_{n+1}$ و $B_1 C$ باهم زاویه‌ای برابر ۴۵ درجه می‌سازند (زیرا $B_1 C = CB_{n+1}$)، این شرط وقتی برقرار است که

$$B_1 A_2 = A_2 B_2 = B_2 A_3 = A_3 B_3 = \dots = B_{n-1} A_n = A_n B_n$$

یعنی، وقتی که داشته باشیم:

$$a_1 = 1 - a_2 = a_3 = 1 - a_4 = \dots = a_{n-1} = 1 - a_n$$

به این ترتیب، در حالت زوج بودن n ، وقتی به برابری می‌رسیم که داشته باشیم:

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{n-1} = a; \quad a_2 = a_4 = \dots = a_n = 1 - a$$

که در آن‌ها، a عددی دلخواه است.

۴. عددی فرد است*. قرار می‌دهیم: $a_1 = a_3 = a_5 = \dots$ ، $a_2 = a_4 = a_6 = \dots$ و مجموع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_3^2 + (1 - a_4)^2} + \dots \\ \dots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2}$$

(در واقع، این مجموع دو برابر مجموع اصلی است، زیرا در آن، هر جمله دوبار آمده است). بنابراین چه برای حالت زوج بودن n ثابت کردیم، این

مجموع از $\frac{2n\sqrt{2}}{2}$ کمتر نیست، بنابراین

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_3^2 + (1 - a_4)^2} + \dots \\ \dots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}$$

و نابرابری وقتی به برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم:

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{n-1} = 1 - a_2 = 1 - a_4 = \dots = 1 - a_n$$

چون در این جا $a_1 = a_{n+1}$ و، n عددی فرد است، خواهیم داشت:

(*) از خواننده می‌خواهیم حالت $n=3$ را انتخاب کند و روی آن نشان دهد که، چرا در حالت فرد بودن n ، نمی‌توان از همان استدلال حالت زوج بودن n استفاده کرد.

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{2}$$

۰۲۸۴. راه حل اول. مقوارهای دو طرف نابرابری مثبت‌اند؛ نابرابری را مجذور می‌کنیم:

$$1 - x_1^2 + 1 - x_2^2 + 2\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)} \leq 4 - (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2);$$

$$\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)} \leq 1 - x_1x_2$$

دوباره دو طرف نابرابری را مجذور می‌کنیم:

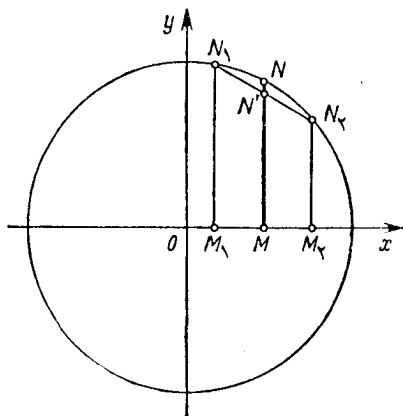
$$1 - x_1^2 - x_2^2 + x_1^2x_2^2 \leq 1 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2$$

که با ساده کردن آن، به راحتی به نابرابری درست زیر می‌رسیم:

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

و روشن است که علامت برابری وقتی پیش می‌آید که $x_1 = x_2$.

راه حل دوم. این، يك راه حل هندسی است (باهمین روش، می‌توان مسأله‌های پیچیده‌تری را هم حل کرد). دستگاه مختصات را در صفحه در نظر می‌گیریم (شکل ۳۴) و دایره‌ای به شعاع واحد و به مرکز مبدا مختصات رسم می‌کنیم. اگر مختصات و نقطه دلخواهی از محیط دایره را (x, y)



شکل ۳۴

بگیریم، داریم: $x^2 + y^2 = 1$.

اکنون، نقطه‌های M_1 و M_2 را، به ترتیب، با طول‌های x_1 و x_2 ، روی محور Ox مشخص می‌کنیم. چون $|x_1| \leq 1$ و $|x_2| \leq 1$ ، بنابراین این دو نقطه در داخل دایره به شعاع واحد و یا روی محیط آن قرار می‌گیرند. از نقطه‌های M_1 و M_2 عمودهایی بر محور Ox اخراج می‌کنیم تا محیط دایره را در بالای محور و در نقطه‌های N_1 و N_2 قطع کنند (شکل ۳۴ را ببینید). روشن است که

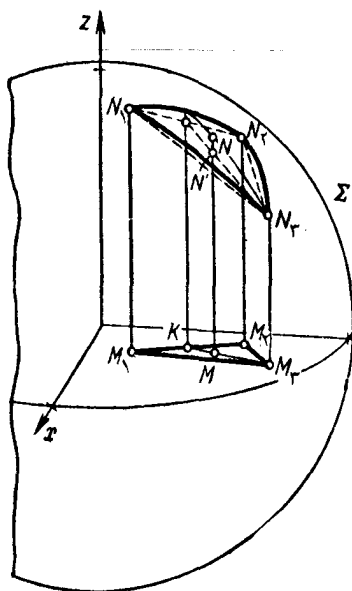
$$M_1N_1 = \sqrt{1 - x_1^2} \quad \text{و} \quad M_2N_2 = \sqrt{1 - x_2^2}$$

اگر M را وسط پاره‌خط راست M_1M_2 بگیریم، طولی برابر $\frac{x_1 + x_2}{2}$ پیدا می‌کند و در نتیجه، طول پاره‌خط راست MN (نقطه N ، نقطه برخورد محیط دایره با عمودی است که از نقطه M بر محور Ox رسم شده باشد) برابر با $\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$ می‌شود. از طرف دیگر، مجموع $M_1N_1 + M_2N_2$ برابر است با دو برابر پاره‌خط راست MN' که وسط دو ساق ذوزنقه $M_1N_1N_2M_2$ را به هم وصل کرده است. و چون MN' از MN کوچکتر است، بنابراین

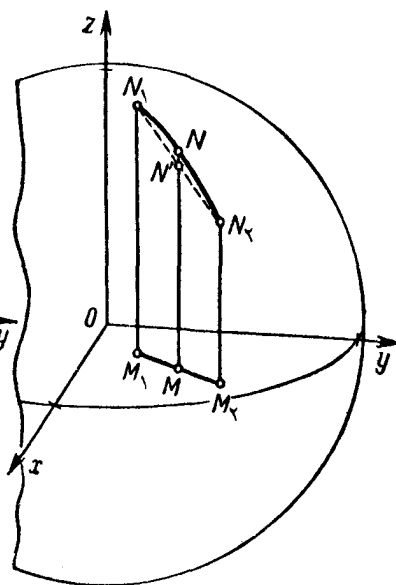
$$M_1N_1 + M_2N_2 \leq 2MN$$

و روشن است که علامت برابری تنها برای وقتی است که M_1 و M_2 بر هم منطبق باشند، یعنی داشته باشیم: $x_1 = x_2$.

یادداشت. با روشی که برای راه‌حل دوم مسأله ۲۸۴ به کار بردیم، می‌توان درستی نابرابری‌های دیگری را هم ثابت کرد. مثلاً، کره به شعاع واحد و به مرکز مبدا مختصات (در مختصات فضایی) را در نظر می‌گیریم و M_1 و M_2 را نقطه‌های دلخواهی از صفحه Oxy فرض می‌کنیم که یا در داخل کره و یا روی سطح آن باشند. از نقطه‌های M_1 و M_2 عمودهایی بر صفحه Oxy اخراج می‌کنیم تا سطح کره را در نقطه‌های N_1 و N_2 قطع



شکل ۳۶



شکل ۳۵

کنند (شکل ۳۵). سپس، نقطه M وسط پاره‌خط راست M_1M_2 را در نظر می‌گیریم و از آن‌جا عمودی بر صفحه Oxy رسم می‌کنیم تا سطح کره را در نقطه N و پاره‌خط راست N_1N_2 را در نقطه N' قطع کند. مختصات نقطه‌های M_1 و M_2 را، به ترتیب، (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گیریم. داریم:

$$M_1N_1 = \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}, \quad M_2N_2 = \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2},$$

$$MN = \sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2}$$

$$MN' = \frac{1}{2}(M_1N_1 + M_2N_2)$$

چون $MN' < MN$ ، بنابراین

$$\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} \leq$$

$$\leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2} \quad (*)$$

به شرطی که همه رادیکال‌ها، مقدارهایی حقیقی باشند. علامت برابری وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ ، یعنی نقطه‌های M_1 و M_2 برهم منطبق باشند.

به همین ترتیب، اگر سه نقطه M_1, M_2, M_3 را روی صفحه Oxy و نقطه M را در محل برخورد میانه‌های مثلث $M_1M_2M_3$ بگیریم (شکل ۳۶)، به این نابرابری می‌رسیم:

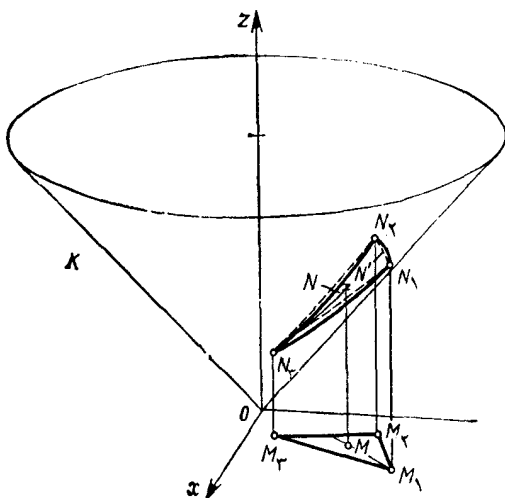
$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} + \sqrt{1 - x_3^2 - y_3^2} \leq \\ & \leq 3\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2} \quad (**)$$

این نابرابری به معنای آن است که، طول پاره‌خط راست MN' ، از طول پاره‌خط راست MN بیشتر نیست. نابرابری $(**)$ برای همه حالت‌هایی که رادیکال‌ها حقیقی باشند، برقرار است. علامت نابرابری، تنها وقتی به علامت برابری تبدیل می‌شود که $x_1 = x_2 = x_3$ و $y_1 = y_2 = y_3$ ، یعنی وقتی که سه نقطه M_1, M_2, M_3 برهم منطبق باشند.

اکنون، به جای کره، مخروطی را در نظر می‌گیریم که راس آن بر مبدأ مختصات و محور آن بر محور Oz منطبق و زاویه راس مخروط برابر 90° باشد (شکل ۳۷). با استفاده از همان روش به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2} \geq \\ & \geq 3\sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2} \quad (***)$$

که برای هر مقداری از $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ برقرار است. علامت نابرابری، وقتی به برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم:



شکل ۳۷

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$$

یادآوری می‌کنیم که اثبات نابرابری‌های (*), (**), و (***)، با روش جبری، بسیار پیچیده است.

۰۲۸۵. چون $\sin \cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos x\right)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos \sin x - \sin \cos x = \cos \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \cos x\right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x + \sin x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x - \sin x}{2}$$

سپس

$$\begin{aligned} |\cos x + \sin x| &= \sqrt{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x} = \\ &= \sqrt{1 + \sin 2x} \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

(علامت برابری تنها برای وقتی است که $\sin 2x = 1$). و به همین ترتیب

$$\begin{aligned} |\cos x - \sin x| &= \sqrt{\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x} = \\ &= \sqrt{1 - \sin 2x} \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

(علامت برابری، برای $\sin 2x = -1$). چون $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3.14}{2} = 1.57$

بزرگتر است از عدد $\sqrt{2} \approx 1.41$ ، بنابراین

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x + \sin x}{2} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{2} > \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x - \sin x}{2} > 0$$

در نتیجه، عبارت‌های $\cos \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x - \sin x}{2}$ و $\cos \frac{\frac{\pi}{2} + \cos x + \sin x}{2}$ همواره مثبت‌اند و به دست می‌آید:

$$\cos \sin x - \sin \cos x > 0$$

$\cos \sin x$ از $\sin \cos x$ بزرگتر است.

۲۸۶. الف) فرض می‌کنیم: $\log_2 \pi = a$ و $\log_5 \pi = b$. از برابری‌های

$2^a = \pi$ و $5^b = \pi$ نتیجه می‌شود: $\pi^{\frac{1}{a}} = 2$ و $\pi^{\frac{1}{b}} = 5$ ، یعنی

$$\pi^{\frac{1}{a}} \times \pi^{\frac{1}{b}} = 2 \times 5 \quad \text{یا} \quad \pi^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 10$$

چون $10 < \pi^2 \approx 3.14^2 < 10$ ، بنابراین $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$. نابرابری ثابت شد.

ب) فرض می‌کنیم: $\log_2 \pi = a$ و $\log_\pi 2 = b$ ، یعنی $2^a = \pi$ و

$\pi^b = 2$. از برابری دوم به دست می‌آید $2^{\frac{1}{b}} = \pi$ و بنابراین $b = \frac{1}{a}$ و

نابرابری مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{1}{a}} > 2; \quad \frac{a^2 + 1}{a} > 2; \quad a^2 + 1 > 2a$$

که درستی آن روشن است ($a \neq 1$).

۲۸۷. (۱) الف) باید ثابت کنیم، با شرط $\beta > \alpha$ ، داریم:

$$\sin \beta - \sin \alpha > \beta - \alpha$$

روشن است که

$$\sin \beta - \sin \alpha = 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} < 2 \times \frac{\beta - \alpha}{2} \times 1 = \beta - \alpha$$

(وقتی انتهای کمان x در ربع اول باشد، همیشه داریم $\sin x < x$ و $\cos x < 1$).

ب) باید ثابت کنیم $(\beta > \alpha) \Rightarrow \sin \beta - \sin \alpha > \beta - \alpha$. داریم:

$$\beta - \alpha < \sin(\beta - \alpha) = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{1 + \sin \beta \sin \alpha} < \sin \beta - \sin \alpha$$

(برای هر کمان غیر صفری که انتهای آن در ربع اول باشد، داریم: $\sin x < x$).
 (۲) الف) به حل مسأله الف) اکتفا می‌کنیم، زیرا مسأله ب) هم با همان روش حل می‌شود.

دایره به شعاع واحد و به مرکز O را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۸).
 کمان‌های AE و AF را، به ترتیب، برابر α و β می‌گیریم. از نقطه‌های E و F ، عمودهای EM و FP را بر شعاع OA فرود می‌آوریم. داریم:

$$S_{OEA} = \frac{1}{2} \sin \alpha, \quad S_{OFA} = \frac{1}{2} \sin \beta,$$

$$S_{\triangle OEA} = \frac{1}{2} \alpha, \quad S_{\triangle OFA} = \frac{1}{2} \beta$$

و به سادگی روشن می‌شود که

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع } OAE}} < \frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\text{قطاع } OAF}}$$

در واقع

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع } OAE}} < \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OEM}}, \quad \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\text{قطاع } OEF}} > \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}},$$

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OEM}} = \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}}$$

از نابرابری $S_{\Delta OBC} : S_{\text{قطاع } OEF} > S_{\Delta OAB} : S_{\text{قطاع } OAE}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC}}{S_{\text{قطاع } OAE} + S_{\text{قطاع } OEF}} > \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع } OAE}},$$

$$\frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\text{قطاع } OAF}} > \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع } OAE}}$$

که اثبات را کامل می‌کند.

۰۲۸۹ فرض کنید:

$$\arccos \sin \alpha = \arcsin x = \alpha$$

که در آن $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ، زیرا $0 \leq \cos \arcsin x \leq 1$ (زیرا

$\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). به دست می‌آید: $\sin \alpha = \cos \arcsin x$ و بنابراین

$$\arcsin x = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad \text{و} \quad x = \sin \left[\pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = \pm \cos \alpha$$

به همین ترتیب، فرض کنید: $\arccos \cos x = \beta$ ، $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$

زیرا $0 \leq \sin \arccos x \leq 1$ ؛ چرا که $0 \leq \arccos x \leq \pi$

و $\cos \beta = \sin \arccos x$ و در نتیجه

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} \pm \beta \quad \text{و} \quad x = \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \beta\right) = \pm \sin \beta$$

اکنون از رابطه $\cos \alpha = \sin \beta = \pm x$ به دست می‌آید:

$$\alpha + \beta = \arccos \cos \arccos x + \arcsin \sin \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

۲۹۰. فرض می‌کنیم، مجموع

$$\cos^{32} x + a_{31} \cos^{31} x + a_{30} \cos^{30} x + a_{29} \cos^{29} x + \dots$$

$$\dots + a_2 \cos^2 x + a_1 \cos x \quad (*)$$

به ازای همه مقدارهای x ، مثبت باشد. x را به $x + \pi$ تبدیل می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$\cos^{32}(x + \pi) + a_{31} \cos^{31}(x + \pi) + a_{30} \cos^{30}(x + \pi) +$$

$$+ a_{29} \cos^{29}(x + \pi) + \dots + a_2 \cos^2(x + \pi) +$$

$$+ a_1 \cos(x + \pi) = \cos^{32} x - a_{31} \cos^{31} x + a_{30} \cos^{30} x -$$

$$- a_{29} \cos^{29} x + \dots + a_2 \cos^2 x - a_1 \cos x \quad (**)$$

که باز هم باید به ازای همه مقدارهای x ، مثبت باشد. در این صورت، نصف مجموع دو عبارت $(*)$ و $(**)$ هم، یعنی

$$\cos^{32} x + a_{30} \cos^{30} x + \dots + a_2 \cos^2 x + a_1 \cos x$$

به ازای همه مقدارهای x ، مثبت می‌شود. اکنون در عبارت اخیر، x را به

$$x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos 32\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + a_{30} \cos 30\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + a_{28} \cos 28\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \dots$$

$$\dots + a_4 \cos 4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + a_2 \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos 32x - a_{30} \cos 30x + a_{28} \cos 28x - \dots + a_4 \cos 4x - a_2 \cos 2x$$

اکنون اگر نصف مجموع عبارت‌های اخیر را پیدا کنیم، به عبارت

$$\cos 32x + a_{28} \cos 28x + a_{24} \cos 24x + \dots + a_8 \cos 8x + a_4 \cos 4x$$

می‌رسیم که باید به ازای همه مقدارهای x ، مثبت باشد.

در عبارت اخیر، x را به $x + \frac{\pi}{4}$ تبدیل می‌کنیم، از نصف مجموع دو

عبارت به دست می‌آید:

$$\cos 32x + a_{24} \cos 24x + a_{16} \cos 16x + a_8 \cos 8x$$

که اگر در آن x را به $x + \frac{\pi}{8}$ تبدیل کنیم و نصف مجموع دو عبارت را

به دست آوریم، به عبارت

$$\cos 32x + a_{16} \cos 16x$$

می‌رسیم و، سپس، با تبدیل x به $x + \frac{\pi}{16}$ با همان روش، سرانجام به عبارت

$$\cos 32x$$

می‌رسیم که باید به ازای هر مقداری از x مثبت باشد، درحالی که مثلاً به ازای $x = \pi$ برابر عدد منفی ۱ — می‌شود. عبارت مفروض همیشه مثبت نیست.

$$۰.۲۹۱ \text{ می‌دانیم } 2 \sin \frac{\alpha}{4} = \pm \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} \text{ و علامت } + \text{ یا } - ،$$

باتوجه به علامت سینوس در نظر گرفته می‌شود. این دستور را برای محاسبه

سینوس هریک از این زاویه‌ها به کار می‌بریم:

$$a_1, 45^\circ, \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2}\right) 45^\circ, \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4}\right) 45^\circ, \dots$$

$$\dots, \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2^{n-1}}\right) 45^\circ$$

باتوجه به این که a_1 می‌تواند برابر ۱ یا -۱ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} 2 \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}}{2^k} \right) 45^\circ &= \\ &= \left[\pm 90^\circ \pm \left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + \dots + \frac{a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1}}{2^{k-1}} \right) 45^\circ \right] \end{aligned}$$

که در آن علامت + برای $a = 1$ و علامت - برای $a = -1$ است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \cos \left[\pm 90^\circ \pm \left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + \dots + \frac{a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1}}{2^{k-1}} \right) 45^\circ \right] &= \\ &= \sin \left[a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + \dots + \frac{a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1}}{2^{k-1}} \right] 45^\circ \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}}{2^k} \right) 45^\circ &= \\ &= \pm \sqrt{2 + 2 \sin \left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + \dots + \frac{a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1}}{2^{k-1}} \right) 45^\circ} \end{aligned}$$

اکنون توجه می‌کنیم که همه زاویه‌ها، از لحاظ قدر مطلق، از ۹۰ درجه کوچکترند، زیرا اگر حتی همه a_i ‌ها را برابر ۱ بگیریم. داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) 45^\circ = 90^\circ - \frac{1}{2^n} 45^\circ < 90^\circ$$

درضمن، چون، علامت جلو رادیکال بستگی به علامت a_1 دارد، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} 2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}}{2^k} \right) 45^\circ = \\ = a_1 \sqrt{2 + 2 \sin \left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + \dots + \frac{a_2 a_3 \dots a_{k+1}}{2^{k-1}} \right) 45^\circ} \end{aligned}$$

حالا با توجه به رابطه روشن $2 \sin(a_1 45^\circ) = a_1 \sqrt{2}$ می‌توان پشت سرهم نوشت:

$$2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} \right) 45^\circ = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2}};$$

$$2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} \right) 45^\circ = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + a_3 \sqrt{2}}};$$

$$2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} + \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{8} \right) 45^\circ =$$

$$= a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + a_3 \sqrt{2 + a_4 \sqrt{2}}}}$$

.

$$2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2^{n-1}} \right) 45^\circ =$$

$$= a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + a_3 \sqrt{2 + \dots + a_n \sqrt{2}}}}$$

۰۴۹۲. فرض می‌کنیم، پس از بسط عبارت، به دست آید:

$$\begin{aligned} (1 - 3x + 3x^2)^{44} (1 + 3x - 3x^2)^{44} = A_0 + A_1 x + \\ + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n \end{aligned}$$

که در آن، $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ ضرایب‌های عددی عبارت‌اند که باید مجموع آن‌ها را محاسبه کنیم؛ n ، درجه چندجمله‌ای است:

به دست می‌آید: $n = 743 \times 2 + 744 \times 2 = 2974$. اگر در این اتحاد $x = 1$ بگیریم،

$$1^{743} \times 1^{744} = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

یعنی، مجموع ضریب‌های عددی بسط عبارت مفروض، برابر واحد است. **۲۹۳.** هر يك از دو عبارت، بعد از باز کردن پرانتزها، به صورت يك چندجمله‌ای بر حسب x در می‌آید. اگر در این چندجمله‌ای‌ها، x را به $-x$ تبدیل کنیم، دو عبارت جدید بر حسب x به دست می‌آید که، در آن‌ها ضریب توان‌های زوج x ، همان ضریب‌های توان‌های متناظر خود در عبارت‌های قبلی است، در حالی که ضریب‌های توان‌های فرد x در عبارت‌های جدید، قرینه ضریب‌های توان‌های فرد متناظر در عبارت‌های اصلی است. به این ترتیب، با تبدیل x به $-x$ ، ضریب x^{2^0} در دو عبارت تغییر نمی‌کند. با تبدیل x به $-x$ به این دو عبارت می‌رسیم:

$$(1 + x^2 + x^3)^{1^{000}} \text{ و } (1 - x^2 - x^3)^{1^{000}}$$

و روشن است که ضریب x^{2^0} در $(1 + x^2 + x^3)^{1^{000}}$ بزرگتر است از ضریب x^{2^0} در عبارت دوم. در واقع، بعد از بسط دو عبارت، ضریب‌ها از لحاظ قدر مطلق برابرند، ولی در اولی همه ضریب‌ها مثبت و در دومی، برخی مثبت و برخی دیگر منفی هستند.

۲۹۴. حکم مساله، نتیجه‌ای از تبدیل‌های روشن زیر است:

$$\begin{aligned} (1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{1^{00}})(1 + x + x^2 + \dots + x^{1^{00}}) &= \\ = [(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{1^{00}}) - x(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{98})] \times \\ \times [(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{1^{00}}) + x(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{98})] &= \\ = (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{1^{00}})^2 - x^2(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{98})^2 \end{aligned}$$

۲۹۵. الف) اگر از دستور مجموع در تصاعد هندسی و دستور بسط دو جمله‌ای استفاده کنیم، به ترتیب داریم:

$$(1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + x^2(1+x)^{998} + \dots + x^{1000} =$$

$$= \frac{\frac{x^{1001}}{1+x} - (1+x)^{1000}}{\frac{x}{1+x} - 1} = \frac{x^{1001} - (1+x)^{1001}}{x - 1 - x} =$$

$$= (1+x)^{1001} - x^{1001} = 1 + 1001x + \\ + C(1001, 2)x^2 + C(1001, 3)x^3 + \dots + 1001x^{1000}$$

بنابراین ضریب x^{50} برابر است با

$$C(1001, 50) = \frac{1001!}{50!951!}$$

ب) اگر عبارت مفروض را $P(x)$ بنامیم، داریم:

$$(1+x)P(x) - P(x) = [(1+x)^2 +$$

$$+ 2(1+x)^2 + \dots + 999(1+x)^{1000} + 1000(1+x)^{1001}] -$$

$$- [(1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \dots + 1000(1+x)^{1000}] =$$

$$= 1000(1+x)^{1001} - [(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots$$

$$+ (1+x)^{1000}] = 1000(1+x)^{1001} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{1+x-1} =$$

$$= 1000(1+x)^{1001} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{x}$$

در نتیجه

$$P(x) = \frac{100(1+x)^{1001}}{x} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{x^2} =$$

$$= 1000[1001 + C(1001, 2)x + C(1001, 3)x^2 + \dots +$$

$$+ 1001x^{999} + x^{1000}] - [C(1001, 2) + C(1001, 3)x + \\ + C(1001, 4)x^2 + \dots + 1001x^{998} + x^{999}]$$

بنابراین، ضرب مطلوب، برابر است با

$$1000C(1001, 51) - C(1001, 52) = \frac{1000 \times 1001!}{51!950!} -$$

$$- \frac{1001!}{52!949!} = \frac{1001!}{52!950!} [52 \times 1000 - 950] = \frac{51050 \times 1001!}{52!950!}$$

۴۹۶. ابتدا مقدار ثابت را، در عبارتی که از بسط عبارت

$$\underbrace{(\dots((x-2)-2)^2 - \dots - 2)^2}_{k \text{ مرتبه}}$$

به دست می‌آید، پیدا می‌کنیم. این مقدار به ازای $x=0$ به دست می‌آید، یعنی

$$\underbrace{(\dots(((- 2)^2 - 2)^2 - \dots - 2)^2}_{k \text{ مرتبه}} =$$

$$= (\dots((4-2)^2 - 2)^2 - \dots - 2)^2 =$$

$k-1$ مرتبه

$$= (\dots((4-2)^2 - 2)^2 - \dots - 2)^2 = \dots$$

$k-2$ مرتبه

$$\dots = ((4-2)^2 - 2)^2 = (4-2)^2 = 4$$

اکنون ضریب x را با A_k ، ضریب x^2 را با B_k نشان می‌دهیم و مجموع همه جمله‌هایی را که در آن‌ها، توان x ، از ۲ بزرگتر است، به صورت $P_k x^3$ در نظر می‌گیریم، یعنی

$$(\dots((x-2)^2 - 2)^2 - \dots - 2)^2 = P_k x^3 + B_k x^2 + A_k x + 4$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\dots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\dots-2)^2}_{k \text{ مرتبه}} = \\
 & = ((\dots((x-2)^2-2)^2-\dots-2)^2-2)^2 = \\
 & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{k-1 \text{ مرتبه}} = \\
 & = [(P_{k-1}x^2 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}x + 2) - 2] = \\
 & = (P_{k-1}x^2 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}x + 2)^2 = \\
 & = P_{k-1}^2x^4 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^4 + (2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2)x^4 + \\
 & + (2P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1})x^2 + (2B_{k-1} + A_{k-1}^2)x^2 + A_{k-1}x + \\
 & + 2 = [P_{k-1}^2x^2 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^2 + (2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2)x + \\
 & + (2P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1})]x^2 + (2B_{k-1} + A_{k-1}^2)x^2 + 2A_{k-1}x + 2
 \end{aligned}$$

از این جا $B_k = A_{k-1}^2 + 2B_{k-1}$ و $A_k = 2A_{k-1}$

چون $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 2$ ، بنابراین $A_1 = -4$

$$A_2 = -4 \times 2 = -4^2, A_3 = -4^3, \dots, A_k = -4^k$$

به محاسبه B_k می پردازیم:

$$\begin{aligned}
 B_k &= A_{k-1}^2 + 2B_{k-1} = A_{k-1}^2 + 2(A_{k-2}^2 + 2B_{k-2}) = \\
 &= A_{k-1}^2 + 2A_{k-2}^2 + 4B_{k-2} = \\
 &= A_{k-1}^2 + 2A_{k-2}^2 + 4A_{k-3}^2 + 8B_{k-3} = \dots \\
 &= A_{k-1}^2 + 2A_{k-2}^2 + 4A_{k-3}^2 + \dots + \\
 &+ 4^{k-2}A_1^2 + 4^{k-1}B_1
 \end{aligned}$$

و اگر قرار دهیم:

$$B_1 = 1, A_1 = -4, A_2 = -4^2,$$

$$A_3 = -4^3, \dots, A_{k-1} = -4^{k-1}$$

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} B_k &= 4^{2k-2} + 4 \times 4^{2k-4} + 4^2 \times 4^{2k-6} + \dots + 4^{k-2} \times 4^2 + \\ &+ 4^{k-1} \times 1 = 4^{2k-2} + 4^{2k-3} + 4^{2k-4} + \dots + 4^{k+1} + 4^k + \\ &+ 4^{k-1} = 4^{k-1}(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{k-2} + 4^{k-1}) = \\ &= 4^{k-1} \times \frac{4^k - 1}{4 - 1} = \frac{4^{2k-1} - 4^{k-1}}{3} \end{aligned}$$

۲۹۷. الف) داحل اول. دو جمله‌ای $x^k - 1$ برای هر عدد درست و مثبت k ، مضربی است از $k - 1$ و بنابراین، از تقسیم عبارت

$$\begin{aligned} x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} &= (x - 1) + (x^3 - 1) + \\ &+ (x^9 - 1) + (x^{27} - 1) + (x^{81} - 1) + (x^{243} - 1) + 6 \end{aligned}$$

بر $x - 1$ ، به باقی مانده‌ای برابر ۶ می‌رسیم.

داحل ۴۰۰. $q(x)$ و r را به ترتیب، خارج قسمت و باقی مانده حاصل از تقسیم عبارت مفروض بر $x - 1$ می‌گیریم، یعنی

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = (x - 1)q(x) + r$$

که اگر در این اتحاد، $x = 1$ بگیریم، به دست می‌آید: $r = 6$.

ب) $q_1(x)$ را خارج قسمت و $r_1x + r_2$ را باقی مانده حاصل از تقسیم عبارت مفروض بر $x^2 - 1$ می‌گیریم:

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = (x^2 - 1)q_1(x) + r_1x + r_2$$

اگر در این اتحاد، یکبار $x = 1$ و بار دیگر $x = -1$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 6 = r_1 + r_2 \\ -6 = -r_1 + r_2 \end{cases} \Rightarrow r_1 = 6, r_2 = 0$$

یعنی باقی مانده مطلوب، برابر است با $6x$.

۲۹۸. $p(x)$ را چند جمله‌ای مقسوم، $q(x)$ را خارج قسمت و

$r(x) = ax + b$ را باقی‌مانده حاصل از تقسیم $p(x)$ بر $(x-1)(x-2)$ می‌گیریم:

$$p(x) = (x-1)(x-2)q(x) + ax + b \quad (*)$$

بنابر شرط مسأله داریم:

$$p(x) = (x-1)q_1(x) + 2 \Rightarrow p(1) = 2$$

$$p(x) = (x-2)q_2(x) + 1 \Rightarrow p(2) = 1$$

اکنون، اگر در $(*)$ ، یکبار $x=1$ و بار دیگر $x=2$ فرض کنیم، به دست می‌آید.

$$\begin{cases} 2 = p(1) = a + b \\ 1 = p(2) = 2a + b \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 3$$

یعنی باقی‌مانده مطلوب برابر $3 - x$ است.

۲۹۹. داریم:

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

از طرف دیگر، داریم:

$$\begin{aligned} x^{12} - 1 &= (x^6 - 1)(x^6 + 1) = \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 &= \frac{x^{12} - 1}{(x - 1)(x^3 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \\ &= \frac{x^{12} - 1}{x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1} \end{aligned}$$

در نتیجه، به جای تقسیم $1 - x^{1951}$ بر $1 + x + 2x^2 + x^3 + x^4$ می‌توان $1 - x^{1951}$ را بر $1 - x^{12}$ تقسیم و، خارج قسمت حاصل را در عبارت

$$1 - x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1$$

ضرب کرد. داریم:

$$\frac{1 - x^{1951}}{1 - x^{12}} = 1 + x^{1939} + x^{1927} + x^{1915} + x^{1903} + \dots +$$

$$+ x^{19} + x^7 + \frac{x^7 - 1}{1 - x^{12}}$$

به این ترتیب، ضریب x^{14} را باید در حاصل ضرب

$$\left(1 + x^{1939} + x^{1927} + x^{1915} + \dots + x^{31} + x^{19} + x^7 + \frac{x^7 - 1}{1 - x^{12}} \right) \times$$

$$\times (1 - x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$$

پیدا کرد و، این ضریب، برابر است با -1 .

۳۰۰. از اتحاد مفروض نتیجه می‌شود که $P(x)$ بر x بخش پذیر است.

اگر $P(x)$ را، نسبت به x ، از درجه n فرض کنیم و $P(x) = P_n(x)$ بگیریم، داریم:

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x)$$

$(P_{n-1}(x))$ نسبت به x ، از درجه $n-1$ است). بنابراین، اگر در این رابطه x را به $x-1$ تبدیل کنیم:

$$P(x-1) = (x-1)P_{n-1}(x-1)$$

در نتیجه

$$x(x-1)P_{n-1}(x-1) = xP(x-1) = (x-26)P(x)$$

یعنی $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است، یعنی $P_n(x) = x(x-1)P_{n-2}(x)$ در عبارت اخیر، x را به $x-1$ تبدیل می‌کنیم:

$$P(x-1) = (x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1)$$

از این جا

$$(x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1) = (x-26)P_n(x) \cdot x(x-1)P_{n-2}(x)$$

که از آن روشن می‌شود $P_n(x)$ بر $x-2$ بخش پذیر است، یعنی

$$P_n(x) = x(x-1)(x-2)P_{n-3}(x)$$

با استدلالی مشابه ثابت می‌شود که $P(x)$ بر $x-3$ بخش پذیر است:

$$P_n(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)P_{n-4}(x)$$

اگر این روش استدلال را ادامه دهیم، سرانجام به دست می‌آید:

$$P(x) = P_n(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-25)P_{n-26}(x)$$

و اگر آن را در اتحاد فرض مساله قرار دهیم:

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-26)P_{n-26}(x-1) =$$

$$= (x-26)x(x-1)\dots(x-25)P_{n-26}(x)$$

از این جا نتیجه می‌شود که برای چندجمله‌ای $P_{n-26}(x) = Q(x)$ ، که از درجه $(n-26)$ است داریم:

$$Q(x-1) = Q(x) \quad (*)$$

و این ممکن نیست مگر $c = Q_0(x) = Q(x)$ (یعنی $Q(x)$ مقداری است ثابت). در واقع، اگر داشته باشیم:

$$Q(x) = Q_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$$

$(k \geq 1 \text{ و } a_0 \neq 0)$ ، آن وقت اتحاد $(*)$ به این صورت در می‌آید:

$$a_0(x-1)^k + a_1(x-1)^{k-1} + \dots \equiv a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots$$

و اگر در این اتحاد، ضریب x^{k-1} را در دو طرف، با هم برابر قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$ka_0 + a_1 = a_1 \Rightarrow a_0 = 0$$

که با فرض $a_0 \neq 0$ متناقض است. به این ترتیب $k=0$ و $Q(x)=c$ ؛ یعنی

$$P(x) = cx(x-1)(x-2)\dots(x-25)$$

که یک چندجمله‌ای از درجه بیست و ششم است.

۳۰۱. الف) وقتی همه ضریب‌های $P(x)$ ، عددهایی نسامنفی باشند، همه عددهای $s(1)$ ، $s(2)$ ، $s(3)$ ، ... وجود خواهند داشت. اکنون عدد طبیعی k را طوری انتخاب می‌کنیم که، عدد $N = 10^k$ ، از همه ضریب‌های $a_0, a_1, \dots, a_n$ بزرگتر باشد و عدد $P(N) = P(10^k)$ را تشکیل می‌دهیم. این عدد با همان رقم‌های ضریب a_0 آغاز می‌شود، بعد از آن (و ممکن است بعد از چند رقم برابر صفر) رقم‌های a_1 می‌آید، سپس (و باز هم احتمالاً بعد از چند رقم برابر صفر)، رقم‌های a_2 ظاهر می‌شود و غیره؛ در پایان، با رقم‌های عدد a_n سروکار پیدا می‌کنیم. بنابراین، عدد $S = s(10^k)$ برابر است با مجموع همه رقم‌های عددهای $a_0, a_1, \dots, a_n$. به همین ترتیب، عددهای $s(10^{k+1})$ ، $s(10^{k+2})$ ، ... برابر همان عدد S می‌شوند. به این ترتیب، عدد S در دنباله $s(1)$ ، $s(2)$ ، ... بی‌نهایت بار ظاهر می‌شود.

ب) روشن است که، اگر ضریب بزرگترین درجه یعنی a_0 ، عددی منفی باشد، آن وقت تنها تعداد محدودی از عددهای $s(1)$ ، $s(2)$ ، ... معنا پیدا می‌کنند (زیرا در این حالت، اگر x را به اندازه کافی بزرگ بگیریم، علامت چندجمله‌ای $P(x)$ ، با علامت a_0 یکی می‌شود؛ مثلاً توجه کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{a_0 x^n} = 1.$$

بنابراین، کافی است که تنها به حالت $a_0 > 0$ ،

پردازیم. ثابت می‌کنیم، با شرط $a_0 > 0$ ، عدد $M > 0$ وجود دارد، به نحوی که چندجمله‌ای $P(x) = P(x+M)$ مثبت است. با اثبات این مطلب به این نتیجه می‌رسیم که دنباله $\bar{s}(1)$ ، $\bar{s}(2)$ ، $\bar{s}(3)$ ، ... که از مجموع رقم‌ها در عددهای $\bar{P}(1)$ ، $\bar{P}(2)$ ، $\bar{P}(3)$ ، ... به دست می‌آید، بی‌نهایت جمله برابر دارد و چون

$$\bar{s}(1) = s(M+1), \bar{s}(2) = s(M+2), \bar{s}(3) = s(M+3), \dots$$

بنابراین، در دنباله $s(1)$ ، $s(2)$ ، $s(3)$ ، ... هم، بی‌نهایت عدد برابر با یکدیگر، پیدا می‌شود.

اکنون به اثبات حکمی می‌پردازیم که در بالا مطرح کردیم. داریم:

$$\begin{aligned} \bar{P}(x) &= P(x+M) = a_0(x+M)^n + a_1(x+M)^{n-1} + \dots \\ &\dots + a_{n-1}(x+M) + a_n = \bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1}x + \bar{a}_n \end{aligned}$$

و با توجه به دستور بسط دوجمله‌ای به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= a_0.C(n, i)M^{n-i} + a_1.C(n-1, i)M^{n-i-1} + \dots + a_i \\ (i &= 0, 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

بنابراین $\bar{a}_i$ به صورت یک چندجمله‌ای از درجه $n-i$ ، نسبت به متغیر M است و برای ضریب بزرگترین درجه آن داریم:

$$a_0.C(n, 1) > 0$$

که به ازای مقادارهای به قدر کافی بزرگ M ، مثبت است.

۳۰۲. جمله‌های ثابت چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(y)$ را برابر a_0 و

b_0 می‌گیریم:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n; \quad g(y) = b_0 + b_1y + \dots + b_my^m$$

در اتحاد $1 + x^{200}y^{200} = f(x) \cdot g(y)$ قرار می‌دهیم $x=0$ ، به دست می‌آید:

$$a_0 \cdot g(y) = 1 \Rightarrow g(y) = \frac{1}{a_0}$$

وقتی که به ازای همه مقادارهای y ، داشته باشیم $g(y) = \frac{1}{a_0}$ ، به معنای آن

است که $g(y)$ مقداری ثابت و یک چندجمله‌ای از درجه صفر است. به همین-

ترتیب به دست می‌آید: $f(x) = \frac{1}{b_0}$ ، به این ترتیب، به این نتیجه می‌رسیم:

$$f(x) \cdot g(y) = \frac{1}{a_0 b_0} \neq x^{200}y^{200} + 1$$

۳۰۳. وقتی معادله $ax^2 + bx + c = x$ ریشه حقیقی نداشته باشد،

به معنای آن است که سه جمله‌ای درجه دوم

$p(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$ ، به ازای همه مقادارهای x ، تنها یک

علامت دارد و مثلاً $p(x) - x > 0$. اگر در این نابرابری، x را به $p(x_0)$ تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$p(p(x_0)) - p(x_0) > 0 \Rightarrow p(p(x_0)) > p(x_0) > x_0.$$

و نابرابری $p(p(x_0)) > x_0$ به معنای آن است که معادله درجه چهارم $p(p(x)) = x$ نمی‌تواند ریشه‌ای مثل x_0 داشته باشد.

۰۳۰۴. $a \geq 0$ می‌گیریم. (در غیر این صورت، می‌توانیم به جای چند جمله‌ای $p(x)$ ، چند جمله‌ای $p(x) - a$ را در نظر بگیریم که، در این صورت، در شرط‌های مساله تغییری حاصل نمی‌شود). همچنین فرض می‌کنیم $b \geq 0$ (در حالتی که b منفی باشد، می‌توانیم به جای $p(x)$ ، چندجمله‌ای $p(-x)$ را در نظر بگیریم). اکنون $x = 0$ ، $x = 1$ و $x = -1$ را در نابرابری $|p(x)| \leq 1$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$|c| \leq 1, |a+b+c| \leq 1, |a-b+c| \leq 1$$

یعنی $|c| \leq 1$ ، $|a+b| \leq 2$ و $|a-b| \leq 2$.

علاوه بر این، اگر $c \geq 0$ ، آن وقت برای $|x| \leq 1$ خواهیم داشت $0 \leq cx^2 \leq c$ و همچنین $-b \leq bx \leq b$ و این، به معنای آن است که، برای $|x| \leq 1$ داریم:

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a \leq c + b - a \leq 1;$$

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a \geq 0 + (-b) + a = a - b \geq -2$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود $|p_1(x)| \leq 2$.

به همین ترتیب، در حالت $c \leq 0$ داریم $c \leq cx^2 \leq 0$ و $-b \leq bx \leq b$

پس

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a \leq 0 + b + a = a + b \leq 2,$$

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a \geq c + (-b) + a = a - b + c \geq -1$$

که باز هم به همان نتیجه $|p_1(x)| \leq 2$ می‌رسیم.

۰۳۰۵. اگر $a = 0$ ، آن وقت سه معادله (۱)، (۲)، و (۳) درجه

اول و برهم منطبق می‌شوند. در این حالت داریم $x_1 = x_2 = x_3$. در حالت $c = 0$ ، می‌توان $x_1 = -\frac{b}{a}$ ، $x_2 = \frac{b}{a}$ و $x_3 = 0$ گرفت و، در این صورت، x_3 ، بین x_1 و x_2 قرار دارد. از این به بعد $a \neq 0$ و $c \neq 0$ می‌گیریم. اگر $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ آن وقت

$$\frac{a}{4}x_1^2 + bx_1 + c = (ax_1^2 + bx_1 + c) - \frac{a}{4}x_1^2 = -\frac{a}{4}x_1^2$$

به همین ترتیب، اگر $-ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ آن وقت

$$\frac{a}{4}x_2^2 + bx_2 + c = (-ax_2^2 + bx_2 + c) + \frac{3}{4}ax_2^2 = \frac{3}{4}ax_2^2$$

به این ترتیب $\frac{a}{4}x_1^2 + bx_1 + c = \frac{3}{4}ax_1^2$ و $\frac{a}{4}x_2^2 - bx_2 + c = -\frac{1}{4}ax_2^2$ دارای علامت‌های مختلف‌اند. و این، به معنای آن است که نقطه‌های

$$y = f(x) = \frac{a}{4}x^2 + bx + c \text{ که بر سهمی } (x_1, f(x_1)) \text{ و } (x_2, f(x_2))$$

قرار دارند، در دو طرف محور Ox واقع می‌شوند، یعنی در فاصله بین آن‌ها، نقطه $(0, x_3)$ وجود دارد که، در آن‌جا، سهمی $f(x)$ ، محور Ox را قطع می‌کند. x_3 همان عدد مورد نظر ما و یکی از ریشه‌های معادله (۳) است.

۳۰۶. α و β ریشه‌های معادله $x^2 + px + q = 0$ اند، بنابراین

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q$$

بنابراین

$$\begin{aligned} (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) &= \\ &= [(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)][(\delta - \alpha)(\delta - \beta)] = \\ &= (\gamma^2 + p\gamma + q)(\delta^2 + p\delta + q) \end{aligned}$$

اکنون، اگر به رابطه‌های $\gamma + \delta = -p$ و $\gamma\delta = q$ توجه داشته باشیم،

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = \\ & = (\gamma^2 + p\gamma + q)(\delta^2 + p\delta + q) = \\ & = \gamma^2\delta^2 + p\gamma^2\delta + q\gamma^2 + p\gamma\delta^2 + p^2\gamma\delta + pq\gamma + q\delta^2 + \\ & + pq\delta + q^2 = (\gamma\delta)^2 + p\gamma\delta(\gamma + \delta) + q[(\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta] + \\ & + p^2\gamma\delta + pq(\gamma + \delta) + q^2 = Q^2 - PPQ + q(P^2 - 2Q) + \\ & + p^2Q - pqP + q^2 = Q^2 + q^2 - PP(Q + \\ & + q) + qP^2 + p^2Q - 2qQ \end{aligned}$$

۳۰۷. داهل اول. پارامتر a را بین دو معادله حذف می‌کنیم (a را از معادله دوم برحسب x محاسبه کرده و به جای a در معادله اول قرار می‌دهیم؛ به ترتیب، به دست می‌آید:

$$a = -(x^2 + x); \quad x^2 - (x^2 + x)x + 1 = 0; \quad x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

و چون $a = -(x^2 + x)$: پس $a = -2$ و $a_2 = 1$.

داهل دوم. با توجه به نتیجه مسئله ۳۰۶، برای این که معادله‌های مفروض، دست کم یک ریشه مشترک داشته باشند، لازم و کافی است که عبارت

$$\begin{aligned} a^2 + 1 - a \times 1(a + 1) + 1 + a^2 - 2a &= a^2 - 3a + 2 = \\ &= (a - 1)(a^2 + a - 2) = (a - 1)^2(a + 2) \end{aligned}$$

برابر صفر شود؛ از آن جا $a_1 = -2$ ، $a_{2,3} = 1$.

۳۰۸. الف) این اتحاد را در نظر می‌گیریم:

$$(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c)$$

اگر در دو طرف برابری، $x = -b$ قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$(b+a)(b+10)=-1$$

چون a و b عددهایی درست‌اند، تنها دو امکان وجود دارد:

$$(۱) \quad b+10=1 \text{ و } b+a=-1, \text{ که از آن جا به دست می‌آید:}$$

$$b=-9 \text{ و } a=8. \text{ در این صورت خواهیم داشت:}$$

$$(x-8)(x-10)+1=(x-9)^2$$

$$(۲) \quad b+10=-1 \text{ و } b+a=1, \text{ از آن جا } b=-11 \text{ و } a=12 \text{ و}$$

$$(x-12)(x-10)+1=(x+11)^2$$

(ب) چندجمله‌ای درجهٔ چهارم، ممکن است به یکی از دو صورت قابل

تجزیه باشد:

(A) عبارت مفروض به یک عامل درجهٔ اول و یک عامل درجهٔ سوم

تجزیه شود:

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x+p)(x^2+qx^2+rx+s) (*)$$

در اتحاد (*)، پشت سرهم به جای x قرار می‌دهیم $x=0$ ، $x=a$ ،

$x=b$ و $x=c$. چون عدد ۱ را تنها به یکی از دو صورت 1×1 یا

$(-1)(-1)$ می‌توان نوشت، بنابراین چهار عدد مختلف $p+0$ ،

$a+p$ ، $b+p$ و $c+p$ ، تنها می‌توانند برابر یکی از عددهای 1 یا -1

باشند که ممکن نیست (زیرا، a ، b ، c و d ، چهار عدد مختلف‌اند).

(B) عبارت درجه چهارم مفروض، به دو عامل درجهٔ دوم تجزیه شود:

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$$

دوباره، اگر $x=0$ ، $x=a$ ، $x=b$ و $x=c$ بگیریم، روشن می‌شود که

دو چندجمله‌ای x^2+px+q و x^2+rx+s باید هر دو برابر ۱ یا هر دو

برابر -1 باشند. در ضمن، سه جمله‌ای درجهٔ دوم x^2+px+q نمی‌تواند،

به ازای سه مقدار متمایز x ، برابر α شود، زیرا اگر چنین باشد، به معنای

آن است که معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+px+q-\alpha=0$ ، باید سه ریشهٔ متمایز

داشته باشد. از این جا نتیجه می‌شود که، سه جمله‌ای باید به ازای دو مقدار

از چهار مقدار $x=0$ ، $x=a$ ، $x=b$ ، و $x=c$ و برابر ۱ و به ازای دو مقدار دیگر برابر ۱- باشد. فرض می‌کنیم:

$$0^2 + p \cdot 0 + q - q = 1$$

$$a^2 + p \cdot a + 1 = 1, \quad b^2 + p \cdot b + 1 = -1, \quad c^2 + p \cdot c + 1 = -1$$

از برابری $a^2 + pa = a(a+p) = 0$ با توجه به فرض $a \neq 0$ ، به دست می‌آید $p = -a$. بنابراین، دو برابری دیگر، چنین می‌شوند.

$$b^2 - ab = b(b-a) = -2 \quad \text{و} \quad c^2 - ac = c(c-a) = -2$$

که اگر برابری دوم را از برابری اول کم کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} b^2 - ab - c^2 + ac &= (b-c)(b+c) - a(b-c) = \\ &= (b-c)(b+c-a) = 0 \end{aligned}$$

چون $b \neq c$ ، بنابراین $b+c-a=0$ یا $a=b+c$ ، $b-a=-c$ ، $c-a=-b$.

اکنون برابری $b(b-a) = -2$ به صورت $b(b-a) = -2$ در می‌آید و به-دو جواب می‌رسیم:

$$b=1, \quad c=2, \quad a=b+c=3 \quad (1)$$

در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} x(x-a)(x-b)(x-c) + 1 &= x(x-3)(x-1)(x-2) + 1 = \\ &= (x^2 - 3x + 1)^2 \end{aligned}$$

و یا

$$b=-1, \quad c=-2, \quad a=b+c=-3 \quad (2)$$

و برای چند جمله‌ای

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$$

به همین ترتیب، می‌توان حالتی را مورد بررسی قرارداد که سه جمله‌ای

$x^2 + px + q$ ، به ازای $x = 0$ و $x = a$ برابر ۱- و به ازای $x = b$ و $x = c$ برابر ۱+ شود:

$$q = -1, a^2 + pa - 1 = -1, b^2 + pb - 1 = 1,$$

$$c^2 + pc - 1 = 1$$

از آنجا

$$p = -a, b(b-a) = c(c-a) = 2, b^2 - ab - c^2 + ac = 0$$

یعنی

$$(b-c)(b+c-a) = 0, a = b+c, b-a = -c, -bc = 2$$

به این ترتیب، دو جواب دیگر برای عددهای a, b و c به دست می‌آید:

$$b = 2, c = -1, a = b+c = 1 \quad (3)$$

در این حالت

$$x(x-1)(x-2)(x+1)+1=(x^2-x-1)^2;$$

$$b = 1, c = -2, a = b+c = -1 \quad (4)$$

و بنابراین

$$x(x+1)(x-1)(x+2)+1=(x^2+x-1)^2$$

یادداشت. راه حل دیگری برای این مسأله، در پایان راه حل مسأله ۳۰۹-ب آمده است.

۳۰۹. الف) فرض می‌کنیم:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)=p(x).q(x)$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ ، چند جمله‌ای‌هایی با ضرایب‌های درست‌اند و مجموع درجه‌های این دو چند جمله‌ای، برابر n است. می‌توانیم ضریب بزرگترین درجه را، هم در $p(x)$ و هم در $q(x)$ ، برابر واحد بگیریم. اکنون، اگر در این برابری به ترتیب $x=a_1, x=a_2, \dots, x=a_n$ قرار دهیم و

توجه کنیم که، عدد $۱ -$ را، تنها به صورت $۱ \times - ۱$ می‌توان تجزیه کرد، به دست می‌آید:

$$p(x) = ۱, q(x) = -۱ \text{ یا } p(x) = -۱, q(x) = ۱$$

که باید به ازای هر مقدار از این n مقدار x برقرار باشند. بنابراین، مجموع $p(x) + q(x)$ ، به ازای $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ برابر است با صفر، یعنی $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ ، ریشه‌های معادله $p(x) + q(x) = 0$ اند و این، به معنای آن است که چندجمله‌ای $p(x) + q(x)$ بر حاصل ضرب

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

بخش پذیر است. از طرف دیگر، درجه معادله $p(x) + q(x) = 0$ ، برابر است با بزرگترین درجه در چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ ، یعنی از n کوچکتر است. تناقض حاصل نشان می‌دهد که تجزیه عبارت مفروض، به صورت $p(x) \cdot q(x)$ ممکن نیست.
(ب) فرض می‌کنیم:

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + ۱ = p(x) \cdot q(x)$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ ، چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب‌های درست‌اند و ضریب بزرگترین درجه در هر کدام از آن‌ها، برابر واحد است. با قرار دادن $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ در برابری بالا، به دست می‌آید:

$$p(x) = ۱, q(n) = ۱ \text{ یا } p(x) = -۱, q(x) = -۱$$

که باید به ازای هر کدام از این n مقدار x ، برقرار باشند.

به این ترتیب، تفاضل $p(x) - q(x)$ ، به ازای n مقدار مختلف x برابر صفر می‌شود، یعنی $p(x) - q(x) = 0$ و $p(x) \equiv q(x)$ (راه حل مساله ۳۵۹- الف) را ببینید). در ضمن n باید عدد زوج باشد: $n = 2k$ تا چند جمله‌ای‌های متجدد $p(x)$ و $q(x)$ از درجه k باشند. اکنون می‌توان نوشت:

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = [p(x)]^2 - ۱ =$$

$$= [p(x) + ۱] \cdot [p(x) - ۱]$$

می‌بینیم که حاصل ضرب دو چند جمله‌ای $p(x)+1$ و $p(x)-1$ به ازای مقادارهای $x=a_1, x=a_2, \dots, x=a_{2k}$ برابر صفر می‌شود، یعنی به ازای هریک از این $2k$ مقدار x ، دست کم یکی از عامل‌های سمت راست برابری، برابر صفر می‌شود. این، به معنای آن است که $p(x)+1$ یا $p(x)-1$ بر $x-a_1$ بخش پذیر است؛ همچنین یا $p(x)+1$ و یا $p(x)-1$ بر $x-a_2$ بخش پذیر است و غیره. چون چند جمله‌ای درجه k نمی‌تواند بر بیش از k عبارت درجه اول بخش پذیر باشد، و چون ضریب درجه k ام در حاصل ضرب این k عبارت به صورت $x-a_i$ برابر واحد است (یعنی چند جمله‌ای درجه k ام، برابر حاصل ضرب این عبارت‌های درجه اول می‌شود)، بنابراین $p(x)+1$ برابر حاصل ضرب k عامل از عامل‌های سمت چپ برابری و $p(x)-1$ برابر با حاصل ضرب k عامل دیگر است. برای روشن بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$p(x)+1=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2k-1}),$$

$$p(x)-1=(x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{2k})$$

از تفاضل این دو برابری به دست می‌آید:

$$2=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2k-1})-$$

$$-(x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{2k})$$

اگر در این برابری، مثلاً $x=a_2$ قرار دهیم، به تجزیه عدد ۲ به حاصل ضرب k عدد درست می‌رسیم:

$$2=(a_2-a_1)(a_2-a_2)\dots(a_2-a_n)$$

عدد ۲، تنها به سه صورت، قابل تجزیه به ضرب عددهای درست است، بنابراین بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت $k \leq 3$. حالت $k=3$ هم ممکن نیست. در واقع چون $(-2) \cdot (-1) \cdot 1 = 2$ ، بنابراین، با فرض $a_1 < a_2 < a_3$ با فرض

$$(a_2-a_1)(a_2-a_2)(a_2-a_3)=2$$

که در آن $a_2 - a_1 > a_2 - a_3 > a_2 - a_5$ ، نتیجه می‌شود:

$$a_2 - a_1 = 1, a_2 - a_3 = -1, a_2 - a_5 = -2$$

اکنون اگر $x = a_4$ قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) = 2$$

که در آن $a_4 - a_1 > a_4 - a_3 > a_4 - a_5$. از این جا به دست می‌آید:

$$a_4 - a_1 = 1, a_4 - a_3 = -1, a_4 - a_5 = -2$$

یعنی $a_4 = a_2$ که با شرط مساله متناقض است.

به این ترتیب، تنها دو حالت ممکن وجود دارد: $k = 1$ و $k = 2$.

این دو حالت را، به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱. اگر $k = 1$ ، آن وقت

$$2 = (x - a_1) - (x - a_2)$$

یعنی $a_2 = a_1 + 2$. برای سادگی کار، a_1 را با a نشان می‌دهیم، در این صورت

$$(x - a_1)(x - a_2) + 1 = (x - a)(x - a - 2) + 1 = (x - a - 1)^2$$

(حل مساله ۳۵۸- الف) را ببینید).

۲. اگر $k = 3$ ، آن وقت

$$2 = (x - a_1)(x - a_3) - (x - a_2)(x - a_4)$$

برای روشن بودن وضع فرض می‌کنیم $a_1 < a_3$ و $a_2 < a_4$. اگر در برابری

اخیر $x = a_2$ و $x = a_4$ قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$2 = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3), a_2 - a_1 > a_2 - a_3;$$

$$2 = (a_4 - a_1)(a_4 - a_3), a_4 - a_1 > a_4 - a_3$$

عدد ۲ را، تنها به یکی از دو صورت $2 = 2 \times 1$ یا $2 = (-2) \cdot (-1)$.

می‌توان تجزیه کرد. داریم $a_2 - a_1 < a_4 - a_1$ و بنابراین

$$a_2 - a_1 = -1, a_2 - a_3 = -2;$$

$$a_4 - a_1 = 2, a_4 - a_3 = 1$$

و اگر a_1 را با a نشان دهیم، آن وقت

$$a_2 = a - 1, a_3 = a + 1, a_4 = a + 2$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) + 1 &= \\ &= (x - a)(x - a + 1)(x - a - 1)(x - a - 2) + 1 = \\ &= [x^2 - (2a - 1)x + a^2 + a - 1]^2 \end{aligned}$$

(مسأله ۳۰۸-ب) را ببینید).

۳۱۰. مثل حل مسأله قبل، از برابری

$$(x - a_1)^2(x - a_2)^2(x - a_3)^2 \dots (x - a_n)^2 = p(x) \cdot q(x) \quad (*)$$

آغاز می‌کنیم، که در آن، $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای‌هایی با ضریب‌های درست‌اند (و البته، ضریب بزرگترین درجه در هر کدام از آن‌ها برابر واحد است) و نتیجه می‌گیریم که، به ازای هر یک از مقدارهای $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$:

$$p(x) = 1, q(x) = 1 \quad \text{یا} \quad p(x) = -1, q(x) = -1$$

اگر مثلاً، چندجمله‌ای $p(x)$ ، به ازای مقدار $x = a_i$ برابر $+1$ و به ازای $x = a_j$ برابر -1 باشد، آن وقت باید به ازای مقداری از x که بین a_i و a_j واقع است، برابر صفر شود که ممکن نیست، زیرا سمت چپ برابری (*) همواره از واحد بزرگتر است و هرگز برابر صفر نمی‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم، هر دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ ، به ازای $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ برابر $+1$ باشند؛ در این حالت چندجمله‌ای‌های $p(x) - 1$ و $q(x) - 1$ ، به ازای این مقدارهای x ، برابر صفر می‌شوند، یعنی $p(x) - 1$ و $q(x) - 1$ بر حاصل ضرب

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

بخش پذیر است. چون مجموع درجه‌های چندجمله‌ای‌های $p(x) - 1$ و

$q(x) - 1$ ، برابر است با درجه عبارت $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2$ ،
یعنی برابر $2n$ ، بنابراین

$$p(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

$$q(x) - 1 = (x - a_1) \dots (x - a_n)$$

(حل مسأله قبل را ببینید) و به این برابری می‌رسیم:

$$(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1 = p(x) \cdot q(x) =$$

$$= [(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1] \times$$

$$\times [(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1] =$$

$$= (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 +$$

$$+ 2(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \equiv 0$$

که ممکن نیست. در حالتی هم که $p(x)$ و $q(x)$ را در نقطه‌های
 $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ برابر ۱ - بگیریم، به همین نتیجه می‌رسیم؛
در حالتی که به ازای این مقدارهای x داشته باشیم: $p(x) = q(x) = 1$ ،
به دست می‌آید:

$$p(x) = q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$$

به این ترتیب، می‌بینیم که عبارت مفروض در مسأله را، نمی‌توان
به صورت ضرب دو چندجمله‌ای با ضرایب‌های درست، تجزیه کرد.

۳۱۱. فرض کنید: $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 7$ ؛

در این صورت، a, b, c, d ، ریشه‌های معادله $p(x) - 7 = 0$ می‌شوند و
چندجمله‌ای $p(x) - 7$ بر $x - a, x - b, x - c, x - d$ بخش پذیر
است، یعنی

$$p(x) - \gamma = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \cdot f(x)$$

که در آن، $f(x)$ ، می‌تواند برابر واحد باشد.

اکنون فرض می‌کنیم، چندجمله‌ای $p(x)$ ، مثلاً به‌ازای عدد درست $x=A$ برابر ۴ باشد. اگر در برابری اخیر $x=A$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$-3 = (A-a)(A-b)(A-c)(A-d)f(A)$$

که ممکن نیست، زیرا عددهای درست $A-a$ ، $A-b$ ، $A-c$ و $A-d$ دوه‌دو متمایزند و عدد ۳- را نمی‌توان به ضرب ۵ عدد درست متمایز تجزیه کرد، به نحوی که دست کم چهار عامل آن متفاوت باشند.

۳۱۲. وقتی چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ هفتم را بتوانیم به‌صورت ضرب چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ تجزیه کنیم، آن وقت دست کم، یکی از عامل‌های $p(x)$ یا $q(x)$ درجه‌ای بالاتر از ۳ ندارد. $p(x)$ را عاملی می‌گیریم که، درجهٔ آن، بزرگتر از ۳ نباشد. اگر $P(x)$ به‌ازای هفت مقدار x ، برابر ± 1 شود، آن وقت $p(x)$ هم به‌ازای همان مقدارهای x ، مقدارهای ± 1 را قبول می‌کند (زیرا $P(x) = p(x) \cdot q(x)$). از بین هفت مقداری که، به‌ازای آن‌ها، $p(x)$ برابر ± 1 می‌شود، یا چهارمقدار وجود دارد که به‌ازای آن‌ها، $p(x)$ برابر $+1$ می‌شود و یا چهارمقدار وجود دارد که به‌ازای آن‌ها برابر -1 می‌شود. در حالت اول، معادلهٔ درجه سوم $p(x) - 1 = 0$ و در حالت دوم، معادلهٔ درجه سوم $p(x) + 1 = 0$ دارای چهار ریشه می‌شود که ممکن نیست. این تناقض، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۳۱۳. p و q را دو عدد درست می‌گیریم که هردو زوج یا هردو فرد باشند. در این صورت، $P(p) - P(q)$ عددی زوج است. درواقع، عبارت

$$P(p) - P(q) = a_0(p^n - q^n) + a_1(p^{n-1} - q^{n-1}) + \dots$$

$$\dots + a_{n-2}(p^2 - q^2) + a_{n-1}(p - q)$$

بر عدد زوج $p - q$ بخش پذیر است.

به‌ویژه، تفاضل $P(p) - P(0)$ ، به‌ازای هر عدد زوج p ، عددی زوج است. بنابراین شرط مساله $P(0)$ عددی است فرد، بنابراین $P(p)$ هم باید فرد باشد، یعنی $P(p) \neq 0$. به‌همین ترتیب، اگر p عددی فرد باشد، $P(p) - P(1)$ عددی زوج است و چون، بنابراین شرط مساله، $P(1)$ فرد است، پس $P(p) \neq 0$.

به‌این ترتیب، $P(x)$ به‌ازای هیچ مقداری از عددهای درست x ، نمی‌تواند برابر صفر باشد، یعنی $P(x)$ ، ریشه‌های درست ندارد.

۳۱۴. ریشه گویای معادله $P(x) = 0$ را $x = \frac{k}{l}$ می‌گیریم، یعنی

$P\left(\frac{k}{l}\right) = 0$. عبارت $P(x)$ را بر حسب توان‌های نزولی $x - p$ بسط می‌دهیم، یعنی آن را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$P(x) = c_0(x-p)^n + c_1(x-p)^{n-1} + c_2(x-p)^{n-2} + \dots \\ \dots + c_{n-1}(x-p) + c_n$$

که در آن $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ ، عددهایی درست‌اند (c_0 برابر با ضریب بزرگترین درجه در $P(x)$ است، یعنی $c_0 = a_0$) برابر است با ضریب بزرگترین درجه در چندجمله‌ای از درجه $(n-1)$ ام $P(x) - c_0(x-p)^n$ ؛ c_1 برابر است با ضریب بزرگترین درجه در چندجمله‌ای $P(x) - c_0(x-p)^n - c_1(x-p)^{n-1}$ و غیره). اگر در برابری بالا $x = p$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$c_n = P(p) = \pm 1$$

اکنون در عبارت $P(x)$ قرار می‌دهیم $x = \frac{k}{l}$ و، سپس، نتیجه حاصل را

در l^n ضرب می‌کنیم، به‌این برابری می‌رسیم:

$$l^n P\left(\frac{k}{l}\right) = c_0(k-pl)^n + c_1 l(k-pl)^{n-1} +$$

$$+c_1 l^2 (k-pl)^{n-2} + \dots + c_{n-1} l^{n-1} (k-pl) + c_n l^n = 0$$

از این جا معلوم می‌شود که، اگر $P\left(\frac{k}{l}\right) = 0$ ، آن وقت عبارت

$$\frac{c_n l^n}{k-pl} = \frac{\pm l^n}{k-pl} = -c_0 (k-pl)^{n-1} - c_1 l (k-pl)^{n-2} - \dots$$

$$\dots - c_{n-1} l^{n-2} (k-pl) - c_n l^{n-1}$$

عددی درست است. چون pl بر l بخش پذیر، و k و l نسبت به هم اول اند،

بنابراین عددهای $k-pl$ و l نسبت به هم و، در نتیجه، $k-pl$ و l^n

نسبت به هم اول می‌شوند. به این ترتیب، $\pm \frac{l^n}{k-pl}$ تنها وقتی می‌تواند

عددی درست باشد که داشته باشیم:

$$k-pl = \pm 1$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد: $k-ql = \pm 1$.

اگر این دو برابری را از هم کم کنیم، به دست می‌آید:

$$(p-q)l = 0 \quad \text{یا} \quad (p-q)l = \pm 2$$

از طرف دیگر، چون $p > q$ ، پس $p-q > 0$ ؛ l هم عددی طبیعی است،

بنابراین

$$(p-q)l = 2; \quad k-pl = -1, \quad k-ql = 1$$

به این ترتیب، اگر $p-q > 2$ ، آن وقت معادله $P(x) = 0$ نمی‌تواند

ریشه گویا داشته باشد. در حالت $p-q = 2$ یا $p-q = 1$ ، ریشه گویا

وجود دارد. در این حالت، از مجموع برابری‌های

$$k-pl = -1, \quad k-ql = 1$$

به دست می‌آید:

$$2k - (p+q)l = 0 \Rightarrow \frac{k}{l} = \frac{p+q}{2}$$

۳۱۵. الف) فرض کنیم، چندجمله‌ای، قابل تجزیه به دو چندجمله‌ای با ضریب‌های درست باشد، یعنی داشته باشیم:

$$x^{2222} + 2x^{2220} + 4x^{2218} + \dots + 2220x^2 + 2222 = \\ = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0)(b_m x^m + \\ + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_0)$$

که در آن $m+n=2222$. داریم $a_0 b_0 = 2222$ ، یعنی از عددهای a_0 و b_0 ، یکی زوج و دیگری فرد است. a_0 را زوج و b_0 را فرد می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، باید همه ضریب‌ها در چندجمله‌ای $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ زوج باشند. ضریب‌های این چندجمله‌ای را، از راست به چپ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، a_k ، نخستین ضریب فردی باشد که با آن روبه‌رو می‌شویم. اگر پранت‌ها را درست‌راست برابری بالا بازکنیم، ضریب x^k چنین می‌شود:

$$a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \dots + a_0 b_k \quad (*)$$

(در حالت $k > m$ ؛ این مجموع، به جمله $a_{k-m} b_m$ ختم می‌شود). این ضریب، با ضریب متناظر خود، یعنی ضریب x^k در چندجمله‌ای اصلی برابر است، یعنی در حالت فرد بودن k برابر صفر و در حالت زوج بودن k برابر عددی زوج است (همه ضریب‌های چندجمله‌ای اصلی، به جز ضریب جمله اول آن، عددهایی زوج‌اند). بنا بر فرض ما، همه عددهای $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0$ زوج‌اند، بنابراین، در مجموع $(*)$ ، همه جمله‌ها، به جز جمله اول، زوج‌اند، یعنی $a_k b_0$ هم باید عددی زوج باشد که، طبق فرض ما، ممکن نیست، زیرا عددهای a_k و b_0 فردند.

می‌بینیم که همه ضریب‌های چندجمله‌ای $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ باید زوج باشند، در حالی که می‌دانیم برابر واحد است. این تناقض، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

ب) $x = y + 1$ می‌گیریم، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & x^{250} + x^{249} + x^{248} + \dots + x + 1 = \\
 & = (y+1)^{250} + (y+1)^{249} + \dots + (y+1) + 1 = \\
 & = \frac{(y+1)^{251} - 1}{(y+1) - 1} = \frac{1}{y} [(y+1)^{251} - 1] = \\
 & = y^{250} + 251y^{249} + C(251, 2)y^{248} + C(251, 3)y^{247} + \dots \\
 & \dots + C(251, 2)y + 251
 \end{aligned}$$

که در آن، همه ضریب‌های چندجمله‌ای حاصل، به جز ضریب نخستین جمله، بر عدد اول ۲۵۱ بخش پذیرند. در ضمن، با توجه به این که مقدار ثابت چندجمله‌ای برابر ۲۵۱ است و بر ۲۵۱^۲ بخش پذیر نیست، می‌توانیم همان استدلال مسأله الف) را درباره آن به کار ببریم (تنها با این تفاوت که، به جای بخش پذیری ضریب‌ها بر ۲، باید از بخش پذیری ضریب‌ها بر ۲۵۱ استفاده کنیم. با این استدلال، روشن می‌شود که، اگر چندجمله‌ای مفروض به دو چندجمله‌ای با ضریب درست قابل تجزیه باشد، آن وقت باید همه ضریب‌های یکی از این چندجمله‌ای‌ها، مضربی از ۲۵۱ باشند که ممکن نیست، زیرا ضریب بزرگ‌ترین درجه در چندجمله‌ای اصلی، برابر واحد است.

۳۱۶. چندجمله‌ای‌های مفروض را، به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

$$B = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

اگر همه ضریب‌ها، در هر دو چندجمله‌ای، عددهایی زوج باشند، آن وقت همه ضریب‌ها در $A.B$ ، بر ۴ بخش پذیر می‌شوند؛ بنابراین در یکی از دو چندجمله‌ای A و B ، و مثلاً B ، بعضی از ضریب‌ها فردند. اکنون، فرض می‌کنیم، بعضی از ضریب‌های چندجمله‌ای A هم فرد باشند. نخستین ضریب از این گونه را (آن را که کوچک‌ترین اندیس را دارد)، a_s می‌گیریم. به جز این، فرض می‌کنیم، نخستین ضریب فرد در B ، برابر b_k باشد. ضریب x^{s+k} را، در حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های A و B ، در نظر می‌گیریم. جمله شامل x^{s+k}

در حاصل ضرب، از آن توان‌های x در عبارت‌های A و B به دست آمده که مجموعی برابر $s+k$ دارند. در نتیجه، این ضریب، چنین می‌شود:

$$a_0 b_{k+s} + a_1 b_{k+s-1} + \dots + a_{s-1} b_{k+1} + a_s b_k + a_{s+1} b_{k-1} + \dots + a_{s+k} b_0.$$

همه جمله‌های این مجموع که قبل از جمله $a_s b_k$ قرار دارند، عددهایی زوج‌اند. همه جمله‌های بعد از $a_s b_k$ هم زوج‌اند، زیرا عددهای $b_0, b_{k-2}, b_{k-4}, \dots, b_k$ زوج‌اند. ولی $a_s b_k$ عددی فرد است، زیرا هر دو عدد a_s و b_k فردند. به این ترتیب، کل این مجموع، عددی فرد می‌شود که متناقض با فرض زوج بودن ضریب‌های حاصل ضرب است. فرض فرد بودن بعضی از ضریب‌های A ، ما را به تناقض کشانید، یعنی همه ضریب‌های A ، عددهایی زوج‌اند. اثبات قضیه، کامل شد.

۳۱۷. ثابت می‌کنیم، چندجمله‌ای $P(x)$ ، به ازای هر عدد گویای غیردرست، نمی‌تواند برابر مقداری درست بشود، یعنی برابر صفر هم، که عددی درست است، نمی‌تواند باشد.

$x = \frac{p}{q}$ و p و q را نسبت به هم اول می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = \\ &= \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = \\ &= \frac{p^n + a_1 p^{n-1} q + a_2 p^{n-2} q^2 + \dots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n}{q^n} = \\ &= \frac{p^n + q(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1})}{q^n} \end{aligned}$$

p^n و q نسبت به هم اول‌اند (زیرا p و q نسبت به هم اول‌اند)، بنابراین عدد

$$p^n + q(a_1 p^{n-1} + \dots + a_n q^{n-1})$$

نسبت به q و، در نتیجه، نسبت به q^n اول است، یعنی کسری که به دست آورده‌ایم، ساده‌نشده‌ای است و، بنابراین، نمی‌تواند برابر با عددی درست باشد.

۳۱۸. N را عددی درست و $P(N) = M$ می‌گیریم. عبارت

$$P(N + kM) - P(N) = a_0[(N + kM)^n - N^n] +$$

$$+ a_1[(N + kM)^{n-1} - N^{n-1}] + \dots + a_{n-1}[(N + kM) - N]$$

به‌ازای هر مقدار درست k بر kM بخش‌پذیر است (زیرا عبارت واقع در هریک از گروه‌ها، بر $(N + kM) - N = kM$ بخش‌پذیر است). در نتیجه $P(N + kM)$ به‌ازای هر مقدار درست k بر n بخش‌پذیر است.

بنابراین، اگر ثابت کنیم، بین مقادیرهای $P(N + kM)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)، عددهایی متفاوت با $\pm M$ وجود دارد، آن وقت می‌توانیم نتیجه بگیریم که، همه این مقادیرها، اول نیستند. چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه n ام است، بنابراین حداکثر n مقدار برای x می‌توان پیدا کرد که به‌ازای هریک از آنها، چندجمله‌ای $P(x)$ ، مثلاً برابر عدد A باشد (زیرا معادله $P(x) - A = 0$ از درجه n ام، بیش از n ریشه ندارد). بنابراین از بین $1 + 2n$ مقدار نخستین $P(N + kM)$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$)، دست‌کم یک مقدار متفاوت با M و $-M$ وجود دارد.

۳۱۹. قبل از همه یادآوری می‌کنیم که هر چندجمله‌ای از درجه n ام $P(x)$ را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از چندجمله‌ای‌های زیر نوشت:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{x(x-1)}{1 \times 2}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad P_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}$$

یعنی به صورت

$$P(x) = b_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x) + \dots + b_1 P_1(x) + b_0 P_0(x)$$

برای این منظور، ابتدا باید b_n را طوری انتخاب کرد که $\frac{b_n}{n!}$ برابر

با ضریب بزرگترین درجه از چندجمله‌ای $P(x)$ باشد، در این صورت $P(x)$ و $b_n P_n(x)$ ، در ضریب بزرگترین درجه خود (یعنی x^n) یکی خواهند بود.

سپس، باید b_{n-1} را طوری انتخاب کرد که عدد $\frac{b_{n-1}}{(n-1)!}$ برابر باشد با

ضریب بزرگترین درجه در $P(x) - b_n P_n(x)$ که، در این صورت، ضریب‌های x^n و x^{n-1} در چندجمله‌ای $P(x)$ ، برضریب‌های جمله‌های متناظر خود در چندجمله‌ای $b_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x)$ منطبق می‌شود.

ضریب b_{n-2} را باید طوری در نظر گرفت که عدد $\frac{b_{n-2}}{(n-2)!}$ برابر با ضریب

بزرگترین درجه در چند جمله‌ای

$$P(x) - b_n P_n(x) - b_{n-1} P_{n-1}(x)$$

باشد که، در این صورت، $b_n P_n(x) - b_{n-1} P_{n-1}(x) + b_{n-2} P_{n-2}(x)$ و $P(x)$ ، درضرب جمله‌های x^n ، x^{n-1} و x^{n-2} برهم منطبق می‌شوند و غیره.

ادامه این روند، ما را قانع می‌سازد که می‌توان ضریب‌های $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$ را، یکی بعد از دیگری، طوری انتخاب کرد که چندجمله‌ای‌های

 $\circ P(x)$

$$b_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x) + \dots + b_1 P_1(x) + b_0 P_0(x)$$

برهم منطبق شوند.

اکنون فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n ام باشد، به نحوی که $P(0), P(1), \dots, P(n)$ ، عددیایی درست باشند. بنابراین چه گفته‌ایم، این چندجمله‌ای را می‌توان به این صورت نوشت:

$$P(x) = b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + b_2 P_2(x) + \dots + b_n P_n(x)$$

توجہ می کنیم کہ

$$P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_n(0) = P_1(1) = P_2(1) = \dots = \\ = P_n(1) = P_2(2) = \dots = P_n(2) = \dots = P_{n-1}(n-2) = \\ = P_n(n-2) = P_n(n-1) = 0$$

$$P_0(0) = P_1(1) = P_2(2) = \dots = \quad \text{و} \\ = P_{n-1}(n-1) = P_n(n) = 1$$

بنابراین

$$P(0) = b_0 P_0(0) \text{ و } b_0 = P(0);$$

$$P(1) = b_0 P_0(1) + b_1 P_1(1) \text{ و } b_1 = P(1) - b_0 P_0(1);$$

$$P(2) = b_0 P_0(2) + b_1 P_1(2) + b_2 P_2(2) \text{ و}$$

$$b_2 = P(2) - b_0 P_0(2) - b_1 P_1(2);$$

.....

$$P(n) = b_0 P_0(n) + b_1 P_1(n) + \dots + b_{n-1} P_{n-1}(n) + b_n P_n(n) \text{ و}$$

$$b_n = P(n) - b_0 P_0(n) - b_1 P_1(n) - \dots - b_{n-1} P_{n-1}(n)$$

به این ترتیب، همهٔ عددهای $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ ، عددهایی درست‌اند.

۰۳۲۵ الف) از حل مسأله ۳۱۹ نتیجه می‌شود که، این چندجمله‌ای را، می‌توان به صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ای‌های $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ با ضرایب‌های درست نوشت. این ویژگی، با توجه به این که چند جمله‌ای‌های $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ به ازای هر مقدار درست x ، مقدارهای درست را قبول می‌کنند (مسأله ۷۵ - الف) را ببینید)، درستی حکم روشن می‌شود.

ب) اگر چندجمله‌ای $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

به ازای $n+1$ مقدار درست $k, k+1, k+2, \dots, k+n$ ، مقدارهای درست را قبول کند، آن وقت، چندجمله‌ای

$$Q(x) = P(x+k) = a_n (x+k)^n + \dots + a_1 (x+k) + a_0$$

به‌ازای مقدارهای $0, 1, 2, \dots, n$ ، برابر مقدارهایی درست می‌شود. با توجه به‌حل مسأله الف)، معلوم می‌شود که $Q(x)$ ، به‌ازای هر مقدار درست x ، مقدارهای درست را قبول می‌کند؛ از اینجا، چندجمله‌ای $P(x) = Q(x - k)$ هم، به‌ازای هر عدد درست x ، برابر مقدار درستی می‌شود.

ج) فرض کنید چند جمله‌ای $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ، به‌ازای هریک از مقدارهای $x = 0, x = 1, x = 4, \dots, x = n^2$ ، برابر با عددی درست باشد. چندجمله‌ای

$$Q(x) = P(x^2) = a_n (x^2)^n + a_{n-1} (x^2)^{n-1} + \dots + a_1 x^2 + a_0$$

(از درجه $2n$)، به‌ازای $2n+1$ عدد متوالی $-n, -(n-1), \dots, -(n-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$ ، مقدارهای درست را می‌پذیرد. درواقع، روشن است که

$$Q(0) = P(0), Q(1) = Q(-1) = P(1), Q(2) = Q(-2) = P(4),$$

$$Q(3) = Q(-3) = P(9), \dots, Q(n) = Q(-n) = P(n^2)$$

که بنا بر شرط مسأله، همه این‌ها، عده‌هایی درست‌اند. بنابراین، با توجه به حل مسأله ب)، چندجمله‌ای $Q(x)$ ، به‌ازای هر عدد درست x ، برابر مقداری درست می‌شود، یعنی عبارت $P(k^2) = Q(k)$ هم، به‌ازای هر مقدار درست k ، عددی درست است.

برای مثال، می‌توانیم چندجمله‌ای $P(x) = \frac{1}{12} x(x-1)$ را در نظر

بگیریم که، برای آن، داریم:

$$\begin{aligned} Q(x) = P(x^2) &= \frac{x^2(x^2-1)}{12} = \frac{x^2(x-1)x+1}{12} = \\ &= 2 \times \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - \frac{(x+1)x(x-1)}{1 \times 2 \times 3} \end{aligned}$$

۳۲۱. الف) با استفاده از دستور مواداد و دستور بسط دوجمله‌ای داریم:

$$\cos \Delta a + i \sin \Delta a = (\cos a + i \sin a)^\Delta =$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos^5 a + 5i \cos^4 a \sin a + 10 \cos^3 a (i \sin a)^2 + \\
 &+ 10 \cos^2 a (i \sin a)^3 + 5 \cos a (i \sin a)^4 + (i \sin a)^5 = \\
 &= (\cos^5 a - 10 \cos^3 a \sin^2 a + 5 \cos a \sin^4 a) + \\
 &+ i(5 \cos^4 a \sin a - 10 \cos^2 a \sin^3 a + \sin^5 a)
 \end{aligned}$$

که با برابر قرار دادن بخش‌های حقیقی و بخش‌های موهومی در دو طرف
برابری، به دستوره‌ای مورد نظر مسأله می‌رسیم.
(ب) شبیه مسأله الف) داریم:

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n =$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos^n \alpha + C(n, 1) \cos^{n-1} \alpha (i \sin \alpha) + C(n, 2) \cos^{n-2} \alpha (i \sin \alpha)^2 + \\
 &+ C(n, 3) \cos^{n-3} \alpha (i \sin \alpha)^3 + C(n, 4) \cos^{n-4} \alpha (i \sin \alpha)^4 + \dots = \\
 &= (\cos^n \alpha - C(n, 2) \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C(n, 4) \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots) + \\
 &+ i(C(n, 1) \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C(n, 3) \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \dots)
 \end{aligned}$$

که از آن‌جا، برابری‌های مطلوب به دست می‌آید.

۳۲۲. با توجه به دستورهایی که در مسأله ۳۲۱-ب) به دست آوردیم،

داریم:

$$\operatorname{tg} 6\alpha = \frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha} = \frac{6 \cos^5 \alpha \sin \alpha - 20 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha + 6 \cos \alpha \sin^5 \alpha}{\cos^6 \alpha - 15 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha + 15 \cos^2 \alpha \sin^4 \alpha - \sin^6 \alpha}$$

که اگر صورت و مخرج را بر $\cos^6 \alpha$ تقسیم کنیم:

$$\operatorname{tg} 6\alpha = \frac{6 \operatorname{tg} \alpha - 20 \operatorname{tg}^3 \alpha + 6 \operatorname{tg}^5 \alpha}{1 - 15 \operatorname{tg}^2 \alpha + 15 \operatorname{tg}^4 \alpha - \operatorname{tg}^6 \alpha}$$

۳۲۳. معادله $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = 0 \Rightarrow x = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

که از آن جا، به دست می آید:

$$x^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha \text{ و } \frac{1}{x^n} = \cos n\alpha \mp i \sin n\alpha$$

و به روشنی، از مجموع آن ها نتیجه می شود:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha$$

۳۲۴. این مجموع را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} & [\sin \varphi + i \sin \varphi] + [\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)] + \\ & + [\cos(\varphi + 2\alpha) + i \sin(\varphi + 2\alpha)] + \dots + [\cos(\varphi + n\alpha) + \\ & + i \sin(\varphi + n\alpha)] \end{aligned}$$

مساله به این جا منجر می شود که بخش حقیقی و بخش موهومی این مجموع را محاسبه کنیم. فرض می کنیم:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = a, \cos \alpha + i \sin \alpha = x$$

واز دستور ضرب عددهای مختلط و همچنین، دستور موداد استفاده می کنیم، مجموع چنین می شود:

$$a + ax + ax^2 + \dots + ax^n = \frac{ax^{n+1} - a}{x - 1} =$$

$$= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \frac{\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha - 1}{\cos \alpha + i \sin \alpha - 1} =$$

$$= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \frac{[(\cos(n+1)\alpha - 1) + i \sin(n+1)\alpha]}{[(\cos \alpha - 1) + i \sin \alpha]} =$$

$$\begin{aligned} & - 2 \sin^2 \frac{n+1}{2} \alpha + 2 i \sin \frac{n+1}{2} \alpha \cos \frac{n+1}{2} \alpha \\ & = (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \frac{- 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{- 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \frac{{}_2 i \sin \frac{n+1}{2} \alpha \left[\cos \frac{n+1}{2} \alpha + i \sin \frac{n+1}{2} \alpha \right]}{{}_2 i \sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right]} = \\
 &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \times \\
 &\quad \times \frac{\left(\cos \frac{n+1}{2} \alpha + i \sin \frac{n+1}{2} \alpha \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos {}_2 \frac{\alpha}{2} + \sin {}_2 \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left[\cos \left(\varphi + \frac{n}{2} \alpha \right) + i \sin \left(\varphi + \frac{n}{2} \alpha \right) \right]
 \end{aligned}$$

(در تبدیل‌های بالا، علاوه بر این که دوبار از قاعده ضرب عددهای مختلط استفاده کرده‌ایم، در ضمن، به برابری

$$\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right).$$

۳۲۵. اگر از دستور $\cos {}_2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ نتیجه مسأله قبل استفاده

کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}
 &\cos {}_2 \alpha + \cos {}_2 2\alpha + \dots + \cos {}_2 n\alpha = \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \dots + \cos 2n\alpha + n) =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+1)\alpha \cos n\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right] + \frac{n}{2} = \frac{\sin(n+1)\alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{n-1}{2}$$

و به همین ترتیب

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \dots + \sin^2 n\alpha = \frac{n+1}{2} - \frac{\sin(n+1)\alpha \cos n\alpha}{2 \sin \alpha}$$

۳۲۶. در واقع باید بخش‌های حقیقی و موهومی این مجموع را پیدا کنیم:

$(\cos \alpha + i \sin \alpha) + C(n, 1)(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) +$
 $+ C(n, 2)(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha) + \dots + (\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha)$
 فرض می‌کنیم: $\cos \alpha + i \sin \alpha = x$ ؛ با استفاده از دستور بسط دوجمله‌ای و دستور مودادر، این مجموع به صورت زیر درمی‌آید:

$$x + C(n, 1)x^2 + C(n, 2)x^3 + \dots + x^{n+1} = x(x+1)^n =$$

$$= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha + 1 + i \sin \alpha)^n =$$

$$= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} + i 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)^n =$$

$$= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right) =$$

$$= 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n+2}{2} \alpha + i \sin \frac{n+2}{2} \alpha \right)$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\cos \alpha + C(n, 1) \cos 2\alpha + C(n, 2) \cos 3\alpha + \dots$$

$$\dots + \cos(n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha;$$

$$\sin \alpha + C(n, 1) \sin 2\alpha + C(n, 2) \sin 3\alpha + \dots$$

$$\dots + \sin(n+1)\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n+1}{2} \alpha$$

۳۲۷. از دستور $\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

استفاده می‌کنیم برای مجموع مفروض داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(m-n)\pi}{p} + \cos \frac{2(m-n)\pi}{p} + \cos \frac{3(m-n)\pi}{p} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \cos \frac{(p-1)(m-n)\pi}{p} \right] - \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(m+n)\pi}{p} + \right. \\ & \quad \left. + \cos \frac{2(m+n)\pi}{p} + \cos \frac{3(m+n)\pi}{p} + \dots + \cos \frac{(p-1)(m+n)\pi}{p} \right] \end{aligned}$$

از طرف دیگر، مجموع

$$\cos \frac{k\pi}{p} + \cos \frac{2k\pi}{p} + \cos \frac{3k\pi}{p} + \dots + \cos \frac{(p-1)k\pi}{p}$$

درحالتی که k مضربی از p باشد، برابر است با $p-1$ (دراین حالت، هر جمله این مجموع برابر واحد است)؛ و درحالتی که k مضربی از p نباشد، با توجه به نتیجه مسأله ۳۲۴، برابر است با

$$\frac{\sin \frac{pk\pi}{2p} \cos \frac{(p-1)k\pi}{2p}}{\sin \frac{k\pi}{2p}} - 1 = \sin \frac{k\pi}{2} \cdot \frac{\cos \left(k \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2p} \right)}{\sin \frac{k\pi}{2p}} - 1 =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{وقتی } k \text{ فرد باشد} \\ 1 & \text{وقتی } k \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که $m+n$ و $m-n$ ، یا هر دو زوج اند و یا هر دو فرد؛

درضمن، اگر $m+n$ و $m-n$ مضربی از $2p$ باشند، به معنای آن است که هردو زوج اند؛ از این جا، درستی حکم مساله روشن می شود.

۳۲۸. ریشه های معادله $x^{2n+1} - 1 = 0$ چنین اند:

$$1, \cos \frac{2\pi}{2n+1} + i \sin \frac{2\pi}{2n+1}, \cos \frac{4\pi}{2n+1} + i \sin \frac{4\pi}{2n+1}, \dots$$

$$\dots, \cos \frac{2n\pi}{2n+1} + i \sin \frac{2n\pi}{2n+1}$$

دراین معادله، ضریب x^{2n} برابر صفر است، بنابراین مجموع ریشه های این معادله برابر صفر می شود، یعنی

$$\left[1 + \cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \right] +$$

$$+ i \left[\sin \frac{2\pi}{2n+1} + \sin \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \sin \frac{2n\pi}{2n+1} \right] = 0$$

بنابراین، هریک از عبارت هایی که داخل کروشه قرار دارند، باید برابر صفر باشد:

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -1$$

از طرف دیگر، روشن است که

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} = \cos \frac{2n\pi}{2n+1}, \cos \frac{4\pi}{2n+1} = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1}, \dots$$

و بنابراین

$$2 \left[\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} \right] = -1$$

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2} \quad \text{یعنی}$$

یادداشت. این مسأله را، براساس دستورهای مسأله ۳۲۴ هم می‌توان حل کرد.

۳۲۹. الف) با توجه به مسأله ۳۲۱- ب) داریم:

$$\sin(2n+1)\alpha = C(2n+1, 1)(1 - \sin^2\alpha)^n \sin\alpha - \\ - C(2n+1, 3)(1 - \sin^2\alpha)^{n-1} \sin^3\alpha + \dots + (-1)^n \sin^{2n+1}\alpha$$

از این جا نتیجه می‌شود که عددهای $0, \sin \frac{\pi}{2n+1}, \sin \frac{2\pi}{2n+1}, \dots, \sin \frac{n\pi}{2n+1}$ و

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2n+1}\right) = -\sin \frac{\pi}{2n+1}, \sin\left(-\frac{2\pi}{2n+1}\right) =$$

$$= -\sin \frac{2\pi}{2n+1}, \dots, \sin\left(-\frac{n\pi}{2n+1}\right) = -\sin \frac{n\pi}{2n+1}$$

عبارتند از ریشه‌های معادله

$$C(2n+1, 1)(1 - x^2)^n x - C(2n+1, 3)(1 - x^2)^{n-1} x^3 + \dots \\ \dots + (-1)^n x^{2n+1} = 0$$

که معادله‌ای است از درجه $2n+1$. به این ترتیب، عددهای $\sin \frac{\pi}{2n+1}, \sin \frac{2\pi}{2n+1}, \dots, \sin \frac{n\pi}{2n+1}$ ریشه‌های معادله درجه n ام زیرند:

$$\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}, \dots, \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

$$C(2n+1, 1)(1 - x)^n - C(2n+1, 3) \times$$

$$\times (1 - x)^{n-1} x + \dots + (-1)^n x^n = 0$$

ب) در دستوری که برای مسأله ۳۲۱- ب) به دست آوردیم، n را به

$2n+1$ تبدیل می‌کنیم و آن را، به این صورت، می‌نویسیم:

$$\sin(2n+1)\alpha = \sin^{2n+1}\alpha [C(2n+1, 1)\cotg^{2n}\alpha - \\ - C(2n+1, 3)\cotg^{2n-2}\alpha + C(2n+1, 5)\cotg^{2n-4}\alpha - \dots]$$

یعنی، به ازای $\alpha = \frac{n\pi}{2n+1}, \dots, \alpha = \frac{2\pi}{2n+1}, \alpha = \frac{\pi}{2n+1}$ داریم:

$$C(2n+1, 1)\cotg^{2n}\alpha - C(2n+1, 3)\cotg^{2n-2}\alpha + \\ + C(2n+1, 5)\cotg^{2n-4}\alpha - \dots = 0$$

به این ترتیب، عددهای $\cotg^2 \frac{n\pi}{2n+1}, \dots, \cotg^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \cotg^2 \frac{\pi}{2n+1}$

عبارتند از ریشه‌های معادله زیر که از درجه n ام است:

$$C(2n+1, 1)x^n - C(2n+1, 3)x^{n-1} + \\ + C(2n+1, 5)x^{n-2} - \dots = 0$$

۳۳۰. الف) این معادله را در نظر می‌گیریم:

$$x^n - \frac{C(2n+1, 3)}{C(2n+1, 1)}x^{n-1} + \frac{C(2n+1, 5)}{C(2n+1, 1)}x^{n-2} - \dots = 0$$

که معادله‌ای است از درجه n ام و، برای مجموع ریشه‌های آن، داریم (مسأله ۳۲۹-ب) را ببینید):

$$\cotg^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cotg^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \cotg^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \\ = \frac{C(2n+1, 3)}{C(2n+1, 1)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

ب) چون $\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cotg^2 \alpha$ ، از نتیجه‌ای که برای مسأله الف) به دست آوردیم، نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots$$

$$\dots + \operatorname{cosec}^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3} + n = \frac{2n(n+1)}{3}$$

۳۳۱. الف) داهل اول. عددهای $\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}, \dots, \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}$

ریشه‌های معادله درجه n ام حاصل در مسأله ۳۲۹- الف) هستند. در این معادله، ضریب بزرگترین درجه (x^n)، برابر است با

$$(-1)^n [C(2n+1, 1) + C(2n+1, 3) + \dots + C(2n+1, 2n-1) + 1]$$

مجموع داخل کروشه، در واقع، برابر است با نصف مجموع ضریب‌های بسط دوجمله‌ای:

$$1 + C(2n+1, 1) + C(2n+1, 2) + \dots + C(2n+1, 2n) + 1 = 2^{2n+1}$$

بنابراین، ضریب x^n در معادله موردنظر ما، برابر $2^n \cdot (-1)^n$ می‌شود. در ضمن، جمله ثابت در این معادله، برابر $C(2n+1, 1) = 2n+1$ است. پس، برای حاصل ضرب ریشه‌های این معادله، داریم:

$$(-1)^n \sin^2 \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1} = (-1)^n \frac{2n+1}{2^{2n}}$$

و از آنجا

$$\sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

به همین ترتیب و با همین روش، به دست می‌آید:

$$\sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

داهل دوم. ریشه‌های معادله $x^{2n} - 1 = 0$ ، چنین اند:

$$1, -1, \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}, \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \\ \cos \frac{3\pi}{n} + i \sin \frac{3\pi}{n}, \dots, \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1)\left(x - \cos \frac{\pi}{n} - i \sin \frac{\pi}{n}\right) \times \\ \times \left(x - \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n}\right) \dots \left(x - \cos \frac{(n-1)\pi}{n} - i \sin \frac{(n-1)\pi}{n}\right) \times \\ \times \left(x - \cos \frac{(n+1)\pi}{n} - i \sin \frac{(n+1)\pi}{n}\right) \dots \left(x - \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} - \right. \\ \left. - i \sin \frac{(2n-1)\pi}{n}\right)$$

علاوه بر این، چون $\sin \frac{(2n-k)\pi}{n} = -\sin \frac{k\pi}{n}$ و $\cos \frac{(2n-k)\pi}{n} = \cos \frac{k\pi}{n}$ بنابراین

$$\left(x - \cos \frac{\pi}{n} - i \sin \frac{\pi}{n}\right) \left(x - \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} - i \sin \frac{(2n-1)\pi}{n}\right) = \\ = x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{n} + 1;$$

$$\left(x - \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n}\right) \left(x - \cos \frac{(2n-2)\pi}{n} - i \sin \frac{(2n-2)\pi}{n}\right) = \\ = x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + 1;$$

.....

$$\left(x - \cos \frac{(n-1)\pi}{n} - i \sin \frac{(n-1)\pi}{n}\right) \left(x - \cos \frac{(n+1)\pi}{n} - \right. \\ \left. - i \sin \frac{(n+1)\pi}{n}\right) = x^2 - 2x \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + 1$$

به این ترتیب، عبارت $x^{2n} - 1$ ، به این صورت تجزیه می‌شود:

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{n} + 1 \right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + 1 \right) \times \dots$$

$$\dots \times \left(x^2 - 2x \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + 1 \right)$$

یعنی

$$\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1 =$$

$$= \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{n} + 1 \right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + 1 \right) \times \dots$$

$$\dots \times \left(x^2 - 2x \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + 1 \right)$$

که اگر $x = 1$ بگیریم، با توجه به دستور $\frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$ ، به دست می‌آید:

$$n = 2^{n-1} \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sin^2 \frac{2\pi}{2n} \dots \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

از این جا $\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sin^2 \frac{2\pi}{2n} \dots \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}$ ؛ و با همین روش

$$\sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

ب) این مساله را می‌توان کاملاً شبیه مساله ۳۳۱ الف)، بایکی از دو راه حل‌های اول) یا دوم) حل کرد؛ در ضمن می‌توان مقدارهای مورد نظر را، مستقیماً و به کمک دستورهای مساله الف) به دست آورد. چون

$$\sin \frac{\pi}{2n+1} = \sin \frac{2n\pi}{2n+1}, \quad \sin \frac{3\pi}{2n+1} = \sin \frac{(2n-2)\pi}{2n+1},$$

$$\sin \frac{5\pi}{2n+1} = \sin \frac{(2n-4)\pi}{2n+1}, \dots$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{6\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{2n\pi}{2n+1} = \\ & = \sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n} \end{aligned}$$

اکنون، اگر توجه کنیم:

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{2n+1} &= 2 \sin \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{\pi}{2n+1}, \quad \cos \frac{4\pi}{2n+1} = \\ &= 2 \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1}, \dots, \sin \frac{2n\pi}{2n+1} = 2 \sin \frac{n\pi}{2n+1} \cos \frac{n\pi}{2n+1} \end{aligned}$$

از رابطه بالا به دست می آید:

$$\cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{3\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

و با روشی مشابه

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{2\pi}{2n} \dots \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) \left(\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) = \\ & = \frac{1}{2^{n-1}} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \end{aligned}$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{2} = 1, \dots, \sin \frac{2\pi}{n} = \sin \frac{(n-2)\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) \text{ چون}$$

بنابراین به ازای $n = 2k + 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} &= \\ = \left(\sin \frac{\pi}{2k+1} \sin \frac{2\pi}{2k+1} \dots \sin \frac{k\pi}{2k+1} \right)^2 &= \\ = \left(\frac{\sqrt{2k+1}}{2^k} \right)^2 = \frac{n}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

و به ازای $n = 2k$:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} &= \\ = \left(\sin \frac{\pi}{2k} \sin \frac{2\pi}{2k} \dots \sin \frac{(k-1)\pi}{2k} \right)^2 &= \\ = \left(\frac{\sqrt{k}}{2^{k-1}} \right)^2 = \frac{n}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

که از آن جا، نتیجه می شود:

$$\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{2\pi}{2n} \dots \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\frac{n}{2^{n-1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

یادداشت. اگر دستورهای مربوط به مساله‌های الف) و ب) را بر هم

تقسیم کنیم، به دست می آید:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2n+1} \dots \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2n+1} &= \sqrt{2n+1}; \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2n} \dots \operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{2n} &= 1 \end{aligned}$$

رابطه دوم، در واقع، رابطه‌ای روشن است، زیرا، برای هر عدد درست k از $n-1$ تا n داریم:

$$tg \frac{k\pi}{2n} \cdot tg \frac{(n-k)\pi}{2n} = tg \frac{k\pi}{2n} \cdot cotg \frac{k\pi}{2n} = 1; \quad tg \frac{\pi}{4} = 1$$

بنابراین، می‌توان به کمک این دستور و دستور دوم مسأله ۳۳۱، الف) به دست آورد:

$$\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{2\pi}{2n} \cdots \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

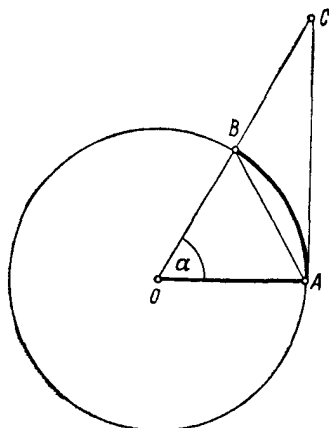
۳۳۲. ثابت می‌کنیم، به ازای هر مقدار α ، با شرط $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ، داریم:

$$\sin \alpha < \alpha < tg \alpha$$

با توجه به شکل ۳۹ روشن است که:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \sin \alpha, \quad S_{\text{قطاع } AOB} = \frac{1}{2} \alpha,$$

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} tg \alpha$$



شکل ۳۹

(شعاع دایره را واحد و زاویه‌ها را برحسب رادیان گرفته‌ایم). به این ترتیب،
درستی نابرابری‌های مورد نظر، با توجه به نابرابری‌های واضح

$$S_{\Delta AOB} < S_{\text{قطاع } AOB} < S_{\Delta AOC}$$

تایید می‌شود. از نابرابری‌های $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$ به دست می‌آید:

$$\cot \alpha < \frac{1}{\alpha} < \operatorname{cosec} \alpha$$

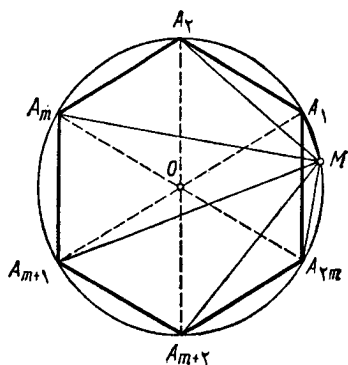
و با توجه به دستورهای مسأله ۳۳۰ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{n(2n-1)}{3} &= \cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} < \\ &< \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2 < \\ &< \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{cosec}^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \\ &= \frac{2n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

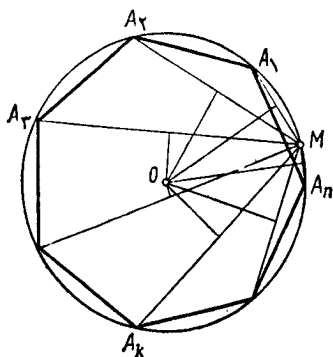
و اگر نابرابری‌های اخیر را بر $\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}$ تقسیم کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\pi^2}{6} &= \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \cdot \frac{\pi^2}{6} < \\ &< 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \cdot \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

۳۳۳. الف) M را نقطه‌ای از کمان $A_1 A_n$ می‌گیریم (شکل ۴۰).



شکل ۴۱



شکل ۴۰

اگر کمان MA_1 را α فرض کنیم، آن وقت کمان‌های $MA_2, MA_3, \dots, MA_n$ به ترتیب برابرند با

$$\alpha + \frac{2\pi}{n}, \alpha + \frac{4\pi}{n}, \dots, \alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

طول وتر AB از دایره به شعاع R ، برابر است با $2R \sin \frac{\widehat{AB}}{2}$. بنابراین،

مجموع مورد نظر ما به این صورت درمی آید:

$$2R^2 \left[\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{n} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{n} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) \right]$$

اکنون، به محاسبه مجموع داخل کروشه می پردازیم. اگر این مجموع

را S بگیریم و از دستور $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ استفاده کنیم، به دست می آید:

$$S = \frac{n}{2} - \left[\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots \right]$$

$$\dots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \Big]$$

بنابر دستوری که در مسأله ۳۲۴ به دست آوردیم، مقدار داخل کروشه در عبارت اخیر برابر صفر است و، بنابر این $S = \frac{n}{4}$ ؛ از این جا، به نتیجه مطلوب می‌رسیم.

یادداشت. حکم مسأله، برای $n = 2m$ واضح است (شکل ۴۱ را ببینید)، زیرا با توجه به قضیه فیثاغورث، داریم:

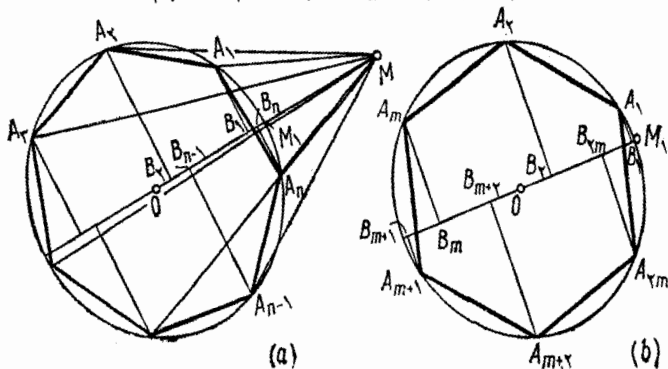
$$MA_1^2 + MA_{m+1}^2 = MA_2^2 + MA_{m+2}^2 = \dots = MA_m^2 + MA_{2m}^2 = 4R^2$$

ب) خط راستی را که از O و M می‌گذرد در نظر می‌گیریم و از نقطه‌های $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{2n}$ عمودهای $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ را بر آن رسم می‌کنیم. بنابر قضیه‌ای که در هندسه می‌شناسید، داریم:

$$MA_k^2 = MO^2 + OA_k^2 - 2MO \cdot OB_k = l^2 + R^2 - 2l \cdot OB_k$$

در این برابری، باید پاره‌خط راست OB_k را، بر حسب این که نقطه B_k روی نیم‌خط OM یا در امتداد آن در سمت چپ O قرار دارد، با علامت «+» یا «-» در نظر گرفت. در نتیجه

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 = n(l^2 + R^2) -$$



$$-2l(OB_1 + OB_2 + \dots + OB_n)$$

فرض کنید $\widehat{MOA_1} = \alpha$ ، در این صورت

$$OB_1 = OA_1 \cos \widehat{A_1OM} = R \cos \alpha, \quad OB_2 = R \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right),$$

$$OB_3 = R \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{n} \right), \dots, \quad OB_n = R \cos \left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right)$$

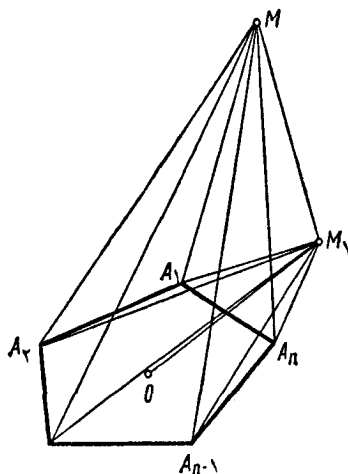
ضمن حل مسأله ۳۳۳ - الف) ثابت کردیم که

$$\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = 0$$

یعنی $OB_1 + OB_2 + \dots + OB_n = 0$ و بلافاصله به نتیجه مطلوب می‌رسیم.

یادداشت. در حالتی که n عددی زوج باشد ($n = 2m$)، مسأله را می‌توان به سادگی و با استفاده از هندسه خالص حل کرد (شکل ۴۲ - b را ببینید).
در این حالت

$$OB_1 + OB_{m+1} = OB_2 + OB_{m+2} = \dots = OB_m + OB_{2m} = 0$$



شکل ۴۳

ج) M_1 را تصویر نقطه M بر صفحه n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ می‌گیریم (شکل ۴۳). داریم: $MA_k^2 = M_1 A_k^2 + MM_1^2$ ، یعنی

$$MA_1^2 + MA_2^2 + MA_n^2 = M_1 A_1^2 + M_1 A_2^2 + \dots$$

$$\dots + M_1 A_n^2 + nMM_1^2$$

بنابر حالت ب) از مسأله ۳۳۳:

$$M_1 A_1^2 + M_1 A_2^2 + \dots + M_1 A_n^2 = n(R^2 + OM_1^2)$$

از طرف دیگر $l^2 = OM^2 = OM_1^2 + M_1 M^2$ از این جا، درستی حکم تایید می‌شود.

۳۳۴. الف) حکم این مسأله را می‌توان مستقیماً از قضیه‌ای که در مسأله ۳۳۳-الف) ثابت کردیم، نتیجه گرفت. در واقع، وقتی n عددی زوج باشد، راس‌هایی از n ضلعی که اندیسی زوج دارند و، همچنین، راس‌هایی که اندیسی فرد دارند، هر کدام یک $\frac{n}{2}$ ضلعی منتظم محاط در دایره را تشکیل می‌دهند.

ب) $n = 2m + 1$ می‌گیریم. با توجه به حل مسأله ۳۳۳-الف)، کافی است ثابت کنیم، مجموع‌های زیر باهم برابرند:

$$S_1 = \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{2n+1} \right) + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{4\pi}{2n+1} \right) + \dots$$

$$\dots + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2n\pi}{2n+1} \right);$$

$$S_2 = \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2n+1} \right) + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{2n+1} \right) + \dots$$

$$\dots + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} \right)$$

و با توجه به حل مسأله ۳۲۴ داریم:

$$S_1 = \frac{\sin \frac{(m+1)\pi}{2m+1} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{m\pi}{2m+1} \right)}{\sin \frac{\pi}{2n+1}};$$

$$S_2 = \frac{\sin \frac{m\pi}{2m+1} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2m+1} + \frac{(m-1)\pi}{2m+1} \right)}{\sin \frac{\pi}{2m+1}} = S_1$$

۳۳۵. الف) در مسأله ۳۳۳-الف ثابت کردیم، مجموع مجذوره‌های فاصله‌های نقطه‌های واقع بر محیط دایره محیطی n ضلعی منتظم از همه راس‌های آن، برابر است با $2nR^2$. اکنون، اگر نقطه M را منطبق بر راس A_1 بگیریم، معلوم می‌شود که مجموع مجذوره‌های ضلع‌ها و قطرهایی که از یک راس n ضلعی می‌گذرند، برابر $2nR^2$ است. اگر همین مجموع‌ها را برای هر n راس به دست آوریم، هر ضلع و هر قطر دوبار به حساب می‌آید، بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot 2nR^2 = n^2 R^2$$

ب) مجموع همه ضلع‌ها و قطرهایی که از راس A_1 در n ضلعی می‌گذرند، برابر است با

$$2R \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] =$$

$$= 2R \frac{\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 2R \cotg \frac{\pi}{2n}$$

(حل مسأله ۳۳۴-ب) را ببینید). باید این مقدار را در $\frac{1}{2}n$ ضرب کرد تا

مجموع مطلوب به دست آید، یعنی $R \operatorname{ncotg} \frac{\pi}{2n}$.

ج) حاصل ضرب همه ضلع‌ها و قطرهای که از یک راس n ضلعی (و مثلاً A_1) می‌گذرند، برابر است با

$$2^{n-1} R^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = 2^{n-1} R^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}}$$

(مسأله ۳۳۱-الف) را ببینید). برای به دست آوردن حاصل ضرب مورد نظر مسأله، باید این مقدار را به توان n برسانیم و سپس، از عبارت حاصل جذر بگیریم.

۳۳۶. مجموع توان‌های پنجاهم ضلع‌ها و قطرهای را پیدا می‌کنیم که از یک راس ۱۰۰ ضلعی منتظم، و مثلاً A_1 ، گذشته‌اند؛ شعاع دایره محیطی ۱۰۰ ضلعی را R می‌گیریم:

$$\Sigma = \left(2R \sin \frac{\pi}{100} \right)^{50} + \left(2R \sin \frac{2\pi}{100} \right)^{50} + \dots + \left(2R \sin \frac{99\pi}{100} \right)^{50}$$

باید مجموع توان‌های پنجاهم سینوس‌های زاویه‌های $\frac{\pi}{100}, \dots, \frac{2\pi}{100}, \frac{99\pi}{100}$ را پیدا کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \sin^{50} \alpha &= \left(\frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha) - (\cos \alpha - i \sin \alpha)}{2i} \right)^{50} = \\ &= \frac{\left(x - \frac{1}{x} \right)^{50}}{-2^{50}} = -\frac{1}{2^{50}} \left(x - \frac{1}{x} \right)^{50} \end{aligned}$$

که در آن $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ؛ در نتیجه

$$\sin^{50} \alpha = \frac{-1}{2^{50}} \left(x^{50} - C(50, 1)x^{49} \cdot \frac{1}{x} + C(50, 2)x^{48} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots \right)$$

$$\dots + C(\Delta_0, \gamma\gamma) x^{\gamma\gamma} \cdot \frac{1}{x^{\gamma\gamma}} - C(\Delta_0, \gamma\Delta) x^{\gamma\Delta} \cdot \frac{1}{x^{\gamma\Delta}} +$$

$$+C(\Delta_0, 26)x^{26} \cdot \frac{1}{x^{26}} + \dots + C(\Delta_0, 41)x^{41} \cdot \frac{1}{x^{41}} -$$

$$-C(\Delta_0, \varphi_0)x \cdot \left(\frac{1}{x^{\varphi_0}} + \frac{1}{x^{\Delta_0}} \right) = -\frac{1}{r^{\Delta_0}} \left[\left(x^{\Delta_0} + \frac{1}{x^{\Delta_0}} \right) - \right.$$

$$-C(\Delta_0, 1)\left(x^{\varphi_1} + \frac{1}{x^{\varphi_1}}\right) + C(\Delta_0, 2)\left(x^{\varphi_2} + \frac{1}{x^{\varphi_2}}\right) - \dots$$

$$\dots + C(\Delta_0, \gamma\varphi) \left(x^r + \frac{1}{x^r} \right) - C(\Delta_0, \gamma\Delta) \Big] = -\frac{1}{r\Delta_0} (\gamma \cos \Delta_0 \alpha -$$

$$- \gamma C(\Delta_0, 1) \cos \varphi \lambda \alpha + \gamma C(\Delta_0, 2) \cos \varphi \xi \alpha - \dots$$

$$\dots + \gamma C(\Delta_0, \gamma\gamma) \cos \gamma\alpha + C(\Delta_0, \gamma\Delta))$$

که در آن، از رابطه زیر استفاده کرده ایم:

$$x^k + \frac{1}{x^k} = (\cos k\alpha + i \sin k\alpha) + (\cos k\alpha - i \sin k\alpha) = 2 \cos k\alpha$$

بنابراین، مجموع Σ به این صورت درمی آید:

$$\Sigma = -R^{\Delta^0} \left[\gamma \left(\cos \Delta^0 \cdot \frac{\pi}{100} + \cos \Delta^0 \cdot \frac{2\pi}{100} + \dots + \cos \Delta^0 \cdot \frac{99\pi}{100} \right) - \right.$$

$$-2C(\Delta_0, 1) \left(\cos \varphi \lambda \frac{\pi}{100} + \cos \varphi \lambda \frac{2\pi}{100} + \dots + \cos \varphi \lambda \frac{99\pi}{100} \right) +$$

$$+ 2C(\Delta_0, \gamma) \left(\cos \varphi \frac{\pi}{100} + \cos \varphi \frac{2\pi}{100} + \dots + \cos \varphi \frac{99\pi}{100} \right) -$$

• • • • •

$$+ {}^2C(\Delta_0, {}^2\varphi) \left(\cos {}^2\frac{\pi}{100} + \cos {}^2\frac{2\pi}{100} + \dots + \cos {}^2\frac{99\pi}{100} \right) -$$

$$-99C(50, 25) = -R^{50} [2s_1 - 2C(50, 1)s_2 + 2C(50, 2)s_3 - \dots \\ \dots + 2C(50, 24)s_{25} - 99C(50, 25)]$$

مجموع‌های داخل پرانتزها را به ترتیب، $s_1, s_2, \dots, s_{25}$ نامیده‌ایم. از دستورهای مسأله ۳۲۴، نتیجه می‌شود: $s_1 = s_2 = \dots = s_{25} = -1$ و بنابراین

$$\begin{aligned} \sum &= R^{50} (2 - 2C(50, 1) + 2C(50, 2) - \dots + 2C(50, 24) + \\ &+ 99C(50, 25)) = R^{50} (1 - C(50, 1) + C(50, 2) - C(50, 3) + \dots \\ &\dots + C(50, 24) - C(50, 25) + C(50, 26) - \dots \\ &\dots + C(50, 48) - C(50, 49) + 1 + 100C(50, 25)) = \\ &= R^{50} [(1-1)^{50} + 100C(50, 25)] = 100C(50, 25) \cdot R^{50} \end{aligned}$$

به این ترتیب، مجموع توان‌های پنجاهم همه ضلع‌ها و قطرهای ۱۰۰ ضلعی برابر است با

$$\frac{100 \sum}{2} = 5000C(50, 25)R^{50} = \frac{5000 \times 50!}{(25!)^2} R^{50}$$

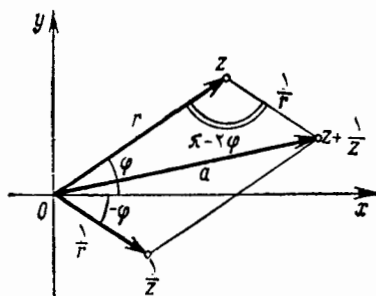
۳۳۷. روشن است که

$$\begin{aligned} |z| &= |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| \quad \text{و} \quad \left| z + \frac{1}{z} \right| = \left| \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right| = \\ &= \left| -z - \frac{1}{z} \right| = \left| -\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right| \end{aligned}$$

بنابراین، کافی است یکی از عددهای $z, \bar{z}, -z$ و $-\bar{z}$ را در نظر بگیریم و مثلاً آن را که در ربع اول قرار دارد. وقتی $|z|$ حداکثر مقدار خود باشد،

آن وقت $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ به حداقل خود می‌رسد. بنابراین، کافی است به دنبال

z هایی باشیم که، مدول آن‌ها، حداکثر است و در ضمن $|z| \geq \left| \frac{1}{z} \right|$. آرگومان عدد



شکل ۴۴

z را φ می‌گیریم ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ؛ شکل ۴۴ را ببینید). چون $|z + \frac{1}{z}| = a$

پس

$$\begin{aligned} a^2 &= r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\varphi = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 + 2 \cos^2 \varphi = \\ &= \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 + 2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

که در آن $r = |z|$. بنا بر فرض $r \geq \frac{1}{r}$ ، بنابراین وقتی r بزرگ شود، $r - \frac{1}{r}$ کاهش پیدا می‌کند و برعکس. علاوه بر این داریم:

$$\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = a^2 - 2 \cos^2 \varphi \leq a^2$$

و به ازای $\varphi = \frac{\pi}{2}$ داریم: $\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = a^2$. در این حالت $r - \frac{1}{r} = a$

و در نتیجه

$$r = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4})$$

به این ترتیب، حداکثر $|z|$ برابر $\frac{1}{4}(a + \sqrt{a^2 + 4})$ است که به ازای

$z = \frac{1}{4}i(a + \sqrt{a^2 + 4})$ به دست می‌آید؛ حداقل مقدار z برابر

$z = -\frac{1}{4}i(\sqrt{a^2 + 4} - a)$ است و به ازای

می‌آید.

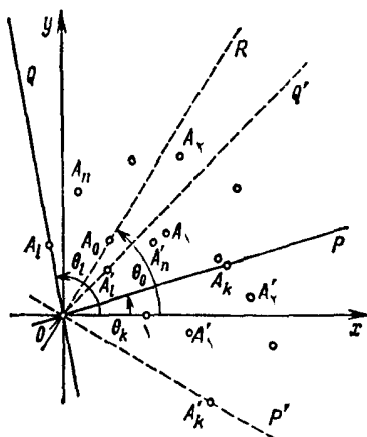
۳۳۸. به روشنی دیده می‌شود که عددهای

$$1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ; \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ,$$

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \cos(-120^\circ) - i \sin(-120^\circ)$$

مجموعی برابر صفر دارند و تفاضل آرگومان‌های هردو تا از آن‌ها، برابر 120° درجه است. به این ترتیب، زاویه 120° درجه را که در صورت مسأله آمده است، نمی‌توان بزرگتر کرد.

اکنون، برای $n = 1, 2, \dots$ و $i \neq j$ فرض می‌کنیم



شکل ۴۵

$\theta_1, \dots, \theta_r, \theta_n$ آرگومان‌های عددی مختلط مفروض‌اند؛ درحالتی که یکی از عددهای مختلط برابر صفر باشد، آرگومان مشخصی ندارد و، به همین جهت، این حالت را کنار می‌گذاریم). ثابت می‌کنیم، در این حالت برابری

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$$

نمی‌تواند برقرار باشد. اگر در صفحه مختلط، نقطه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ را، به ترتیب، با مختصات قطبی $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), \dots, (r_n, \theta_n)$ به عنوان نماینده عددهای مختلط $z_1, z_2, \dots, z_n$ در نظر بگیریم، باید همه این نقطه‌ها در درون زاویه POQ که کمتر از 120° درجه است و به وسیله دو نیم خط راست $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_n$ محدود شده است، قرار گیرند. در این جا A_1 و A_n دو نقطه «انتهائی» و متناظرند با عددهای z_1 و z_n با مقدار آرگومان‌های «انتهائی» (شکل ۴۵ را ببینید). OR متناظر با زاویه قطبی $\theta = \theta_0$ را، نیمساز زاویه POQ و $z_0 = \cos \theta_0 + i \sin \theta_0$ را عدد مختلط به مدول b می‌گیریم (A_0 ، روی نیم خط راست OR است). چون عددهای

$$z'_1 = \frac{z_1}{z_0} = r_1 [\cos(\theta - \theta_0) + i \sin(\theta - \theta_0)], z'_2 = \frac{z_2}{z_0}, \dots, z'_n = \frac{z_n}{z_0}$$

دارای مدول‌هایی برابر با مدول عددهای $z_1, z_2, \dots, z_n$ ، یعنی برابر $r_1, r_2, \dots, r_n$ می‌باشند، و به جای $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ، آرگومان‌هایی برابر $\theta_1 - \theta_0, \theta_2 - \theta_0, \dots, \theta_n - \theta_0$ دارند. بنابراین، می‌توان نقطه‌های $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ را، که در صفحه مختلط معرف عددهای $z'_1, z'_2, \dots, z'_n$ هستند، به کمک نقطه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ با دوران دور نقطه O به اندازه زاویه θ_0 و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به دست آورد. بنابراین، همه این نقطه‌ها، در درون زاویه $P'O'Q'$ قرار دارند که از دوران زاویه POQ ضمن این دوران به دست آمده است، قرار دارند؛ زاویه $P'O'Q'$ هم از 120° درجه کوچکتر است و نیمساز آن، OR' ، بر محور حقیقی Ox منطبق

است. از این جا نتیجه می‌شود که، $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ ، بخش حقیقی عددهای مختلط $z'_1 = a'_1 + ib'_1, z'_2 = a'_2 + ib'_2, \dots, z'_n = a'_n + ib'_n$ ، مقدارهایی مثبت‌اند، یعنی مجموع

$$z'_1 + z'_2 + \dots + z'_n = (a'_1 + ib'_1) + (a'_2 + ib'_2) + \dots + (a'_n + ib'_n) = \\ = (a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n) + i(b'_1 + b'_2 + \dots + b'_n)$$

نمی‌تواند برابر صفر شود (زیرا $a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n > 0$). اکنون، از رابطه

$$z'_1 + z'_2 + \dots + z'_n = \frac{z_1}{z_0} + \frac{z_2}{z_0} + \dots + \frac{z_n}{z_0} = \\ = (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \frac{1}{z_0} \neq 0$$

روشن می‌شود که مجموع $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ هم مخالف صفر است.

۳۳۹. نقطه A را متناظر با عدد مختلط z و نقطه‌های $C_1, C_2, \dots, C_n$ را متناظر با عددهای $c_1, c_2, \dots, c_n$ در صفحه مختلط می‌گیریم و فرض می‌کنیم، نقطه A در درون چندضلعی $C_1 C_2 \dots C_n$ نباشد (شکل ۴۶). در این حالت، همه نیم‌خط‌های راست $AC_1, AC_2, \dots, AC_n$ «به یک سمت می‌روند»، یعنی در یک طرف خط راست l ، که از A می‌گذرد، قرار دارند. با توجه به قاعده تفریق در عددهای مختلط، روشن می‌شود که عددهای $z_1 = z - c_1, z_2 = z - c_2, \dots, z_n = z - c_n$ ، معرف نقطه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ هستند، به نحوی که بردارهای $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ ، به ترتیب، با بردارهای $\overrightarrow{C_1 A}, \overrightarrow{C_2 A}, \dots, \overrightarrow{C_n A}$ برابرند. بنابراین، همه نیم‌خط‌های راست $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ در یک طرف خط راست l' قرار دارند، که از نقطه O موازی خط راست l رسم شده است. علاوه بر این،

$$\omega' = \frac{1}{\omega} \text{ اگر } \omega = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ آن وقت}$$

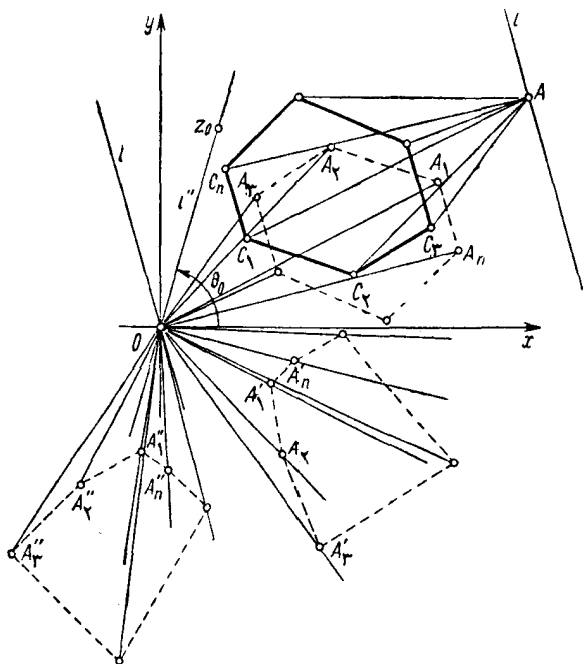
$$\omega' = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

یعنی اگر نقطه‌های B و B' را متناظر باعددهای ω و ω' در صفحه عددهای مختلط بگیریم، آن وقت، نیم خط‌های راست OB و OB' نسبت به محور Ox (محور عددهای حقیقی) متقارن می‌شوند. در نتیجه، اگر نقطه‌های $A'_1, \dots, A'_n$ را متناظر باعددهای

$$z'_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z - c_1}, z'_2 = \frac{1}{z_2}, \dots, z'_n = \frac{1}{z_n}$$

بگیریم، آن وقت نیم خط‌های راست $OA'_1, OA'_2, \dots, OA'_n$ قرینه نیم خط‌های $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ نسبت به محور Ox می‌شوند و، بنابراین، این نیم خط‌ها، در یک طرف خط راست l'' قرار دارند که قرینه خط راست l' نسبت به محور Ox است (شکل ۴۶ را ببینید).

مسیر بعدی راه حل، تا حدی به حل مسأله ۳۳۸ نزدیک است.



فرض می‌کنیم، عدد مختلط $z_0 = \cos \theta_0 + i \sin \theta_0$ ، با مدول واحد، واقع بر

خط راست l' باشد. در ضمن، عددهای $z_1' = \frac{z_1'}{z_0}$ ، $z_2' = \frac{z_2'}{z_0}$ ، $\dots$ ، $z_n' = \frac{z_n'}{z_0}$

را متناظر با نقطه‌های A_1'' ، A_2'' ، $\dots$ ، A_n'' می‌گیریم که از دوران نقطه‌های

A_1' ، A_2' ، $\dots$ ، A_n' دور نقطه O و به اندازه θ_0 به دست آمده‌اند. بنابراین، همه

نقطه‌های A_1'' ، A_2'' ، $\dots$ ، A_n'' در یک طرف محور Ox قرار دارند که از دوران

خط l' دور نقطه O با همان زاویه θ_0 به دست آمده است. به این ترتیب،

b_1'' ، b_2'' ، $\dots$ ، b_n'' ، یعنی بخش موهومی عددهای مختلط $z_1'' = a_1'' + ib_1''$ ،

$z_2'' = a_2'' + ib_2''$ ، $\dots$ ، $z_n'' = a_n'' + ib_n''$ باید هم علامت باشند و

$$z_1'' + z_2'' + \dots + z_n'' = (a_1'' + a_2'' + \dots + a_n'') +$$

$$+ i(b_1'' + b_2'' + \dots + b_n'') \neq 0$$

علاوه بر این، از رابطه

$$z_1'' + z_2'' + \dots + z_n'' = \frac{z_1'}{z_0} + \frac{z_2'}{z_0} + \dots + \frac{z_n'}{z_0} =$$

$$= (z_1' + z_2' + \dots + z_n') \cdot \frac{1}{z_0} \neq 0$$

به دست می‌آید:

$$z_1' + z_2' + \dots + z_n' = \frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \dots + \frac{1}{z - c_n} \neq 0$$

۳۴۵. (۱) حل اول. فرض می‌کنیم a مضربی از p نباشد. در این صورت

عددهای a ، $2a$ ، $3a$ ، $\dots$ ، $(p-1)a$ ، هیچ کدام بر p بخش پذیر نیستند

و از تقسیم آن‌ها بر p ، باقی مانده‌های متفاوتی به دست می‌آید. در واقع، اگر

از تقسیم عددهای ka و la بر p ($1 \leq k < l \leq p-1$)، به باقی مانده‌های برابر

برسیم، آن وقت باید تفاضل آن‌ها، یعنی $(k-l)a$ ، بر p بخش پذیر باشد که

ممکن نیست؛ چون p عددی اول است و a بر p بخش پذیر نیست، پس

$k-l$ از p کمتر است. از تقسیم بر عدد p ، به یکی از باقی مانده‌های $۱, ۲, ۳, \dots, p-۱$ می‌توان رسید؛ بنابراین

$$a = q_1 p + a_1, \quad 2a = q_2 p + a_2, \quad 3a = q_3 p + a_3, \dots$$

$$\dots, (p-1)a = q_{p-1} p + a_{p-1}$$

که در آن‌ها، عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ ، همان عددهای $۱, ۲, ۳, \dots, p-۱$ می‌باشند (که البته، ممکن است به ترتیب دیگری نوشته شده باشند). این برابری‌ها را درهم ضرب می‌کنیم:

$$[1 \times 2 \times \dots \times (p-1)] a^{p-1} = Np + a_1 a_2 \dots a_{p-1}$$

یعنی

$$[1 \times 2 \times \dots \times (p-1)] (a^{p-1} - 1) = Np$$

از این جا روشن می‌شود که $a^{p-1} - 1$ بر p بخش پذیر است که، در نتیجه، $a^p - a$ هم بر p بخش پذیر می‌شود. درحالتی که a مضرب p باشد، درستی قضیهٔ فرما روشن است.

۱۴۱. درستی قضیه را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $a^p - a$ بر p بخش پذیر باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، $(a+1)^p - (a+1)$ هم بر p بخش پذیر است (به‌ازای $a=۱$ ، درستی قضیه روشن است).

بنابراین دستور بسط دوجمله‌ای داریم:

$$(a+1)^p - (a+1) =$$

$$= a^p + p a^{p-1} + C(p, 2) a^{p-2} + C(p, 3) a^{p-3} + \dots +$$

$$+ p a + 1 - a - 1 = (a^p - a) + p a^{p-1} + C(p, 2) a^{p-2} + \dots$$

$$\dots + C(p, p-2) a^2 + p a$$

علاوه بر این، برای ضریب بسط دوجمله‌ای داریم:

$$C(p, k) = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k}$$

که بر p بخش‌پذیر است، زیرا صورت کسر شامل عامل p است، درحالی‌که درمخرج کسر، این عامل وجود ندارد. $a^p - a$ طبق فرض استقرا، بر p بخش‌پذیر است، سایر جمله‌ها هم مضربی از p هستند، بنابراین $(a+1)^p - (a+1)$ بر p بخش‌پذیر است.

یادداشت. با روش دیگری هم، قضیه فرما را ثابت می‌کنیم. همه ضریب‌های بسط دوجمله‌ای، به صورت $C(p, k)$ بر p بخش‌پذیرند، بنابراین تفاضل

$$(A+B)^p - A^p - B^p = pA^{p-1}B + C(p, 2)A^{p-2}B^2 + \dots \\ \dots + C(p, p-2)A^2B^{p-2} + pAB^{p-1}$$

(که در آن، A و B عددهایی درست و دلخواه‌اند)، بر p بخش‌پذیر است. باتوجه به این مطلب، نتیجه می‌گیریم که

$$(A+B+C)^p - A^p - B^p - C^p = \\ = \{[(A+B)+C]^p - (A+B)^p - C^p\} + (A+B)^p - A^p - B^p$$

مضربی است از p ؛ همچنین

$$(A+B+C+D)^p - A^p - B^p - C^p - D^p = \\ = \{[(A+B+C)+D]^p - (A+B+C)^p - D^p\} + \\ + (A+B+C)^p - A^p - B^p - C^p$$

هم مضربی است از p ؛ و به‌طور کلی، عبارت

$$(A+B+C+\dots+K)^p - A^p - B^p - C^p - \dots - K^p$$

مضربی از p می‌شود ($A, B, \dots, K$ ، عددهایی درست و دلخواه‌اند). اکنون، اگر در عبارت بالا قرار دهیم $A=B=C=\dots=K=1$ و تعداد آن‌ها را a بگیریم، به این نتیجه می‌رسیم که $a^p - a$ بر p بخش‌پذیر است.

۳۴۱. اثبات قضیه اولر شبیه اثبات قضیه فرما است. r عدد کوچکتر از N را، که نسبت به N اول اند، $k_1, k_2, \dots, k_r$ می گیریم. همه عددهای $k_1 a, k_2 a, \dots, k_r a$ نسبت به N اول اند (زیرا a و N نسبت به هم اول اند)، بنابراین، از تقسیم این عددها بر N ، به باقی مانده های متفاوت می رسیم. در نتیجه

$$k_1 a = q_1 N + a_1, \quad k_2 a = q_2 N + a_2, \quad \dots, \quad k_r a = q_r N + a_r,$$

که در آن ها، $a_1, a_2, \dots, a_r$ همان عددهای $k_1, k_2, \dots, k_r$ (البته، ممکن است با ترتیب دیگری) می باشند. از ضرب این برابری ها در یکدیگر، به دست می آید:

$$k_1 k_2 \dots k_r a^r = MN + a_1 a_2 \dots a_r,$$

یعنی $k_1 k_2 \dots k_r (a^r - 1) = MN$ که، در آن، M عددی است درست. از این جا، بلافاصله نتیجه می شود که $a^r - 1$ مضربی است از N .

۳۴۲. اثبات را با روش استقرای ریاضی می دهیم. روشن است که گزاره، به ازای $n=1$ درست است، زیرا عددهای $1 = 1 - 1 = 2^1 - 1 = 3 - 1 = 2^2 - 1$ و $7 = 2^3 - 1$ بر ۵ بخش پذیر نیستند. درستی گزاره را برای $n=2$ تحقیق می کنیم.

2^k را کوچکترین توان عدد ۲ می گیریم که، در تقسیم بر $2^5 = ۳۲$ ، باقی مانده ای برابر واحد داشته باشد (یعنی $2^k - 1$ بر ۳۲ بخش پذیر باشد). فرض می کنیم: $2^5 - ۵ = ۲۰ < k$. اگر ۲۰ بر k بخش پذیر باشد (در این حالت $2^5 = qk + r$ و $r < k$)، آن وقت عدد

$$2^{2^5} - 1 = 2^{qk+r} - 1 = 2^r (2^{qk} - 1) + (2^r - 1)$$

بنابر قضیه اولر مضربی است از ۲۵. در ضمن، بنا به فرض عدد

$$2^{qk} - 1 = (2^k)^q - 1$$

که بر $2^k - 1$ بخش پذیر است، بر ۳۲ بخش پذیر می شود. به این ترتیب، باید $2^5 - 1$ هم بر ۳۲ بخش پذیر باشد که فرض ما را نقض می کند؛ زیرا k را

کوچکترین نمای عدد ۲ گرفتیم که، به ازای آن، عدد $۱ - ۲^k$ مضربی از ۲۵ باشد. بنابراین k باید مقسوم‌علیهی از ۲۰ باشد، یعنی ۱، ۲، ۴، ۵ یا ۱۰. ولی عددهای $۱ - ۲^2 = ۳$ ، $۱ - ۲^4 = ۱۵$ و $۱ - ۲^5 = ۳۱$ و $۱ - ۲^{10} = ۱۰۲۳$ مضرب ۲۵ نیستند و عدد $۱ - ۲^۴ = ۱۵$ ، اگر چه مضربی از ۵ است، ولی مضرب ۲۵ نیست. به این ترتیب، گزاره ما، به ازای $n = ۲$ هم درست است.

اکنون فرض می‌کنیم، قضیه برای مقداری از n درست باشد، ولی به ازای $n + ۱$ درست نباشد؛ به زبان دیگر، فرض می‌کنیم، کوچکترین نمای k که، به ازای آن، عدد $۱ - ۲^k$ بر ۵^{n-1} بخش‌پذیر است، از $۵^n = ۵^{n+1} - ۵^n = ۴ \times ۵^n$ کمتر باشد. با روشی که در بالا، برای حالت $n = ۲$ داشتیم، ثابت می‌شود که k باید مقسوم‌علیهی از عدد ۴×۵^n باشد. در عین حال، روشن است که عدد $۵^n - ۵^{n-1}$ یعنی $۴ \times ۵^{n-1}$ باید مقسوم‌علیهی از عدد k باشد. در واقع، اگر داشته باشیم:

$$k = q \times ۴ \times ۵^{n-1} + r, (r < ۴ \times ۵^{n-1})$$

آن وقت عدد $۱ - ۵^r$ بر ۵^n بخش‌پذیر می‌شود که متناقض فرض ما (که، بنابر آن، به ازای مقدار n ، قضیه درست است) می‌باشد. بنابراین، برای k ، تنها يك مقدار باقی می‌ماند:

$$k = ۴ \times ۵^{n-1}$$

بنابراین قضیه اولی، عدد $۱ - ۴ \times ۵^{n-2} = ۵^{n-2} - ۴ \times ۵^{n-2} = ۱ - ۳ \times ۵^{n-2}$ بر ۵^{n-1} بخش‌پذیر است، ولی بر ۵^n بخش‌پذیر نیست و، بنابراین، خواهیم داشت:

$$۴ \times ۵^{n-2} = q \cdot ۵^{n-1} + ۱$$

که در آن، q بر ۵ بخش‌پذیر نیست. اکنون، با استفاده از دستور

$$(a+b)^5 = a^5 + ۵a^4b + ۱۰a^3b^2 + ۱۰a^2b^3 + ۵ab^4 + b^5$$

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} ۴ \times ۵^{n-1} - ۱ &= (۴ \times ۵^{n-2})^5 - ۱ = (q \cdot ۵^{n-1} + ۱)^5 - ۱ = \\ &= ۵^{n+1}(q^5 \cdot ۵^{4n-6} + q^4 \cdot ۵^{3n-4} + ۲q^3 \cdot ۵^{2n-3} + ۲q^2 \cdot ۵^{n-2}) + q \cdot ۵^n \end{aligned}$$

یعنی $۱ - ۲ \times ۵^{n-2}$ بر ۵^{n+1} بخش پذیر نیست. و این، به معنای آن است که، اگر قضیه ما برای n درست باشد، برای $n+1$ هم درست است.

۳۴۳. بنابه قضیه اولر (مسأله ۳۴۱ را ببینید)، عدد

$$۲^{۵^{10}-5^1}-1=2^{4 \times 5^1}-1=2^{7812500}-1$$

بر ۵^{10} بخش پذیر است. بنابراین، به ازای $n \geq 10$ ، تفاضل

$$2^{7812500+n}-2^n=2^n(2^{7812500}-1)$$

بر ۱۰^{10} بخش پذیر است. به این ترتیب، ۱۰ رقم سمت راست دو عدد

$$2^n \text{ و } 2^{7812500+n}$$

برهم منطبق است. و این، به معنای آن است که در دنباله عددهای $۲^1, ۲^2, ۲^3, \dots, ۲^n, \dots$ ، ده رقم سمت راست، باتناوبی از 7812500 عضو دنباله، تکرار می شود؛ این تناوب، از جمله دهم دنباله، یعنی ۲^{10} آغاز می شود. این نکته که طول تناوب نمی تواند کمتر از 7812500 باشد، نتیجه ای است از مسأله ۳۴۲.

یادداشت. با همین روش، می توان ثابت کرد که n رقم سمت راست عددهای این دنباله، با تناوبی به طول $4 \times 5^{n-1}$ عضو دنباله و با آغاز از عدد n ام، تکرار می شوند (مثلاً، یک رقم سمت راست، با آغاز از جمله اول و با دوره تناوبی برابر ۴ عضو، دو رقم سمت راست با آغاز از جمله دوم و با دوره تناوبی برابر ۲۰ عضو، تکرار می شوند).

۳۴۴. قضیه عام تری را ثابت می کنیم. برای هر عدد طبیعی N ، همواره توانی از ۲ وجود دارد، به نحوی که N رقم سمت راست آن، تنها شامل رقم های ۱ و ۲ باشد.

چون $۲^5=32$ و $۲^9=512$ ، بنابراین قضیه ما به ازای $N=1$ و $N=2$ درست است. اکنون، فرض می کنیم، N رقم سمت راست عدد ۲^n ، تنها شامل رقم های ۱ و ۲ باشد و ثابت می کنیم که، در این صورت، توانی از عدد ۲ وجود دارد، که $N+1$ رقم سمت راست آن، تنها شامل رقم های ۱ و ۲

است. بنا به فرض استقرا داریم: $۲^n = ۱۰^N a + b$ که، در آن، b عددی است N رقمی و تنها شامل رقم‌های ۱ و ۲. عدد $۵^N - ۵^{N-1} = ۴ \times ۵^{N-1}$ را با ۳ نشان می‌دهیم. بنا به قضیهٔ اولر (مسألهٔ ۳۴۱ را ببینید) تفاضل $۲^r - ۱$ بر ۵^N بخش پذیر است. بنابراین، اگر عدد درست k بر ۲^{N+1} بخش پذیر باشد، آن وقت تفاضل $(۲^r - ۱)k = ۲^r k - k$ باید بر ۲×۱۰^N بخش پذیر باشد؛ و این، به معنای آن است که دو عدد $۲^r k$ و k در N رقم سمت راست خود بر هم منطبق اند، و رقم‌های $(N+1)$ ام این دو عدد (با شمارش رقم‌ها، از راست به چپ)، یا هردو زوج و یا هردو فردند.

اکنون، از توان‌های ۲، پنج عدد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$۲^n, ۲^{n+r} = ۲^r \cdot ۲^n, ۲^{n+۲r} = ۲^r \cdot ۲^{n+r},$$

$$۲^{n+۳r} = ۲^r \cdot ۲^{n+۲r}, ۲^{n+۴r} = ۲^r \cdot ۲^{n+۳r}$$

با توجه به آن چه گفتیم، این پنج عدد، در N رقم سمت راست خود، بر هم منطبق اند، یعنی همهٔ این عددها به عدد N رقمی b (که تنها شامل رقم‌های ۱ و ۲ است و در نمایش دهدهی عدد $۲^n = ۱۰^N a + b$ با آن سروکار داشتیم) ختم می‌شوند و رقم $(N+1)$ ام آن‌ها (از راست به چپ)، یا همه زوج اند و یا همه فرد. اکنون ثابت می‌کنیم، بین این پنج عدد، نمی‌توان دو عدد را پیدا کرد که در رقم $(N+1)$ ام خود، بر هم منطبق باشند. در واقع، تفاضل هر دو عدد دلخواه از بین این پنج عدد را، می‌توان به صورت

$$۲^{n+m_1 r} (۲^{m_2 r} - ۱), (m_1 = ۰, ۱, ۲, ۳; m_2 = ۱, ۲, ۳, ۴)$$

نوشت. اگر این تفاضل بر ۱۰^{N+1} بخش پذیر باشد، آن وقت $۲^{m_2 r} - ۱$ بر ۵^{N+1} بخش پذیر می‌شود؛ ولی از آن جا که

$$m_2 r = m_2 \cdot (۵^N - ۵^{N-1}) < ۵ \cdot (۵^N - ۵^{N-1}) = ۵^{N+1} - ۵^N$$

بین بخش پذیری متناقض با مسألهٔ ۳۴۲ درمی‌آید.

به این ترتیب، رقم $(N+1)$ ام در پنج عدد فوق یا ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ و یا ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ می‌باشند (این که کدام رقم متعلق به کدام عدد است، برای ما معلوم نیست). در هر حال، رقم $(N+1)$ ام یکی از این عددها، یا

۱ است و یا ۲. بنابراین، در هر حال، توانی از ۲ وجود دارد که $(N+1)$ رقم سمت راست آن، تنها شامل رقم‌های ۱ و ۲ باشد. حکم قضیه، با روش استقرای ریاضی ثابت شد.

۳۴۵. اگر n را عددی طبیعی بگیریم، روشن است که، هر دو عدد به صورت n و n^2 ، يك «جفت خوب» درست می‌کنند. علاوه بر این، اگر $n+1$ توان درستی از عدد ۲ باشد: $n+1=2^k$ ($k \geq 1$) عددی است (طبیعی)، آن وقت دو عدد $n-1$ و n^2-1 هم، يك «جفت خوب» تشکیل می‌دهند. در واقع، تمایز بین عددهای

$$n-1 \text{ و } n^2-1 = (n+1)(n-1) = 2^k(n-1)$$

در این است که، توان عدد ۲ در دومی، به اندازه k واحد از توان عدد ۲ در اولی بیشتر است (عدد $n-1$ شامل عامل ۲ است، زیرا $n+1=2^k$ و $n-1=2^k-2$ و $n=2^k-1$). از این جا نتیجه می‌شود که، تعداد «جفت عددهای خیلی خوب» بی‌نهایت است. به عنوان نمونه، می‌توان از این «جفت‌های خیلی خوب» نام برد:

$$n-1=2^k-2, n^2-1=(n-1)(n+1)=2^k(2^k-2)$$

که در آن $k=1, 2, 3, \dots$.

۳۴۶. روشن است که می‌توان جمله اول a و قدر نسبت d را، نسبت به هم اول فرض کرد؛ زیرا اگر a و d بر عددی مثل $k > 1$ بخش پذیر باشند، می‌توان همه جمله‌های تصاعد حسابی را بر عامل k تقسیم کرد؛ به این ترتیب به تصاعدی می‌رسیم که، در آن a و d نسبت به هم اول اند. در ضمن بنا بر قضیه اولر (مسأله ۳۴۱)، برای عددهای a و d (که نسبت به هم اول اند)، عددی مانند d وجود دارد، به نحوی که a^r-1 و، همراه با آن، $a^{r+1}=a+Nd$ بر d بخش پذیر باشند. عدد a^{r+1} و، در این حالت، همه عددهای به صورت a^{rk+1} ($k=1, 2, 3, \dots$) متعلق به تصاعد حسابی مفروض اند، زیرا عدد

$$a^{rk}-1=(a^r-1)(a^{r(k-1)}+a^{r(k-2)}+\dots+1)$$

بر a^r-1 و، بنابراین، بر d بخش پذیر است. از این جا نتیجه می‌شود که عدد

$$a^{k+1} - a = Md, (M \in \mathbb{N})$$

بر d بخش پذیر و عدد $a^{k+1} = a + Md$ ، جمله $(M+1)$ ام تصاعد است. و روشن است که عددهای $a, a^{r+1}, a^{2r+1}, a^{3r+1}$ ، در تجزیه متعارف خود، به عامل‌های اول یکسانی می‌رسند (که البته، نمای این عامل‌های اول، ممکن است باهم فرق داشته باشند). درستی حکم قضیه ثابت شد.

۰۳۴۷ a را عددی متعلق به دنباله $۲, ۳, \dots, p-۲$ فرض می‌کنیم و عددهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a, ۲a, ۳a, \dots, (p-۱)a$$

در بین این عددها، هیچ دو عددی وجود ندارد که در تقسیم بر p ، باقی مانده‌ای برابر داشته باشند. بنابراین، باقی مانده‌های حاصل از تقسیم این عددها بر p ، عبارتند از $۱, ۲, ۳, \dots, p-۱$ که در ضمن هریک از این باقی مانده‌ها تنها یک بار ظاهر می‌شود (حل مسأله ۰۳۴۰ را ببینید). به خصوص، در دنباله عددهای $a, ۲a, \dots, (p-۱)a$ عدد درستی مثل b وجود دارد، به نحوی که در تقسیم ba بر p ، باقی مانده‌ای برابر واحد به دست آید. برای این عدد b باید داشته باشیم: $b \neq ۱$ و $b \neq p-۱$ ، زیرا $a \leq p-۲$ ؛ یعنی برای $b=۱$ ، در تقسیم عدد $ba=a$ بر p ، به باقی مانده $a \neq ۱$ و برای $b=p-۱$ ، در تقسیم عدد $ba=(p-۱)a=pa-a$ ، به باقی مانده $a \neq ۱$ می‌رسیم. از این گذشته، داریم $b \neq a$ ، زیرا اگر از تقسیم $a^۲$ بر p به باقی مانده واحد برسیم، آن وقت $(a+۱)(a-۱)=a^۲-۱$ بر p بخش پذیر می‌شود و این، تنها وقتی امکان دارد که داشته باشیم: $a=۱$ یا $a=p-۱$. به این ترتیب

$$۲ \leq b \leq p-۱ \text{ و } b \neq a$$

یعنی، عضوهای دنباله $۲, ۳, \dots, p-۲$ به زوج عددهایی تقسیم می‌شوند که، از تقسیم حاصل ضرب دو عدد از هریک این زوج‌ها بر p ، باقی مانده‌ای برابر واحد به دست می‌آید.

در صورت ضرب $(۲) \times (۳) \times \dots \times (p-۲)$ ، به تعداد $\frac{p-۳}{۲}$ از این

زوج‌ها وجود دارد و، در ضمن، باقی مانده حاصل از تقسیم این حاصل ضرب

بر p برابر است با واحد؛ علاوه بر این، از تقسیم عدد $p-1$ بر p ، به باقی مانده ۱ — می رسیم و در نتیجه، باقی مانده حاصل از تقسیم عدد

$$(p-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p-2) \times (p-1) = \\ = [2 \times 3 \times \dots \times (p-2)] \times (p-1)$$

بر p برابر ۱ — است و داریم: $(p-1)! = kp - 1$ و $(p-1)! + 1 = kp$ ، یعنی $(p-1)! + 1$ بر p بخش پذیر است.

اگر p عددی اول نباشد، مقسوم علیه اولی مانند q خواهد داشت ($q < p$). در این حالت، عدد $(p-1)!$ بر q بخش پذیر و، بنابراین، $(p-1)! + 1$ بر q بخش ناپذیر می شود. به این ترتیب $(p-1)! + 1$ نمی تواند مضربی از p باشد.

۰۳۴۸ الف) به ازای $p=2$ داریم: $p = 1^2 + 0^2 + 1$. از این به بعد می توانیم، p را عددی فرد بگیریم ($p=2$) تنها عدد اول زوج است). ثابت می کنیم که، در این حالت، می توان دو عدد درست x و y پیدا کرد، به نحوی که هر کدام از آنها از $\frac{p}{2}$ کوچکتر باشند و، در ضمن، در شرط مسأله صدق کنند.

این دنباله را، که شامل $\frac{p+1}{2}$ جمله است، در نظر می گیریم:

$$0, 1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$$

از تقسیم مجذور هر دو عددی از عددهای این دنباله بر p ، به دو باقی مانده متفاوت می رسیم، زیرا اگر مثلاً داشته باشیم:

$$x_1^2 = k_1 p + r, \quad x_2^2 = k_2 p + r$$

(x_1 و x_2 ، عددهایی از دنباله ما هستند)، آن وقت با توجه به برابری

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (k_1 - k_2)p$$

باید عدد $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ بر p بخش پذیر باشد که ممکن نیست، زیرا

$$x_2 < \frac{p}{2}, \quad x_1 < \frac{p}{2} \quad \text{و} \quad x_1 + x_2 < p \quad \text{و} \quad |x_1 - x_2| < p \quad (\text{به یاد داشته باشیم})$$

که p ، عددی است اول). بنابراین از تقسیم عددهای

$$۰^۲, ۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, \dots, \left(\frac{p-1}{۲}\right)^۲$$

بر p ، به $\frac{p-1}{۲}$ باقی ماندهٔ مختلف می‌رسیم. از این جامی توان نتیجه گرفت که اگر $\frac{p+1}{۲}$ عدد منفی

$$-۱, -۱^۲-۱, -۲^۲-۱, -۳^۲-۱, \dots, -\left(\frac{p-1}{۲}\right)^۲-۱$$

را بر p تقسیم کنیم، $\frac{p+1}{۲}$ باقی ماندهٔ مختلف به دست می‌آید؛ زیرا اگر از تقسیم دو عدد $-x^۲-۱$ و $-x'^۲-۱$ بر p ، باقی مانده‌های برابر به دست آید، آن وقت باید در تقسیم $x^۲$ و $x'^۲$ بر p هم، به باقی مانده‌های برابر برسیم.* چون در تقسیم بر p ، تنها p باقی ماندهٔ مختلف، ممکن است به دست آید $(۰, ۱, ۲, \dots, p-۱)$ ، بنابراین بین $p+۱$ عدد

$$۰^۲, ۱^۲, ۲^۲, \dots, \left(\frac{p-1}{۲}\right)^۲, -۱, -۱^۲-۱, -۲^۲-۱, \dots, -\left(\frac{p-1}{۲}\right)^۲-۱$$

دست کم دو عدد وجود دارد که از تقسیم آن‌ها بر p ، به باقی مانده‌های برابر می‌رسیم.

با توجه به همهٔ این‌ها، روشن می‌شود که، از این دو عدد (که در تقسیم بر p به باقی مانده‌های برابر می‌رسند)، یکی به صورت $x^۲$ و دیگری به صورت $-y^۲-۱$ است. اگر فرض کنیم:

$$x^۲ = kp + r \text{ و } -y^۲ - 1 = lp + r$$

(*) وقتی k و r ، به ترتیب، خارج قسمت و باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم a بر p باشند، داریم: $a = kp + r$ ، که در آن $۰ \leq r < p$ ؛ در حالتی که a عدد منفی باشد، خارج قسمت k هم منفی خواهد بود.

آن وقت خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = (k-l)p - 1 = mp - 1$$

یعنی $x^2 + y^2 + 1 = mp$ بر p بخش پذیر است.

یادداشت. در مساله می توان این شرط اضافی را وارد کرد که x و y

نباید از $\frac{p}{2}$ بیشتر باشند؛ با توجه به این شرط $x^2 + y^2 + 1$ از p^2 کوچکتر

می شود و، بنابراین، خارج قسمت m حاصل از تقسیم مجموع $x^2 + y^2 + 1$ بر p ، از p کمتر خواهد بود.

(ب) $p = 4n + 1$ را عددی اول می گیریم. بنابراین قضیه ویلسون (مسأله ۳۴۷)، عدد

$$(p-1)! + 1 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (4n) + 1$$

بر p بخش پذیر است. در این صورت ضرب، عددهای بزرگتر از $2n$ از $\frac{p-1}{2}$

برابرند با تفاضل های متناظر بین عدد p و عددهای کمتر از $\frac{p-1}{2}$ ، مثلاً

$$p - 2n = (4n + 1) - 2n = 2n + 1, \quad p - (2n - 1) = 2n + 2, \dots$$

در این صورت داریم:

$$(p-1)! + 1 = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2n(p-2n)(p-2n+1) \dots$$

$$\dots (p-1) + 1 = (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2n)[Ap +$$

$$+ (-1)^{2n} 2n \cdot (2n-1) \times \dots \times 1] + 1 =$$

$$= A_1 p + (1 \times 2 \times \dots \times 2n)^2 + 1$$

چون این عدد بر p بخش پذیر است، بنابراین $[(2n)!]^2 + 1$ هم بر p بخش پذیر می شود. به این ترتیب برای هر عدد اول $p = 4n + 1$ ، عدد

$x = (2n)! = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ به نحوی است که به ازای آن، $x^2 + 1$ بر p بخش پذیر است.

یادداشت. یادآوری می‌کنیم که، اگر در تقسیم x بر عدد p به باقی مانده‌ای برابر x_1 برسیم، آن وقت، از بخش پذیری عدد

$$x^2 + 1 = (kp + x_1)^2 + 1 = (k^2 p + 2kx_1)p + x_1^2 + 1$$

بر p نتیجه می‌شود که $x_1^2 + 1$ هم بر p بخش پذیر است؛ به این ترتیب، می‌توان x را کوچکتر از p در نظر گرفت که، در این صورت، $x^2 + 1$ از p^2 کوچکتر می‌شود، یعنی خارج قسمت حاصل از تقسیم $x^2 + 1$ بر p ، از p کوچکتر است.

۰۳۴۹. نامتناهی بودن دنباله عددهای اول را، می‌توان از مسأله ۲۳۴ نتیجه گرفت. از همین مسأله می‌توان نتیجه گرفت که، تعداد عددهای اول در دنباله عددهای طبیعی، به اندازه کافی زیاد است و، مثلاً، از تعداد مجذورهای کامل بیشترند (یادداشت مسأله ۲۳۴ را ببینید). مسأله ۹۰ هم ما را به این نتیجه می‌رساند که، دنباله عددهای اول، دنباله‌ای نامتناهی است: اگر تعداد عددهای اول محدود و برابر n باشد، آن وقت تعداد جفت عددهایی که نسبت به هم اول اند، از n تجاوز نمی‌کند. با همه این‌ها، اثباتی که اقلیدس برای اثبات نامتناهی بودن دنباله عددهای اول داده است، از همه این‌ها ساده‌تر است.

فرض کنیم، تنها n عدد اول داشته باشیم:

$$2, 3, 5, 7, 11, \dots, p_n$$

عدد $N = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p_n + 1$ از همه عددهای اول $2, 3, 5, \dots, p_n$ بزرگتر است و، بنابر فرض، باید عددی مرکب باشد. ولی عدد N در تقسیم بر هر یک از عددهای اول $2, 3, 5, \dots, p_n$ به باقی مانده‌ای برابر واحد می‌رسد و وقتی عددی بر هیچ کدام از عددهای اول بخش پذیر نباشد، باید خود، عددی اول باشد. وجود تناقض، درستی حکم

را ثابت می‌کند.

۳۵۰. الف) اثبات این قضیه، تا حدی، به اثبات اقلیدس درباره نامتناهی بودن دنباله عددهای اول، نزدیک است.

فرض می‌کنیم، تعداد عددهای اول، درین عددهای به صورت $4k-1$ ، محدود باشد. این عددها را

$$3, 7, 11, 19, 23, 31, \dots, p_n \quad (*)$$

می‌گیریم و عدد N را به این صورت تشکیل می‌دهیم:

$$N = 4(3 \times 7 \times 11 \times 19 \times \dots \times p_n) - 1$$

عدد N از همه عددهای دنباله متناهی $(*)$ بزرگتر است و، بنابراین، باید عددی مرکب باشد. (درضمن، توجه کنید که N به صورت $4k-1$ و عددی از تصاعد مورد نظر ماست).

در تجزیه عدد N به ضرب عامل‌های اول، عدد اولی به صورت $4k-1$ به دست نمی‌آید، زیرا عدد $4(2 \times 3 \times 7 \times \dots \times p_n) - 1 \equiv N-1$ بر همه عددهای اول به صورت $4k-1$ بخش‌پذیر است، یعنی N نسبت به هر یک از این عددها، اول است. چون N عددی فرد است، باید به ضرب چند عامل اول به صورت $4k+1$ تجزیه شود که ممکن نیست. درواقع، از ضرب دو عدد به صورت $4k+1$ ، باز هم عددی به صورت $4k+1$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (4k_1+1)(4k_2+1) &= 16k_1k_2 + 4k_1 + 4k_2 + 1 = \\ &= 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 4k_3 + 1 \end{aligned}$$

به این ترتیب، از ضرب چند عدد به صورت $4k+1$ به عددی به صورت $4k+1$ می‌رسیم، درحالی که عدد N ، به صورت $4k-1$ است. تناقض حاصل، درستی حکم را ثابت می‌کند.

برای تصاعد با جمله‌های ۵، ۱۱، ۱۷، ۲۳، ... هم می‌توان با همین روش استدلال کرد (توجه کنید، جمله‌های این تصاعد به صورت $6k-1$ هستند).

(ب) اثبات این قضیه هم، براساس همان اندیشه‌ای است که، به کمک آن، مسأله الف) را حل کردیم؛ البته با اندکی پیچیدگی بیشتر. فرض می‌کنیم، در بین جمله‌های تصاعد حسابی مفروض، تعداد محدودی عدد اول وجود داشته باشد:

$$p_n, \dots, 101, 71, 61, 41, 31, 11$$

عدد N را به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$N = (11 \times 31 \times 41 \times 61 \times \dots \times p_n)^5 - 1$$

این عدد نسبت به همهٔ عددهای ۱۱، ۳۱، ۴۱، ...، p_n اول است، زیرا $N+1$ بر همهٔ این عددها بخش‌پذیر است. حاصل ضرب $11 \times 31 \times 41 \times \dots \times p_n$ را با a نشان می‌دهیم، داریم:

$$N = a^5 - 1 = (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$$

مقسوم‌علیه‌های اول عامل دوم، یعنی $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ را بررسی می‌کنیم. این مجموع مضرب ۲ نیست (زیرا مجموع ۵ عدد فرد، عددی است فرد). این مجموع مضربی است از ۵، زیرا عدد a به رقم ۱ ختم شده است و، بنابراین، عددهای a ، a^2 ، a^3 و a^4 ، همگی به رقم ۱ ختم می‌شوند و، در نتیجه، مجموع $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ مضربی است از ۵.

اکنون p را مقسوم‌علیه‌اولی از عدد $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ می‌گیریم که غیر از ۵ باشد. در این صورت عدد $a - 1$ نمی‌تواند مضربی از p باشد، چون اگر $a - 1$ بر p بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم $a = kp + 1$ و، در نتیجه، عدد

$$a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (kp + 1)^4 + (kp + 1)^3 + (kp + 1)^2 + (kp + 1) + 1$$

در تقسیم بر p به باقی‌ماندهٔ ۵ می‌رسد، یعنی $a - 1$ مضربی است از ۵. در واقع، به عنوان نمونه، فرض می‌کنیم، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$p-1$ بر ۵ برابر ۴ باشد:

$$p-1 = 5k+4$$

بنابینه قضیه فرما، تفاضل $1 - a^{p-1}$ بر p بخش پذیر است؛ درضمن

$$a^{p-1} - 1 = a^{5k+4} - 1 = a^4(a^{5k} - 1) + (a^4 - 1)$$

و چون $1 - a^{5k} = (a^5)^k - 1$ بر $a^5 - 1$ و بنابراین بر p بخش پذیر است. باید $a^4 - 1$ هم بر p بخش پذیر باشد. از طرف دیگر داریم:

$$a^5 - 1 = a(a^4 - 1) + (a - 1)$$

یعنی اگر $a^5 - 1$ و $a^4 - 1$ بر p بخش پذیر باشند، $a - 1$ هم مضربی از p می شود که، همان طور که دیدیم، ممکن نیست.

باهمین روش می توان ثابت کرد که از تقسیم $p-1$ بر ۵ نمی توان به باقی مانده ای برابر ۱، ۲ یا ۳ رسید.

به این ترتیب، $p-1$ مضربی است از ۵؛ درضمن $p-1$ عددی است زوج (چون p ، عددی فرد است)، در نتیجه $p-1$ بر ۱۰ بخش پذیر است و عدد p را می توان به صورت $10k+1$ نوشت که، در واقع، به تصاعد حسابی ما تعلق دارد. می بینیم که مقسوم علیه های اول مجموع $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ یا عدد ۵ است و یا عدد اولی به صورت $10k+1$. از این گذشته، روشن است که عدد $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ از ۵ بزرگتر است و بر عدد $25 = 5^2$ بخش پذیر نیست. در واقع، عدد a به واحد ختم می شود و به صورت $5k+1$ است. با توجه به دستور بسط دو جمله ای داریم:

$$\begin{aligned} a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 &= (5k+1)^4 + (5k+1)^3 + (5k+1)^2 + \\ &+ (5k+1) + 1 = 625k^4 + 4 \times 125k^3 + 6 \times 25k^2 + 4 \times 5k + \\ &+ 1 + 125k^3 + 3 \times 25k^2 + 3 \times 5k + 1 + 25k^2 + 2 \times 5k + 1 + \\ &+ 5k + 1 + 1 = 625k^4 + 5 \times 125k^3 + 10 \times 25k^2 + \\ &+ 10 \times 5k + 5 = 5[5(25k^4 + 25k^3 + 10k^2 + 2k) + 1] \end{aligned}$$

از این جا روشن می‌شود که، این مجموع، و در نتیجه $N = a^5 - 1$ ، باید دست کم یک مقسوم علیه اول به صورت $10k + 1$ داشته باشد، در حالی که N باید نسبت به همهٔ عددهای به صورت $10k + 1$ اول باشد. تناقض حاصل، درستی حکم را ثابت می‌کند.

یادداشت. با استفاده از همین روش می‌توان ثابت کرد: هر تصاعد حسابی که جمله‌های آن به صورت $1 + 2pk$ باشند، به شرط این که p عددی اول و فرد باشد، شامل بی‌نهایت جملهٔ اول است.

سیاهه نمادها

ABC	مساحت مثلث	$[ABC]$
$\approx$ یا $\simeq$	تقریباً برابر است با	
$\cong$	هم نهشتی (در هندسه)	
$a \equiv b \pmod{p}$	$a - b$ بر p بخش پذیر است	
$a \not\equiv b \pmod{p}$	$a - b$ بر p بخش پذیر نیست	
$\equiv$	متحد است با	
$[x]$	بخش درست عدد x : بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نکند	
$C(n, k)$ یا C_n^k	ضریب دو جمله ای، تعداد ترکیب های k به n شیء	$\binom{n}{k}$
(n, k)	بزرگترین مقسوم علیه مشترک n و k	
$p n$	n بر p بخش پذیر است	
$p \nmid n$	n بر p بخش پذیر نیست	
$n!$	فاکتوریل n : $1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ ؛ $0! = 1$	
$\prod_{i=1}^n a_i$	حاصل ضرب $a_1 a_2 \dots a_n$	
$\sim$	تشابه (در هندسه)	
$\sum_{i=1}^n a_i$	مجموع $a_1 + a_2 + \dots + a_n$	
$\circ$	$f \circ g(x) = f[g(x)]$ (ترکیب دو تابع)	
$K_1 \cup K_2$	اجتماع دو مجموعه K_1 و K_2	
$K_1 \cap K_2$	اشترک دو مجموعه K_1 و K_2	
$[a, b]$	بازه بسته، یعنی $a \leq x \leq b$	
(a, b)	بازه باز، یعنی $a < x < b$	